Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Бурнаев, Е. А. Файнберг, А. Н. Ширяев,
Об асимптотической оптимальности второго поряд-
ка в минимаксной задаче скорейшего обнаружения
момента изменения сноса у броуновского движения,
Теория вероятн. и ее примен., 2008, том 53, вы-
пуск 3, 557–575

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2449>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru
подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским согла-
шением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 14:07:30

© 2008 г. БУРНАЕВ Е. В.*, ФАЙНБЕРГ Е. А.**; ШИРЯЕВ А. Н.***

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧЕ СКОРЕЙШЕГО ОБНАРУЖЕНИЯ МОМЕНТА ИЗМЕНЕНИЯ СНОСА У БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ¹⁾

В задаче о «разладке», состоящей в появлении сноса у броуновского движения в момент $\theta \geq 0$, исследуются минимаксные риски $C(T) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}_T} \sup_{\theta} \mathbf{E}_{\theta}(\tau - \theta | \tau \geq \theta)$ и $\bar{C}(T) = \inf_{\bar{\tau} \in \bar{\mathcal{M}}_T} \sup_{\theta} \mathbf{E}_{\theta}(\bar{\tau} - \theta | \bar{\tau} \geq \theta)$, где $\mathcal{M}_T$ — класс моментов остановки τ таких, что $\mathbf{E}_{\infty} \tau = T$, и $\bar{\mathcal{M}}_T$ — класс рандомизированных моментов остановки $\bar{\tau}$ таких, что $\mathbf{E}_{\infty} \bar{\tau} = T$. Основные результаты работы относятся к получению для этих рисков оценок сверху и снизу, из которых, в частности, вытекает существование моментов, обладающих при $T \rightarrow \infty$ свойством асимптотической оптимальности первого и второго порядка (соответственно для $C(T)$ и $\bar{C}(T)$).

Ключевые слова и фразы: задача о «разладке», броуновское движение, минимаксный риск, асимптотическая оптимальность первого и второго порядка.

1. Введение. Постановка задачи и обсуждение результатов

1.1. Байесовская формулировка задачи скорейшего обнаружения момента изменения сноса у броуновского движения («задача о разладке») была дана в [6], [7]. Там же было найдено решение этой задачи для экспоненциального априорного распределения момента появления разладки и специальным *предельным переходом* было получено решение

* Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Б. Каретный пер., 19, 127994 Москва, Россия; e-mail: burnaev@iitp.ru

** State University of New York at Stony Brook, Stony Brook, NY, 11794-3600, USA; e-mail: Eugene.Feinberg@sunysb.edu

*** Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: albertsh@mi.ras.ru

¹⁾ Первый автор частично поддержан аналитической ведомственной целевой программой РНП.2.2.1.1.2467, грантами НШ-5379.2006.1, РГНФ 06-02-91821 а/Г, программой фундаментальных исследований Президиума РАН 15. Второй и третий авторы поддержаны грантами NSF (DMI-0300121 и DMI-0600538) и NYSTAR, а также грантами РФФИ 08-01-00740 и 08-01-91205-ЯФ.

задачи о разладке в обобщенной байесовской постановке (с «равномерным» распределением на $\mathbf{R}^+ = [0, \infty)$), к которой сводится задача о скорейшем обнаружении нарушения стационарного режима (см. [7], [21, п. 4.2], [22, § 3.9]).

Прямое решение обобщенной байесовской задачи — без предельного перехода — было приведено в работе [11] (вариант (B)), где были также получены (см. [11, теорема 3.1]) оценки сверху и снизу для минимаксного риска, характеризующего степень запаздывания в обнаружении момента появления разладки (вариант (C)).

С целью уменьшения «зазора» между верхней и нижней границами для минимаксного риска (см. неравенства (13) ниже и неравенства (3.1) в [11]) в настоящей работе рассматривается возможность использования (для подачи сигнала о появлении разладки) не только марковских моментов (моментов останова), определяемых ходом наблюдаемого процесса, но и *рандомизированных* моментов (вариант ($\bar{C}$)).

Основной результат данной работы состоит в доказательстве того, что в классе рандомизированных моментов существует момент, являющийся асимптотически оптимальным *второго порядка* при $T \rightarrow \infty$; см. неравенства (14) в п. 1.6. (Для этого рандомизированного момента оценки сверху и снизу соответствующего минимаксного риска дают меньший «зазор», нежели при использовании лишь нерандомизированных моментов. При этом первые два члена в этих оценках совпадают, а остальные стремятся к нулю при $T \rightarrow \infty$.)

1.2. Постановка задач о разладке в вариантах (B), ($\bar{B}$), (C) и ($\bar{C}$) состоит в следующем (ср. с [11]).

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ — фильтрованное вероятностное пространство и $B = (B_t)_{t \geq 0}$ — стандартное броуновское движение ($\mathbf{E}B_t = 0$, $\mathbf{E}B_t^2 = t$).

Предполагается, что наблюдаемый процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ имеет следующую структуру:

$$X_t = \mu(t - \theta)^+ + \sigma B_t, \quad (1)$$

где $x^+ = \max(x, 0)$, $\mu \neq 0$, $\sigma > 0$ и θ — параметр, принимающий значения в $[0, \infty]$ и интерпретируемый как момент возникновения *разладки*. Поскольку, согласно (1),

$$dX_t = \begin{cases} \sigma dB_t, & t < \theta, \\ \mu dt + \sigma dB_t, & t \geq \theta, \end{cases}$$

то в момент θ меняется снос у броуновского движения (происходит «разладка»).

Обозначим $\mathbf{P}_\theta = \text{Law}(X | \mathbf{P}, \theta)$ — распределение вероятностей (в пространстве непрерывных функций $C = C[0, \infty)$ с борелевской σ -алгеброй $\mathcal{C}$) процесса X в предположении, что разладка произошла в мо-

мент θ . В таком случае распределение $\mathbf{P}_\infty$ — это распределение вероятностей процесса X , когда $\theta = \infty$ (и, значит, $\mathbf{P}_\infty = \text{Law}(\sigma B_t, t \geq 0)$); распределение $\mathbf{P}_0$ — это распределение вероятностей процесса X в предположении, что разладка имеет место в момент $\theta = 0$ (и, значит, $\mathbf{P}_0 = \text{Law}(\mu t + \sigma B_t, t \geq 0)$).

С целью упрощения обозначений будем предполагать (и это не ограничивает общности), что в исходном фильтрованном вероятностном пространстве поток $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ совпадает с $(\mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0}$, где $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, s \leq t)$ суть σ -алгебры, порожденные броуновским движением. Отметим, что $(\mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0} = (\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ при любом $\theta \in [0, \infty]$.

Пусть $\mathcal{M} = \{\tau: \tau = \tau(\omega) < \infty, \omega \in \Omega\}$ — класс конечных марковских моментов (моментов остановки) относительно потока $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ($= (\mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0}$).

Помимо класса $\mathcal{M}$ (нерандомизированных моментов остановки) введем более широкий класс *рандомизированных* моментов остановки $\bar{\tau} = \bar{\tau}(\bar{\omega})$, определяемых следующим образом (ср. с [8, гл. II, § 7]).

Пусть $\tilde{\Omega} = [0, 1]$, $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{B}([0, 1])$ — борелевская система множеств на $\tilde{\Omega}$ и $\tilde{\mathbf{P}} = \lambda$ — лебеговская мера на $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$. Введем новое фильтрованное вероятностное пространство $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, (\bar{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}, \bar{\mathbf{P}})$ с $\bar{\Omega} = \Omega \times \tilde{\Omega}$, $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes \tilde{\mathcal{F}}$, $\bar{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t \otimes \tilde{\mathcal{F}}$, $\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \otimes \tilde{\mathbf{P}}$.

Полагая $\bar{\omega} = (\omega, \tilde{\omega})$, будем говорить, что моменты $\bar{\tau} = \bar{\tau}(\bar{\omega})$ являются *рандомизированными* марковскими моментами (моментами остановки), если $\{\bar{\omega}: \bar{\tau}(\bar{\omega}) \leq t\} \in \bar{\mathcal{F}}_t$ для каждого $t \geq 0$.

Класс таких конечных рандомизированных моментов будем обозначать $\bar{\mathcal{M}} = \{\bar{\tau}: \bar{\tau} = \bar{\tau}(\bar{\omega}) < \infty, \bar{\omega} \in \bar{\Omega}\}$.

Условимся также о следующих обозначениях. Если $Y = Y(\omega)$ и $\tilde{Y} = \tilde{Y}(\tilde{\omega})$ — случайные элементы, заданные на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ соответственно, то они естественным образом могут рассматриваться и как элементы на $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbf{P}})$, если полагать $\bar{Y}(\bar{\omega}) = Y(\omega)$ и $\tilde{\bar{Y}}(\bar{\omega}) = \tilde{Y}(\tilde{\omega})$ для $\bar{\omega} = (\omega, \tilde{\omega})$.

По смыслу рассматриваемых далее задач скорейшего обнаружения моменты τ и $\bar{\tau}$ будут интерпретироваться как (нерандомизированные и рандомизированные) моменты подачи «сигнала» о появлении разладки.

1.3. Пусть для всякого $T > 0$

$$\mathcal{M}_T = \{\tau \in \mathcal{M}: \mathbf{E}_\infty \tau = T\}, \quad \bar{\mathcal{M}}_T = \{\bar{\tau} \in \bar{\mathcal{M}}: \bar{\mathbf{E}}_\infty \bar{\tau} = T\}, \quad (2)$$

где $\mathbf{E}_\infty$ и $\bar{\mathbf{E}}_\infty$ — усреднение по мерам $\mathbf{P}_\infty$ и $\bar{\mathbf{P}}_\infty = \mathbf{P}_\infty \otimes \tilde{\mathbf{P}}$ соответственно. По своему смыслу класс $\mathcal{M}_T$ — это класс тех моментов $\tau \in \mathcal{M}$, для которых среднее время $\mathbf{E}_\infty \tau$, т.е. среднее время до подачи сигнала о наличии разладки, если ее на самом деле нет, равно T . Попросту говоря, $\mathbf{E}_\infty \tau$ — это среднее время до объявления «ложной тревоги» о наличии разладки в ходе наблюдаемого процесса.

Введем для $T > 0$ следующие величины, характеризующие качество моментов останковки из классов $\mathfrak{M}_T$ и $\overline{\mathfrak{M}}_T$:

$$B(T) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \frac{1}{T} \int_0^\infty \mathbf{E}_\theta(\tau - \theta)^+ d\theta, \quad \overline{B}(T) = \inf_{\overline{\tau} \in \overline{\mathfrak{M}}_T} \frac{1}{T} \int_0^\infty \overline{\mathbf{E}}_\theta(\overline{\tau} - \theta)^+ d\theta,$$

где, напомним, $x^+ = \max(x, 0)$, и

$$C(T) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \sup_{\theta \geq 0} \mathbf{E}_\theta(\tau - \theta | \tau \geq \theta), \quad \overline{C}(T) = \inf_{\overline{\tau} \in \overline{\mathfrak{M}}_T} \sup_{\theta \geq 0} \overline{\mathbf{E}}_\theta(\overline{\tau} - \theta | \overline{\tau} \geq \theta). \quad (3)$$

Величины $\int_0^\infty \mathbf{E}_\theta(\tau - \theta)^+ d\theta$ и $\int_0^\infty \overline{\mathbf{E}}_\theta(\overline{\tau} - \theta)^+ d\theta$ естественно интерпретировать как (обобщенные) байесовские риски для моментов τ и $\overline{\tau}$, характеризующие запаздывание в обнаружении момента появления разладки, когда в роли априорного распределения для θ берется (как «наихудшее») «равномерное» распределение на $[0, \infty)$.

Отыскание величин $B(T)$ и $\overline{B}(T)$, а также соответствующих оптимальных моментов, если они существуют, будем называть задачами о разладке в «*вариантах* (В) и ($\overline{B}$)» соответственно.

Величины $C(T)$ и $\overline{C}(T)$, определенные в (3), являются минимаксными рисками. Их отыскание и отыскание соответствующих оптимальных или ε -оптимальных моментов останковки будем называть задачами о разладке в «*вариантах* (С) и ($\overline{C}$)».

1.4. Изложим кратко результаты, которые были получены в [11] для вариантов (В) и (С). Это даст лучшее понимание того, зачем (в вариантах ($\overline{B}$) и ($\overline{C}$)) приходится привлекать к рассмотрению рандомизированные моменты останковки.

Ключевую роль при решении задачи о разладке в варианте (В) играет процесс $\psi = (\psi_t)_{t \geq 0}$, построенный по наблюдаемому процессу $X = (X_t)_{t \geq 0}$ как решение стохастического дифференциального уравнения

$$d\psi_t = dt + \frac{\mu}{\sigma^2} \psi_t dX_t, \quad \psi_0 = 0, \quad (4)$$

и допускающий представление

$$\psi_t = \int_0^t \frac{L_t}{L_\theta} d\theta, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

где

$$L_t = \frac{d(\mathbf{P}_0 | \mathcal{F}_t^X)}{d(\mathbf{P}_\infty | \mathcal{F}_t^X)}, \quad \mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t).$$

Хорошо известно (см., например, [4]), что в модели (1)

$$L_t = \exp \left\{ \frac{\mu}{\sigma^2} X_t - \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\sigma^2} t \right\}.$$

По формуле Ито

$$dL_t = \frac{\mu}{\sigma^2} L_t dX_t, \quad L_0 = 1.$$

То, что процесс $(\psi_t)_{t \geq 0}$, задаваемый формулой (5), является решением уравнения (4), проверяется применением формулы Ито к произведению $L_t \int_0^t (1/L_\theta) d\theta$, $t \geq 0$.

В дальнейшем будем предполагать, что μ и σ таковы, что «отношение сигнал/шум» $\rho = \mu^2/(2\sigma^2)$ равно единице.

Это предположение упрощает приводимые далее формулы и в то же время не является ограничением, поскольку все рассматриваемые характеристики $(B(T), \bar{B}(T), \dots)$ зависят от μ и σ только через «отношение сигнал/шум» ρ и пересчет формул от случая $\rho = 1$ на общий случай произвольных значений $\rho > 0$ не представляет трудностей (см. [11]).

Следующее предположение резюмирует полученные в [11] результаты в варианте (В).

Предложение 1. I. Для всякого $T > 0$

(a) выполнено равенство

$$B(T) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \frac{1}{T} \mathbf{E}_\infty \int_0^T \psi_t dt; \quad (6)$$

(b) $\inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T}$ в (6) достигается на моменте

$$\tau_T^* = \inf\{t \geq 0: \psi_t \geq T\}$$

(и, тем самым, этот момент является оптимальным в классе $\mathfrak{M}_T$ в варианте (В));

(c) выполнено равенство

$$B(T) = F(T^{-1}) - \Delta(T^{-1}), \quad (7)$$

где для всякого $b > 0$

$$F(b) = e^b(-\text{Ei}(-b)), \quad \Delta(b) = 1 - b \int_0^\infty e^{-bu} \frac{\ln(1+u)}{u} du \quad (8)$$

$u - \text{Ei}(-b) = \int_b^\infty t^{-1} e^{-t} dt$ — интегральная показательная функция.

II. При малых и больших T

$$B(T) = \begin{cases} \frac{T}{2} + O(T^2), & T \rightarrow 0, \\ \ln T - (1 + \mathbb{C}) + O(T^{-1} \ln^2 T), & T \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (9)$$

где $\mathbb{C} = 0.577 \dots$ — константа Эйлера.

1.5. Для изложения результатов в варианте (С) заметим, прежде всего, что если $\tau \in \mathfrak{M}_T$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^\infty \mathbf{E}_\theta(\tau - \theta)^+ d\theta &= \frac{1}{T} \int_0^\infty \mathbf{E}_\theta(\tau - \theta \mid \tau \geq \theta) \mathbf{P}_\theta\{\tau \geq \theta\} d\theta \\ &= \frac{1}{T} \int_0^\infty \mathbf{E}_\theta(\tau - \theta \mid \tau \geq \theta) \mathbf{P}_\infty\{\tau \geq \theta\} d\theta, \end{aligned} \quad (10)$$

поскольку $\{\tau \geq \theta\} \in \mathcal{F}_\theta^X$, а для событий $A \in \mathcal{F}_\theta^X$ и любого $\theta > 0$ вероятность $\mathbf{P}_\theta(A)$ та же самая, что и вероятность $\mathbf{P}_\infty(A)$.

Из (10) и равенств $T^{-1} \int_0^\infty \mathbf{P}_\infty\{\tau \geq \theta\} d\theta = T^{-1} \mathbf{E}_\infty \tau = 1$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^\infty \mathbf{E}_\theta(\tau - \theta)^+ d\theta &\leq \frac{1}{T} \int_0^\infty \left\{ \sup_{\theta \geq 0} \mathbf{E}_\theta(\tau - \theta \mid \tau \geq \theta) \right\} \mathbf{P}_\infty(\tau \geq \theta) d\theta \\ &= \sup_{\theta \geq 0} \mathbf{E}_\theta(\tau - \theta \mid \tau \geq \theta). \end{aligned} \quad (11)$$

Следовательно, $\inf_{\tau \in \mathcal{M}_T} T^{-1} \int_0^\infty \mathbf{E}_\theta(\tau - \theta)^+ d\theta \leq \inf_{\tau \in \mathcal{M}_T} \sup_{\theta} \mathbf{E}_\theta(\tau - \theta \mid \tau \geq \theta)$, т.е.

$$B(T) \leq C(T), \quad (12)$$

что и дает для величины $C(T)$ оценку снизу. Объединяя эту оценку и оценку сверху $C(T) \leq F(T^{-1}) (= C^*(T))$, полученную в [11], можно сформулировать следующий результат.

Предложение 2. В варианте (С) для величины $C(T)$ справедливы следующие неравенства:

$$F(T^{-1}) - \Delta(T^{-1}) \leq C(T) \leq F(T^{-1}).$$

При этом для малых T

$$\frac{T}{2} + O(T^2) \leq C(T) \leq T + O(T^2),$$

а для больших T

$$\ln T - (1 + \mathbb{C}) + O(T^{-1} \ln^2 T) \leq C(T) \leq \ln T - \mathbb{C} + O(T^{-1} \ln^2 T). \quad (13)$$

Из формулы (13) видно, что при больших T (а именно этот случай представляет основной интерес в задачах наискорейшего обнаружения) минимаксный риск $C(T)$ ведет себя как $\ln T$ (в том смысле, что $C(T)/\ln T \rightarrow 1$, $T \rightarrow \infty$; асимптотика первого порядка), в то же время вторые члены (а именно, $-(1 + \mathbb{C})$ и $-\mathbb{C}$) отличаются на единицу. Следующие же члены стремятся к нулю как $O(T^{-1} \ln^2 T)$, $T \rightarrow \infty$.

1.6. Основная цель настоящей работы состоит в том, чтобы ликвидировать «зазор» во вторых членах в левой и правой частях неравенств (13). Это оказывается возможным, если вместо $C(T)$ рассматривать меньшую величину $\overline{C}(T)$, являющуюся минимаксным риском (см. (3)) по классу $\overline{\mathcal{M}}_T$ рандомизированных моментов остановки. (Отметим, что в задачах скорейшего обнаружения для случая *дискретного времени* рандомизированные моменты остановки рассматривались в [20].) Как следует из приводимых далее результатов, при больших T выполнены неравенства

$$\ln T - (1 + \mathbb{C}) + O(T^{-1} \ln^2 T) \leq \overline{C}(T) \leq \ln T - (1 + \mathbb{C}) + O(T^{-1} \ln^2 T). \quad (14)$$

Из (14) видно, что для $\overline{C}(T)$ имеет место асимптотика второго порядка

$$\overline{C}(T) = \ln T - (1 + \mathbb{C}) + O(T^{-1} \ln^2 T), \quad T \rightarrow \infty,$$

из которой, конечно, следует (более грубая) асимптотика

$$\frac{\overline{C}(T)}{\ln T - (1 + \mathbb{C})} \rightarrow 1, \quad T \rightarrow \infty.$$

2. О методе получения оценок сверху и снизу для $\overline{C}(T)$

2.1. По аналогии с (12) получаем неравенство $\overline{B}(T) \leq \overline{C}(T)$.

Для $B(T)$ справедливо представление (4), и аналогичное представление (тем же самым методом, что и в [11]) получаем для $\overline{B}(T)$:

$$\overline{B}(T) = \inf_{\bar{\tau} \in \overline{\mathcal{M}}_T} \frac{1}{T} \overline{\mathbf{E}}_\infty \int_0^{\bar{\tau}} \psi_t(\bar{\omega}) dt \quad \text{при всех } T > 0,$$

где $\psi_t(\bar{\omega}) = \psi_t(\omega)$ для $\bar{\omega} = (\omega, \tilde{\omega})$.

Относительно меры $\mathbf{P}_\infty$ процесс $\psi = (\psi_t(\omega))_{t \geq 0}$ является диффузионным марковским процессом с дифференциалом

$$d\psi_t(\omega) = dt + \frac{\mu}{\sigma} \psi_t(\omega) dB_t(\omega), \quad \psi_0(\omega) = 0.$$

Из общей теории оптимальных правил остановки для марковских процессов следует, что

$$\overline{B}(T) = B(T). \quad (15)$$

Иначе говоря, взятие инфимума в (6) не по классу $\mathcal{M}_T$, а по более широкому классу $\overline{\mathcal{M}}_T$ рандомизированных моментов ничего нового не дает. (По поводу того, что в марковских задачах об оптимальной остановке $\inf_{\tau \in \mathcal{M}_T}$ совпадает с $\inf_{\bar{\tau} \in \overline{\mathcal{M}}_T}$, см. [8, гл. II, § 7, с. 100].) С учетом приведенного неравенства $\overline{B}(T) \leq \overline{C}(T)$ и формулы (7), из (15) получаем нижнюю оценку для $\overline{C}(T)$: при всех $T > 0$

$$F(T^{-1}) - \Delta(T^{-1}) \leq \overline{C}(T). \quad (16)$$

2.2. Чтобы получить верхнюю оценку для $\overline{C}(T)$, воспользуемся следующими соображениями.

Ясно, что для конкретного момента $\bar{\tau}^*$ из $\overline{\mathcal{M}}_T$ справедливо неравенство

$$\overline{C}(T) \leq \sup_{\theta \geq 0} \overline{\mathbf{E}}_\theta(\bar{\tau}^* - \theta \mid \bar{\tau}^* \geq \theta). \quad (17)$$

Тем самым, имея в виду отмеченное в п. 1.1 желание уменьшить «зазор» между верхней и нижней оценками, надо подобрать конкретный момент $\bar{\tau}^* \in \overline{\mathcal{M}}_T$ так, чтобы значение $\sup_{\theta} \overline{\mathbf{E}}_\theta(\bar{\tau}^* - \theta \mid \bar{\tau}^* \geq \theta)$ было как

можно ближе к значению $\overline{B}(T)$ ($= B(T)$). Как станет ясно из дальнейшего, приводимый ниже момент $\overline{\tau}_{g_A}^*$ из класса $\overline{\mathcal{M}}_T$ со специально подобранным значением $A = A(T)$, «почти» удовлетворяет желаемому свойству уменьшения «зазора», по крайней мере для больших значений T .

Момент $\overline{\tau}_{g_A}^*$ строится следующим образом. Пусть $\psi^* = (\psi_t^*(\overline{\omega}))_{t \geq 0}$ — процесс со стохастическим дифференциалом

$$d\psi_t^*(\overline{\omega}) = dt + \frac{\mu}{\sigma^2} \psi_t^*(\overline{\omega}) dX_t(\overline{\omega}), \quad (18)$$

$\mathbb{L}_\infty$ — сопряженный инфинитезимальный оператор (см. [4]) процесса $\psi = (\psi_t)_{t \geq 0}$ с дифференциалом $d\psi_t = dt + (\mu/\sigma) \psi_t dB_t$, $\psi_0 = 0$ ($\rho \equiv \mu^2/(2\sigma^2) = 1$). Очевидно, что $\mathbb{L}_\infty = \partial^2(y^2 \cdot)/\partial y^2 - \partial/\partial y$. Обозначим через $g_A(y)$, $0 \leq y \leq A$, плотность распределения вероятностей, удовлетворяющую при $0 \leq y < A$ уравнению

$$\mathbb{L}_\infty g_A = 0, \quad (19)$$

граничному условию $g_A(A) = 0$ и условию нормировки $\int_0^A g_A(y) dy = 1$.

Возьмем начальное значение $\psi_0^*(\overline{\omega})$ процесса $\psi^* = (\psi_t^*(\overline{\omega}))_{t \geq 0}$ случайным, не зависящим от броуновского движения $B(\overline{\omega}) = (B_t(\omega, \tilde{\omega}))_{t \geq 0}$ ($B_t(\omega, \tilde{\omega}) = B_t(\omega)$, $t \geq 0$) и с таким распределением вероятностей $G_A(y) = \overline{\mathbf{P}}\{\psi_0^*(\overline{\omega}) \leq y\}$, $y \in [0, A]$, что $G_A(y) = \int_0^y g_A(x) dx$. Положим

$$\overline{\tau}_{g_A}^* = \inf\{t \geq 0: \psi_t^*(\overline{\omega}) \geq A\}. \quad (20)$$

В силу неравенства (17) и предполагаемой *независимости* начального значения $\psi_0^*(\overline{\omega})$ от броуновского движения $B = (B_t(\overline{\omega}))_{t \geq 0}$ получаем, что для момента $\overline{\tau}_{g_A}^*$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \overline{C}(T) &\leq \sup_{\theta} \overline{\mathbf{E}}_{\theta}(\overline{\tau}_{g_A}^* - \theta \mid \overline{\tau}_{g_A}^* \geq \theta) \\ &= \sup_{\theta} \int_0^A \mathbf{E}_{\theta}(\tau_A^{(y)}(\omega) - \theta \mid \tau_A^{(y)}(\omega) \geq \theta) g_A(y) dy \\ &\leq \int_0^A \sup_{\theta} \{\mathbf{E}_{\theta}(\tau_A^{(y)}(\omega) - \theta \mid \tau_A^{(y)}(\omega) \geq \theta)\} g_A(y) dy \\ &= \int_0^A \mathbf{E}_0 \tau_A^{(y)}(\omega) g_A(y) dy = \overline{\mathbf{E}}_0 \overline{\tau}_{g_A}^*, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\tau_A^{(y)}(\omega) = \inf\{t \geq 0: \psi_t^{(y)}(\omega) \geq A\}, \quad d\psi_t^{(y)}(\omega) = dt + \frac{\mu}{\sigma^2} \psi_t^{(y)}(\omega) dX_t(\omega)$$

с $\psi_0^{(y)} = y$, $0 \leq y \leq A$ (первое равенство в (21) следует из доказательства теоремы 3.1 статьи [11]).

Тем самым, для $\overline{C}(T)$ при всех $T > 0$ имеем следующие оценки сверху и снизу:

$$F(T^{-1}) - \Delta(T^{-1}) \leq \overline{C}(T) \leq \overline{\mathbf{E}}_0 \overline{\tau}_{g_A}^*, \quad (22)$$

где порог $A = A(T)$ должен выбираться из тех соображений, что $\bar{\tau}_{g_A}^* \in \bar{\mathcal{M}}_T$, т.е. так, что $\bar{\mathbf{E}}_\infty \bar{\tau}_{g_A}^* = T$.

Итак,

$$\bar{\mathbf{E}}_0 \bar{\tau}_{g_A}^* = \int_0^A \mathbf{E}_0 \tau_A^{(y)}(\omega) g_A(y) dy, \quad \bar{\mathbf{E}}_\infty \bar{\tau}_{g_A}^* = \int_0^A \mathbf{E}_\infty \tau_A^{(y)}(\omega) g_A(y) dy. \quad (23)$$

Таким образом, для отыскания верхней границы $\bar{\mathbf{E}}_0 \bar{\tau}_{g_A}^*$ в (22) необходимо прежде всего найти рандомизирующее распределение $G_A = G_A(y)$, $0 \leq y \leq A$, с плотностью $g_A(y)$ и затем найти $\bar{\mathbf{E}}_\infty \bar{\tau}_{g_A}^*$, что и будет сделано в разделах 3 и 4.

3. Нахождение рандомизирующей плотности g_A

3.1. Плотность $g_A = g_A(y)$, $0 \leq y \leq A$, ищется как неотрицательное решение уравнения (19), подчиняющееся граничному условию $g_A(A) = 0$ и условию нормировки $\int_0^A g_A(y) dy = 1$. В следующей лемме дается явная формула для этой плотности.

Лемма 1. Плотность $g_A = g_A(y)$, $0 \leq y \leq A$, задается формулой

$$g_A(y) = f(y) \frac{h(A) - h(y)}{A}, \quad (24)$$

где

$$f(y) = y^{-2} e^{1/y}, \quad h(y) = y e^{1/y} - \text{Ei}(y^{-1}), \quad (25)$$

и интегральная показательная функция $-\text{Ei}(z)$ определяется следующим образом (см. [2]):

$$-\text{Ei}(z) = \begin{cases} \int_{-z}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, & z < 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_{-z}^{-\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right], & z > 0. \end{cases} \quad (26)$$

(Если $z > 0$, то $-\text{Ei}(-z) = \int_z^{\infty} t^{-1} e^{-t} dt$, что уже встречалось в предложении 1.)

Доказательство. Зафиксируем $A > 0$ и вместо g_A будем писать g . Производя в (19) интегрирование, находим, что $g = (y^2 g)' + C_1$, откуда

$$g' = g(y^{-2} - 2y^{-1}) - C_1 y^{-2}. \quad (27)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$g(y) = f(y) u(y), \quad (28)$$

где $f(y) = y^{-2} e^{-1/y}$. Тогда

$$g'(y) = (f(y) u(y))' = f(y) u(y) (y^{-2} - 2y^{-1}) + f(y) u'(y). \quad (29)$$

Из (27) и (28) получаем, что

$$g'(y) = f(y) u(y)(y^{-2} - 2y^{-1}) - C_1 y^{-2}. \quad (30)$$

Сравнивая это выражение с (29), находим, что $f(y) u'(y) = -C_1/y^2$. Отсюда $u'(y) = -C_1 e^{1/y}$ и, значит,

$$\begin{aligned} u(y) &= C_2 - C_1 \int_0^y e^{1/z} dz = C_2 + C_1 \int_{\infty}^{1/y} \frac{e^t}{t^2} dt = C_2 - C_1 \int_{1/y}^{\infty} \frac{e^t}{t^2} dt \\ &= C_2 + C_1 [-ye^{1/y} + \text{Ei}(y^{-1})]. \end{aligned}$$

Тем самым для $g(y) = f(y) u(y)$ получаем, что

$$g(y) = C_1 [-y^{-1} + f(y) \text{Ei}(y^{-1})] + C_2 f(y). \quad (31)$$

Определим константы C_1 и C_2 из условий $g(A) = 0$ и $\int_0^A g(y) dy = 1$. С этой целью обозначим

$$I_1 = \int_0^A [-y^{-1} + f(y) \text{Ei}(y^{-1})] dy, \quad I_2 = \int_0^A f(y) dy.$$

Тогда условие $\int_0^A g(y) dy = 1$ примет вид $C_1 I_1 + C_2 I_2 = 1$. Найдём I_1 и I_2 .

Имеем

$$I_1 = \int_0^A [-y^{-1} + y^{-2} \text{Ei}(y^{-1}) e^{-1/y}] dy. \quad (32)$$

Известно (см. 8.212.2 в [2]), что $\text{Ei}(z) = e^z (z^{-1} + \int_0^{\infty} (z-t)^{-2} e^{-t} dt)$ для $z > 0$. Значит,

$$y^{-2} \text{Ei}(y^{-1}) e^{-1/y} = y^{-1} + y^{-2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{(1/y - t)^2}$$

и из (32) находим, что

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^A \frac{1}{y^2} \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(1/y - t)^2} dt \right] dy = \int_0^{\infty} e^{-t} \left[\int_0^A \frac{dy}{(1 - yt)^2} \right] dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} \left[\int_0^A \frac{dy}{(1/t - y)^2} \right] dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} \left(\frac{1}{1/t - A} - \frac{1}{1/t} \right) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1/A - t} dt. \end{aligned}$$

Воспользовавшись здесь известной формулой

$$\text{Ei}(\pm xy) = \pm e^{\pm xy} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{y \mp t} dt, \quad \text{Re } y > 0, \quad x > 0 \quad (33)$$

(см. [2, 8.212.5]), получаем, что $I_1 = e^{-1/A} \text{Ei}(A^{-1})$.

Для I_2 имеем:

$$I_2 = \int_0^A f(y) dy = \int_0^A y^{-2} e^{-1/y} dy = e^{-1/A}.$$

Тем самым, условие $C_1 I_1 + C_2 I_2 = 1$ (т.е. условие $\int_0^A g(y) dy = 1$) принимает вид $C_1 e^{-1/A} \text{Ei}(A^{-1}) + C_2 e^{-1/A} = 1$, а условие $g(A) = 0$ превращается в условие $C_1(-Ae^{1/A} + \text{Ei}(A^{-1})) + C_2 = 0$.

Из этих двух равенств находим, что $C_1 = A^{-1}$, $C_2 = e^{1/A} - \text{Ei}(A^{-1}) A^{-1}$, и формула (31) преобразуется к требуемому виду (24). Лемма 1 доказана.

3.2. Обозначим через $Q_A(y)$ такую вероятностную меру на множестве $[0, A]$, что для процесса $\psi^* = (\psi_t^*(\bar{\omega}))_{t \geq 0}$ со стохастическим дифференциалом (18) и случайным начальным значением $\psi_0^*(\bar{\omega})$, не зависящим от броуновского движения $B(\bar{\omega}) = (B_t(\omega, \tilde{\omega}))_{t \geq 0}$ (где $B_t(\omega, \tilde{\omega}) = B_t(\omega)$, $t \geq 0$) и распределенным по мере $Q_A(y)$ (т.е. $\bar{\mathbf{P}}\{\psi_0^*(\bar{\omega}) \leq y\} = Q_A(y)$, $y \in [0, A]$), при всех $t > 0$ выполняется равенство

$$\bar{\mathbf{P}}_\infty(\psi_t^*(\bar{\omega}) \leq y | \psi_s^*(\bar{\omega}) < A, s \leq t) = Q_A(y). \quad (34)$$

Как известно (см., например, [9], [10], [13]–[18], [23]), распределение $Q_A(y)$, $y \in [0, A]$, для начального состояния $\psi_0^*(\bar{\omega})$ со свойством (34) принято называть *квазистационарным*.

Согласно результатам статьи [9] (см. также [10], [14], [17], [23]), квазистационарное распределение $Q_A(y)$ имеет плотность $q_A(y)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\mathbb{L}_\infty q_A(y) = -\lambda_1 q_A(y), \quad y \in [0, A], \quad (35)$$

где $\mathbb{L}_\infty = \partial^2(y^2 \cdot) / \partial y^2 - \partial / \partial y$ — сопряженный инфинитезимальный оператор процесса $\psi = (\psi_t)_{t \geq 0}$ с дифференциалом $d\psi_t = dt + (\mu/\sigma) \psi_t dB_t$, $\psi_0 = 0$ ($\rho \equiv \mu^2/(2\sigma^2) = 1$), а $\lambda_1 = \lambda_1(A) > 0$ — наименьшее собственное число оператора $\mathbb{L}_\infty$ (в рассматриваемом случае этот оператор будет иметь чисто дискретный спектр). При этом плотность $q_A(y)$ должна удовлетворять граничным условиям $q_A(A) = 0$, $q'_A(A) = -A^{-2}e^{1-1/A}$ и условию нормировки $\int_0^A q_A(y) dy = 1$.

Согласно результатам работ [9], [18],

$$\lim_{A \rightarrow \infty} Q_A(y) = Q_\infty(y), \quad y > 0, \quad (36)$$

где $Q_\infty(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}_\infty\{\psi_t \leq y\}$, $y > 0$, является *стационарным* (инвариантным) распределением процесса $\psi = (\psi_t)_{t \geq 0}$ (определение процесса см. выше). При этом стационарное распределение $Q_\infty(y)$ также имеет плотность $q_\infty(y)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\mathbb{L}_\infty q_\infty(y) = 0, \quad y > 0, \quad (37)$$

с граничным условием $\lim_{y \rightarrow \infty} \{(y^2 q_\infty(y))' - q_\infty(y)\} = 0$, а также условию нормировки $\int_0^\infty q_\infty(y) dy = 1$ (см. также [11], [19]). Таким образом, из формул (35)–(37) следует, что $\lim_{A \rightarrow \infty} \lambda_1(A) = 0$. Поэтому при $A \rightarrow \infty$ решение $q_A(y)$ уравнения (35) можно разложить по степеням $\lambda_1(A)$ как по малому параметру, т.е. представить $q_A(y)$ в виде ряда $q_A(y) = q_A^0(y) + \lambda_1(A)q_A^1(y) + \dots$, $y \in [0, A]$, где функции $q_A^0(y)$ и $q_A^1(y)$ удовлетворяют уравнениям

$$\mathbb{L}_\infty q_A^0(y) = 0, \quad \mathbb{L}_\infty q_A^1(y) = -q_A^0(y), \quad y \in [0, A],$$

граничным условиям $q_A^0(A) = 0$ и $q_A^1(A) = 0$, условиям нормировки $\int_0^A q_A^0(y) dy = 1$ и $\int_0^A q_A^1(y) dy = 0$ соответственно. Таким образом, плотность $g_A(y) (\equiv q_A^0(y))$ рандомизирующего распределения $G_A(y)$ является ничем иным, как нулевым членом в разложении плотности квазистационарного распределения $Q_A(y)$ по степеням собственного числа $\lambda_1(A) \rightarrow 0$ сопряженного инфинитезимального оператора $\mathbb{L}_\infty$ процесса $\psi = (\psi_t)_{t \geq 0}$ при $A \rightarrow \infty$.

Заметим, что из разложения $q_A(y)$ по степеням $\lambda_1(A)$ при $A \rightarrow \infty$ и условия $q'_A(A) = -A^{-2}e^{1-1/A}$ следует асимптотика

$$\lambda_1(A) = 6eA^{-1} + O(A^{-2}), \quad A \rightarrow \infty.$$

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что если бы для момента $\bar{\tau}_{g_A}^*$ из (20) начальное значение процесса $\psi^* = (\psi_t^*(\bar{\omega}))_{t \geq 0}$ рандомизировалось не с помощью распределения $G_A(y)$, а с помощью квазистационарного распределения $Q_A(y)$, то в силу (34) было бы выполнено равенство (ср. с (21))

$$\sup_\theta \bar{\mathbb{E}}_\theta(\bar{\tau}_{g_A}^* - \theta \mid \bar{\tau}_{g_A}^* \geq \theta) = \bar{\mathbb{E}}_0 \bar{\tau}_{g_A}^*, \quad \theta \geq 0.$$

З а м е ч а н и е 2. Несложно подсчитать, что $q_\infty(y) = y^{-2}e^{-1/y}$, $y > 0$, т.е. для предельного распределения $Q_\infty(y) = \int_0^y q_\infty(x) dx$ получаем формулу

$$Q_\infty(y) = e^{-1/y}, \quad y > 0.$$

В статистике экстремальных значений это распределение известно под названием «распределение типа Фреше» (см. [12]).

Найденные величины $C_1 = C_1(A)$ и $C_2 = C_2(A)$ таковы, что $C_1(A) \rightarrow 0$, $C_2(A) \rightarrow 1$ при $A \rightarrow \infty$. С учетом этого из (24) находим, $\lim_{A \rightarrow \infty} g_A(y) = q_\infty(y)$, как и следовало ожидать.

4. Вычисление $\bar{\mathbb{E}}_\infty \bar{\tau}_{g_A}^*$

4.1. Согласно второму равенству в (23), для вычисления $\bar{\mathbb{E}} \bar{\tau}_{g_A}^*$ прежде всего надо найти $\mathbb{E}_\infty \tau_A^{(y)}$, где для $0 \leq y \leq A$

$$\tau_A^{(y)} = \inf\{t \geq 0: \psi_t^{(y)} \geq A\}$$

с процессом $(\psi_t^{(y)})_{t \geq 0}$, для которого

$$\psi_t^{(y)} = y + t + \frac{\mu}{\sigma} \int_0^t \psi_s^{(y)} dB_s, \quad t \geq 0. \quad (38)$$

Поскольку $\psi_{t \wedge \tau_A^{(y)}}^{(y)} \leq A$ и процесс $(\int_0^t \psi_s^{(y)} dB_s)_{t \geq 0}$ является локальным мартингалом, то $\mathbf{E}_\infty \int_0^{t \wedge \tau_A^{(y)}} \psi_s^{(y)} dB_s = 0$, и из (38) находим, что $y + \mathbf{E}_\infty(t \wedge \tau_A^{(y)}) \leq A$ для всякого $t > 0$ и, значит, $\mathbf{E}_\infty(t \wedge \tau_A^{(y)}) \leq A - y$, откуда предельным переходом по $t \rightarrow \infty$ получаем (по теореме о монотонной сходимости), что

$$\mathbf{E}_\infty \tau_A^{(y)} \leq A - y < \infty. \quad (39)$$

Из (38) и (39), применяя «первое тождество Вальда» (см. [5]) к мартингалу $(\int_0^{t \wedge \tau_A^{(y)}} \psi_s^{(y)} dB_s)_{t \geq 0}$, находим, что

$$\mathbf{E}_\infty \psi_{\tau_A^{(y)}}^{(y)} = y + \mathbf{E}_\infty \tau_A^{(y)}. \quad (40)$$

Из теоремы сравнения для стохастических дифференциальных уравнений (см. [1]) следует, что $\psi_t^{(y)} \geq L_t^{(y)}$ ($\mathbf{P}$ -п.н.), $t \geq 0$, где $L_t^{(y)}$ имеет дифференциал

$$dL_t^{(y)} = \frac{\mu}{\sigma} L_t^{(y)} dB_t, \quad L_0^{(y)} = y. \quad (41)$$

Поскольку решение уравнения (41) имеет вид

$$L_t^{(y)} = y \exp \left\{ \frac{\mu}{\sigma} B_t - \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\sigma^2} t \right\},$$

из которого следует, что при $y > 0$ процесс $L_t^{(y)}$ с вероятностью единица выходит на любой уровень $A > 0$, то заключаем, что и процесс $\psi_t^{(y)}$, $t \geq 0$, с вероятностью единица выходит на любой уровень $A > 0$. Тем самым, $\psi_{\tau_A^{(y)}}^{(y)} = A$ ($\mathbf{P}$ -п.н.) и из (40) получаем, что $\mathbf{E}_\infty \tau_A^{(y)} = A - y$ для всякого $y > 0$. (По непрерывности эта формула верна и при $y = 0$.)

Итак,

$$\bar{\mathbf{E}}_\infty \bar{\tau}_{g_A}^* = \int_0^A \mathbf{E}_\infty \tau_A^{(y)} dG_A(y) = A - \int_0^A y g_A(y) dy.$$

4.2. Согласно (24), (25),

$$g_A(y) = \frac{1}{y^2} e^{-1/y} \frac{(Ae^{1/A} - \text{Ei}(1/A)) - (ye^{1/y} - \text{Ei}(1/y))}{A}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \int_0^A y g_A(y) dy &= \left(e^{-1/A} - \frac{1}{A} \text{Ei} \left(\frac{1}{A} \right) \right) \int_0^A \frac{1}{y} e^{-1/y} dy \\ &\quad + \frac{1}{A} \int_0^A \left(-1 + \frac{1}{y} \text{Ei} \left(\frac{1}{y} \right) e^{-1/y} \right) dy. \end{aligned} \quad (42)$$

Имеем

$$J_1 \equiv \int_0^A \frac{1}{y} e^{-1/y} dy = \int_{1/A}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz = -\operatorname{Ei} \left(-\frac{1}{A} \right). \quad (43)$$

Покажем, что

$$\begin{aligned} J_2 &\equiv \int_0^A \frac{1}{y} \operatorname{Ei} \left(\frac{1}{y} \right) e^{-1/y} dy = -\operatorname{Ei} \left(-\frac{1}{A} \right) \operatorname{Ei} \left(\frac{1}{A} \right) \\ &\quad + \int_0^{\infty} e^{-z/A} \frac{\ln(1+z)}{z} dz. \end{aligned} \quad (44)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^A \frac{1}{y} \operatorname{Ei} \left(\frac{1}{y} \right) e^{-1/y} dy = \int_{1/A}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} \operatorname{Ei}(z) dz \\ &= \int_{1/A}^{\infty} \operatorname{Ei}(z) d(\operatorname{Ei}(-z)) = \operatorname{Ei}(-z) \operatorname{Ei}(z) \Big|_{1/A}^{\infty} - \int_{1/A}^{\infty} \operatorname{Ei}(-z) \frac{e^z}{z} dz. \end{aligned}$$

По правилу Лопиталя (с учетом соотношений $\lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{Ei}(-z) = 0$, $\lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{Ei}(z) = \infty$ и $(\operatorname{Ei}(-z))' = e^{-z}/z$, $(\operatorname{Ei}(z))' = e^z/z$, $z > 0$) находим, что

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{Ei}(-z) \operatorname{Ei}(z) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Ei}(z)}{(\operatorname{Ei}(-z))^{-1}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{-e^z/z}{(e^{-z}/z)(\operatorname{Ei}(-z))^{-2}} \\ &= -\lim_{z \rightarrow \infty} e^{2z} (\operatorname{Ei}(-z))^2 = -\lim_{z \rightarrow \infty} (-z^{-1} + O(z^{-2}))^2 = 0, \end{aligned} \quad (45)$$

где мы воспользовались формулой 3.2.4 из справочника [3], согласно которой $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z \operatorname{Ei}(-z) = \lim_{z \rightarrow \infty} (-z^{-1} + O(z^{-2})) = 0$.

Итак,

$$J_2 = -\operatorname{Ei} \left(-\frac{1}{A} \right) \operatorname{Ei} \left(\frac{1}{A} \right) + \int_{1/A}^{\infty} (-\operatorname{Ei}(-z)) \frac{e^z}{z} dz.$$

Далее, по формуле (33) находим

$$\int_{1/A}^{\infty} (-\operatorname{Ei}(-z)) \frac{e^z}{z} dz = \int_{1/A}^{\infty} e^{-z} \left(\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{z+t} dt \right) \frac{e^z}{z} dz = \int_0^{\infty} e^{-t} K(t) dt,$$

где $K(t) = \int_{1/A}^{\infty} [z(z+t)]^{-1} dz = t^{-1} \ln(1+At)$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} J_2 &= -\operatorname{Ei} \left(-\frac{1}{A} \right) \operatorname{Ei} \left(\frac{1}{A} \right) + \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} \ln(1+At) dt \\ &= -\operatorname{Ei} \left(-\frac{1}{A} \right) \operatorname{Ei} \left(\frac{1}{A} \right) + \int_0^{\infty} e^{-z/A} \frac{\ln(1+z)}{z} dz, \end{aligned}$$

что и дает требуемую формулу (44).

Из (42)–(44) заключаем, что

$$\begin{aligned}
 \int_0^A yg_A(y) dy &= (e^{1/A} - A^{-1} \operatorname{Ei}(A^{-1})) J_1 - 1 + A^{-1} J_2 \\
 &= -1 - (e^{1/A} - A^{-1} \operatorname{Ei}(A^{-1})) \operatorname{Ei}(-A^{-1}) \\
 &\quad + A^{-1} \left(-\operatorname{Ei}(-A^{-1}) \operatorname{Ei}(A^{-1}) + \int_0^\infty e^{-z/A} \frac{\ln(1+z)}{z} dz \right) \\
 &= e^{1/A} (-\operatorname{Ei}(-A^{-1})) - \left(1 - A^{-1} \int_0^\infty e^{-z/A} \frac{\ln(1+z)}{z} dz \right) \\
 &= F(A^{-1}) - \Delta(A^{-1}),
 \end{aligned}$$

где $F(b)$ и $\Delta(b)$ определены в (8). В [11] показано, что

$$F(A^{-1}) = e^{1/A} (-\operatorname{Ei}(-A^{-1})) = \begin{cases} A + O(A^2), & A \rightarrow 0, \\ \ln A - \mathbb{C} + O(A^{-1} \ln A), & A \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (46)$$

где $\mathbb{C} = 0.577 \dots$ — константа Эйлера, и

$$\begin{aligned}
 \Delta(A^{-1}) &= 1 - A^{-1} \int_0^\infty e^{-z/A} \frac{\ln(1+z)}{z} dz \\
 &= \begin{cases} \frac{A}{2} + O(A^2), & A \rightarrow 0, \\ 1 + O(A^{-1} \ln^2 A), & A \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (47)
 \end{aligned}$$

Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 2. Для любого $A > 0$

$$\overline{\mathbf{E}}_\infty \bar{\tau}_{g_A}^* = A - [F(A^{-1}) - \Delta(A^{-1})]. \quad (48)$$

При малых и больших значениях A

$$\overline{\mathbf{E}}_\infty \bar{\tau}_{g_A}^* = \begin{cases} \frac{A}{2} + O(A^2), & A \rightarrow 0, \\ A - \ln A + (1 + \mathbb{C}) + O(A^{-1} \ln^2 A), & A \rightarrow \infty. \end{cases}$$

4.3. Если требовать, чтобы момент $\bar{\tau}_{g_A}^*$ принадлежал классу $\overline{\mathcal{M}}_T$ с некоторым $T > 0$, то порог $A = A(T)$ следует выбирать из условия $\overline{\mathbf{E}}_\infty \bar{\tau}_{g_{A(T)}}^* = T$, т.е. в силу (48) определять из уравнения

$$A - [F(A^{-1}) - \Delta(A^{-1})] = T.$$

Из (46) и (47) нетрудно итерациями заключить, что при малых и больших T для $A(T)$ справедливы следующие асимптотики:

$$A(T) = \begin{cases} 2T + O(T^2), & T \rightarrow 0, \\ T + [\ln T - (1 + \mathbb{C}) + O(T^{-1} \ln^2 T)], & T \rightarrow \infty. \end{cases}$$

5. Вычисление $\overline{\mathbf{E}}_0 \overline{\tau}_{g_A}^*$ и оценки для $\overline{C}(T)$

5.1. Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. Для всякого $A > 0$

$$\overline{\mathbf{E}}_0 \overline{\tau}_{g_A}^* = F(A^{-1}) - \Delta(A^{-1}). \quad (49)$$

При малых и больших A

$$\overline{\mathbf{E}}_0 \overline{\tau}_{g_A}^* = \begin{cases} \frac{A}{2} + O(A^2), & A \rightarrow 0, \\ \ln A - (1 + \mathbb{C}) + O(A^{-1} \ln^2 A), & A \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Доказательство. Согласно первому равенству в (23), $\overline{\mathbf{E}}_0 \overline{\tau}_{g_A}^* = \int_0^A \mathbf{E}_0 \tau_A^{(y)} g_A(y) dy$. В [11] найдено, что $\mathbf{E}_0 \tau_A^{(y)} = F(A^{-1}) - F(y^{-1})$, где $F(b) = e^b (-\operatorname{Ei}(-b))$. Значит, $\overline{\mathbf{E}}_0 \overline{\tau}_{g_A}^* = F(A^{-1}) - \int_0^A F(y^{-1}) g_A(y) dy$.

По лемме 1

$$g_A(y) = -\frac{1}{Ay} + \frac{e^{-1/y} \operatorname{Ei}(y^{-1})}{Ay^2} + (e^{1/A} - A^{-1} \operatorname{Ei}(A^{-1})) y^{-2} e^{-1/y}.$$

Поэтому, с учетом равенства $F(y^{-1}) = e^{1/y} (-\operatorname{Ei}(-y^{-1}))$, находим:

$$\int_0^A F(y^{-1}) g_A(y) dy = -A^{-1} K_1 + A^{-1} K_2 + (e^{1/A} - A^{-1} \operatorname{Ei}(A^{-1})) K_3, \quad (50)$$

где

$$K_1 = \int_0^A \frac{1}{y} e^{1/y} (-\operatorname{Ei}(-y^{-1})) dy, \quad K_2 = \int_0^A y^{-2} \operatorname{Ei}(y^{-1}) (-\operatorname{Ei}(-y^{-1})) dy,$$

$$K_3 = \int_0^A y^{-2} (-\operatorname{Ei}(-y^{-1})) dy.$$

Аналогично подсчетам для J_2 (см. (44)) находим, что

$$K_1 = - \int_{1/A}^{\infty} \frac{e^z}{z} \operatorname{Ei}(-z) dz = \int_0^{\infty} e^{-z/A} \frac{\ln(1+z)}{z} dz.$$

Далее,

$$\begin{aligned} K_2 &= - \int_{1/A}^{\infty} \operatorname{Ei}(z) \operatorname{Ei}(-z) dz = - \int_{1/A}^{\infty} \operatorname{Ei}(z) d(\operatorname{Ei}(-z) z + e^{-z}) \\ &= - \operatorname{Ei}(z) (z \operatorname{Ei}(-z) + e^{-z}) \Big|_{1/A}^{\infty} + \int_{1/A}^{\infty} \left(e^z \operatorname{Ei}(-z) + \frac{1}{z} \right) dz. \end{aligned}$$

Аналогично (45) находим, что $\lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{Ei}(z) (z \operatorname{Ei}(-z) + e^{-z}) = 0$. Учитывая представление $e^z \operatorname{Ei}(-z) + z^{-1} = \int_0^{\infty} (z+t)^{-2} e^{-t} dt$ (см. [2, формула 8.212.3]), получаем, что

$$\int_{1/A}^{\infty} (e^z \operatorname{Ei}(-z) + z^{-1}) dz = -\operatorname{Ei}(-A^{-1}) e^{1/A}.$$

Таким образом,

$$K_2 = A^{-1} \operatorname{Ei}(A^{-1}) \operatorname{Ei}(-A^{-1}) + e^{-1/A} \operatorname{Ei}(A^{-1}) - e^{1/A} \operatorname{Ei}(-A^{-1}).$$

Наконец,

$$K_3 = \int_0^A y^{-2} (-\operatorname{Ei}(-y^{-1})) dy = - \int_{1/A}^{\infty} \operatorname{Ei}(-z) dz = A^{-1} \operatorname{Ei}(-A^{-1}) + e^{-1/A}.$$

Из (50) и полученных представлений для K_1 , K_2 и K_3 находим после простых подсчетов, что $\int_0^A F(y^{-1}) g_A(y) dy = \Delta(A^{-1})$ и, значит,

$$\bar{\mathbf{E}}_0 \bar{\tau}_{g_A}^* = F(A^{-1}) - \int_0^A F(A^{-1}) g_A(y) dy = F(A^{-1}) - \Delta(A^{-1}).$$

Лемма 3 доказана.

5.2. Из (16), очевидной оценки $\bar{C}(T) \leq \bar{\mathbf{E}}_0 \bar{\tau}_{g_A}^*$, где $A = A(T)$ выбирается так, чтобы было выполнено равенство $\bar{\mathbf{E}}_{\infty} \bar{\tau}_{g_{A(T)}}^* = T$, и лемм 2 и 3 получаем следующий основной результат настоящей работы.

Теорема. При любом $T > 0$ минимаксный риск

$$\bar{C}(T) = \inf_{\bar{\tau} \in \bar{\mathcal{M}}_T} \sup_{\theta \geq 0} \mathbf{E}_{\theta}(\bar{\tau} - \theta \mid \bar{\tau} \geq \theta)$$

допускает следующие оценки сверху и снизу:

$$F(T^{-1}) - \Delta(T^{-1}) \leq \bar{C}(T) \leq F(A^{-1}) - \Delta(A^{-1}) (= \bar{C}^*(T)), \quad (51)$$

где $A = A(T)$ является корнем уравнения

$$A - [F(A^{-1}) - \Delta(A^{-1})] = T.$$

При малых T

$$\frac{T}{2} + O(T^2) \leq \bar{C}(T) \leq T + O(T^2). \quad (52)$$

При больших T

$$\bar{C}(T) = \ln T - (1 + \mathbb{C}) + O(T^{-1} \ln^2 T), \quad (53)$$

где $\mathbb{C} = 0.577 \dots$ — константа Эйлера.

Рис. 1. Графики $C^*(T)$ — оценки сверху и $B(T)$ — оценки снизу минимаксного риска $C(T)$

Рис. 2. Графики $\bar{C}^*(T)$ — оценки сверху и $B(T)$ — оценки снизу минимаксного риска $\bar{C}(T)$

Доказательство. Левое неравенство в (52) следует из того, что $B(T) \leq \bar{C}(T)$ и $B(T) = T/2 + O(T^2)$ (см. (9)). Правое неравенство в (52) вытекает из (51) и того, что при малых A функция $F(A^{-1}) - \Delta(A^{-1}) = B(A)$ ведет себя как $A/2 + O(A^2)$, а значит, в силу (47) при $A = A(T)$ и малых T

$$\bar{C}(T) \leq A(T) - \frac{A(T)}{2} + O(A^2(T)) = 2T - \frac{2T}{2} + O(T^2) = T + O(T^2).$$

Для доказательства (53) заметим, что, как было показано, $B(T) \leq \bar{C}(T) \leq \bar{E}_0 \bar{\tau}_{g_{A(T)}}^*$. При больших T из (9) находим

$$B(T) = \ln T - 1 - \mathbb{C} + O(T^{-1} \ln^2 T). \quad (54)$$

В силу (49)

$$\bar{E}_0 \bar{\tau}_{g_{A(T)}}^* = F\left(\frac{1}{A(T)}\right) - \Delta\left(\frac{1}{A(T)}\right) = B(A(T)).$$

При $T \rightarrow \infty$

$$A(T) = T + [\ln T - 1 - \mathbb{C} + O(T^{-1} \ln^2 T)]$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{E}_0 \bar{\tau}_{g_{A(T)}}^* &= B(A(T)) = \ln A(T) - (1 + \mathbb{C}) + O(T^{-1} \ln^2 A(T)) \\ &= \ln T - (1 + \mathbb{C}) + O(T^{-1} \ln^2 T). \end{aligned} \quad (55)$$

Из (54), (55) и (51) получаем требуемую асимптотику (53) для больших T . Теорема доказана.

На рис. 1 изображены графики $C^*(T)$ — оценки сверху и $B(T)$ — оценки снизу минимаксного риска $C(T)$. На рис. 2 изображены графики $\bar{C}^*(T)$ — оценки сверху и $B(T)$ — оценки снизу минимаксного риска $\bar{C}(T)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986, 445 с.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1971, 1108 с.
3. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.–Л.: Физматгиз, 1963, 358 с.
4. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, 696 с.
5. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986, 512 с.
6. Ширяев А. Н. Задача скорейшего обнаружения нарушения стационарного режима. — Докл. АН СССР, 1961, т. 138, № 5, с. 1039–1042.
7. Ширяев А. Н. Об оптимальных методах в задачах скорейшего обнаружения. — Теория вероятн. и ее примен., 1963, т. 8, в. 1, с. 26–51.
8. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1969, 231 с.
9. Cattiaux P., Collet P., Lambert A., Martínez S., Méléard S., San Martín J. Quasi-stationary distributions and diffusion models in population dynamics. arxiv: math/0703781v1
10. Collet P., Martínez S., San Martín J. Asymptotic laws for one-dimensional diffusions conditioned to nonabsorption. — Ann. Probab., 1995, v. 23, № 3, p. 1300–1314.
11. Feinberg E. A., Shiryaev A. N. Quickest detection of drift change for Brownian motion in generalized Bayesian and minimax settings. — Statist. Decisions, 2006, v. 24, p. 445–470.
12. Kotz S., Nadarajah S. Extreme Value Distributions. London: Imperial College Press, 2000, 187 p.
13. Lladser M., San Martín J. Domain of attraction of the quasi-stationary distributions for the Ornstein–Uhlenbeck process. — J. Appl. Probab., 2000, v. 37, № 2, p. 511–520.
14. Mandl P. Spectral theory of semi-groups connected with diffusion processes and its application. — Czechoslovak Math. J., 1961, v. 11, № 4, p. 558–569.
15. Martínez S., San Martín J. Classification of killed one-dimensional diffusions. — Ann. Probab., 2004, v. 32, № 1A, p. 530–552.
16. Martínez S., San Martín J. Quasi-stationary distributions for a Brownian motion with drift and associated limit laws. — J. Appl. Probab., 1994, v. 31, № 4, p. 911–920.
17. Pinsky R. On the convergence of diffusion processes conditioned to remain in a bounded region for large time to limiting positive recurrent diffusion processes. — Ann. Probab., 1985, v. 13, № 2, p. 363–378.
18. Pollak M., Siegmund D. Convergence of quasi-stationary to stationary distributions for stochastically monotone Markov processes. — J. Appl. Probab., 1986, v. 23, № 1, p. 215–220.
19. Pollak M., Siegmund D. A diffusion process and its applications to detecting a change in the drift of Brownian motion. — Biometrika, 1985, v. 72, № 2, p. 267–280.
20. Pollak M. Optimal detection of a change in distribution. — Ann. Statist., 1985, v. 13, № 1, p. 206–227.
21. Ширяев А. Н. От «разладки» к нелинейной фильтрации и теории мартингалов. — Математические события XX века. М.: ФАЗИС, 2003, с. 491–518.
22. Shiryaev A. N. Quickest detection problems in the technical analysis of the financial data. — Mathematical Finance — Bachelier Congress (Paris, 2000). Berlin: Springer, 2002, p. 487–521.
23. Steinsaltz D., Evans S. N. Quasistationary distributions for one-dimensional diffusions with killing. — Trans. Amer. Math. Soc., 2007, v. 359, № 3, p. 1285–1324.