Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Урусов, Об одном свойстве момента достижения максимума броуновским движением и некоторых задачах оптимальной остановки, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 1, 184–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp245>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 14:10:21

Таблица 1

α	оценка Δ	оценка $ \tilde{\Delta}_N $
0.30	$3.640 \cdot 10^{-10}$	$3.628 \cdot 10^{-20}$
0.35	$3.704 \cdot 10^{-8}$	$4.059 \cdot 10^{-16}$
0.40	$1.176 \cdot 10^{-6}$	$4.376 \cdot 10^{-13}$
0.45	$1.720 \cdot 10^{-5}$	$9.926 \cdot 10^{-11}$
0.50	$1.463 \cdot 10^{-4}$	$7.567 \cdot 10^{-9}$
0.55	$8.395 \cdot 10^{-4}$	$2.612 \cdot 10^{-7}$
0.60	$3.589 \cdot 10^{-3}$	$4.983 \cdot 10^{-6}$
0.65	$1.227 \cdot 10^{-2}$	$6.035 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2

α	оценка отклонения
0.15	$4.395 \cdot 10^{-11}$
0.20	$4.820 \cdot 10^{-8}$
0.25	$3.134 \cdot 10^{-6}$
0.30	$4.984 \cdot 10^{-5}$
0.35	$3.553 \cdot 10^{-4}$
0.40	$1.538 \cdot 10^{-3}$
0.45	$4.788 \cdot 10^{-3}$
0.50	$1.187 \cdot 10^{-2}$

В заключении мы выражаем благодарность профессорам Г. И. Ивченко, В. Ф. Колчину, В. В. Сенатову и Д. М. Чибисову за их замечания, способствовавшие улучшению работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hill T. P. A statistical derivation of the significant-digit law. — Statist. Sci., 1995, v. 10, № 4, p. 354–363.
2. Kanter M. Stable densities under change of scale and total variation inequalities. — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 4, p. 697–707.
3. Raimi R. A. The first digit problem. — Amer. Math. Monthly, 1976, v. 83, № 7, p. 521–538.
4. Золотарев В. М. Преобразования Меллина–Стилтьеса в теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1957, т. 11, в. 4, с. 444–468.
5. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983, 304 с.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
7. Абрамовитц М., Стиган И. (ред.) Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979, 830 с.
8. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983, 750 с.

Поступила в редакцию
20.1.2004

© 2004 г.

УРУСОВ М. А.*

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ МОМЕНТА ДОСТИЖЕНИЯ МАКСИМУМА БРОУНОВСКИМ ДВИЖЕНИЕМ И НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКИ

Пусть $B = (B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ — стандартное броуновское движение, выходящее из нуля, и пусть θ — момент достижения им своего максимума, т.е. $B_\theta = \max_{0 \leq t \leq 1} B_t$. Обозначим $(\mathcal{F}_t^B)_{0 \leq t \leq 1}$ фильтрацию, порожденную B . Доказывается, что для любого $(\mathcal{F}_t^B)$ -момента остановки τ ($0 \leq \tau \leq 1$) имеет место равенство

$$\mathbf{E}(B_\theta - B_\tau)^2 = \mathbf{E}|\theta - \tau| + \frac{1}{2}.$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва. Россия; e-mail: urusov@mech.math.msu.su

Отсюда и из результатов работы [1] мгновенно вытекает, что оптимальный момент остановки τ_* в задаче оптимальной остановки

$$\inf_{\tau} \mathbf{E}|\theta - \tau|$$

имеет следующий вид:

$$\tau_* = \inf\{0 \leq t \leq 1: S_t - B_t \geq z_* \sqrt{1-t}\},$$

где $S_t = \max_{0 \leq s \leq t} B_s$, z_* — единственный положительный корень уравнения $4\Phi(z) - 2z\varphi(z) - 3 = 0$, $\varphi(z)$ и $\Phi(z)$ — соответственно плотность и функция распределения стандартной нормальной случайной величины. Решены задачи оптимальной остановки

$$\inf_{\tau \in \mathcal{M}_\alpha} \mathbf{E}(\tau - \theta)^+ \quad \text{и} \quad \inf_{\tau \in \mathcal{N}_\alpha} \mathbf{E}(\tau - \theta)^-,$$

где $\mathcal{M}_\alpha = \{\tau: \mathbf{E}(\tau - \theta)^- \leq \alpha\}$, а $\mathcal{N}_\alpha = \{\tau: \mathbf{E}(\tau - \theta)^+ \leq \alpha\}$. Оптимальные моменты остановки в них также имеют описанный выше вид (с другими z_*).

Ключевые слова и фразы: момент достижения максимума, броуновское движение, оптимальная остановка.

1. Свойство момента достижения максимума. Пусть $B = (B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ — стандартное броуновское движение, выходящее из нуля, и пусть θ — момент достижения им своего максимума, т.е. $B_\theta = \max_{0 \leq t \leq 1} B_t$ (такой момент θ определен п.н. однозначно). Обозначим через $(\mathcal{F}_t^B)_{0 \leq t \leq 1}$ фильтрацию, порожденную процессом B .

Лемма 1. Для любого $(\mathcal{F}_t^B)$ -момента остановки τ ($0 \leq \tau \leq 1$) имеет место равенство

$$\mathbf{E}(B_\theta - B_\tau)^2 = \mathbf{E}|\theta - \tau| + \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Доказательство. 1) В процессе доказательства основного результата в [1] авторы устанавливают, что

$$\mathbf{E}(B_\theta - B_\tau)^2 = 1 + \mathbf{E} \int_0^\tau \left(4\Phi\left(\frac{S_t - B_t}{\sqrt{1-t}}\right) - 3 \right) dt, \quad (2)$$

где $S = (S_t)_{0 \leq t \leq 1}$ — процесс максимума для B , т.е. $S_t = \max_{0 \leq s \leq t} B_s$, а $\Phi(x)$ — функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

Для полноты изложения приведем доказательство формулы (2). Имеем

$$\mathbf{E}(B_\theta - B_\tau)^2 = \mathbf{E}(S_1 - B_\tau)^2 = \mathbf{E}S_1^2 - 2\mathbf{E}(S_1 B_\tau) + \mathbf{E}B_\tau^2. \quad (3)$$

Известно (см. [4, с. 93]), что случайная величина S_1 допускает интегральное представление

$$S_1 = \mathbf{E}S_1 + \int_0^1 H_t dB_t$$

с $H_t = 2 - 2\Phi((S_t - B_t)/\sqrt{1-t})$, $0 \leq t \leq 1$. Поэтому

$$\mathbf{E}(S_1 B_\tau) = \mathbf{E} \left[\left(\int_0^1 H_t dB_t \right) \left(\int_0^\tau dB_t \right) \right] = \mathbf{E} \int_0^\tau H_t dt. \quad (4)$$

Ясно также, что $\mathbf{E}B_\tau^2 = \mathbf{E}\tau$. Поскольку случайная величина S_1 распределена как модуль стандартной нормальной случайной величины, то $\mathbf{E}S_1^2 = 1$. Отсюда и из (3) и (4) вытекает (2).

2) Определим процесс $\pi_t = \mathbf{P}(\theta \leq t | \mathcal{F}_t^B)$, $0 \leq t \leq 1$. Имеем

$$\pi_t = \mathbf{P}(\theta \leq t | \mathcal{F}_t^B) = \mathbf{P}\left(S_t \geq \max_{t \leq s \leq 1} B_s \mid \mathcal{F}_t^B\right) = \mathbf{P}\left(S_t - B_t \geq \max_{t \leq s \leq 1} (B_s - B_t) \mid \mathcal{F}_t^B\right).$$

Поскольку случайная величина $S_t - B_t$ $\mathcal{F}_t^B$ -измерима, а $\max_{t \leq s \leq 1} (B_s - B_t)$ не зависит от σ -алгебры $\mathcal{F}_t^B$, то последняя условная вероятность разна значению функции распределения случайной величины $\max_{t \leq s \leq 1} (B_s - B_t)$ в точке $S_t - B_t$. Следовательно,

$$\pi_t = 2\Phi\left(\frac{S_t - B_t}{\sqrt{1-t}}\right) - 1, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (5)$$

Далее, $|\theta - \tau| = (\tau - \theta)^+ + \theta - \tau \wedge \theta = \theta + \int_0^\tau (I(\theta \leq t) - I(\theta > t)) dt = \theta + \int_0^\tau (2I(\theta \leq t) - 1) dt$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|\theta - \tau| &= \frac{1}{2} + \mathbf{E} \int_0^\tau (2I(\theta \leq t) - 1) dt = \frac{1}{2} + \mathbf{E} \int_0^1 (2I(\theta \leq t) - 1) I(\tau > t) dt \\ &= \frac{1}{2} + \mathbf{E} \int_0^1 \mathbf{E}(2I(\theta \leq t) - 1 \mid \mathcal{F}_t^B) I(\tau > t) dt = \frac{1}{2} + \mathbf{E} \int_0^\tau (2\pi_t - 1) dt. \end{aligned}$$

Согласно (5),

$$\mathbf{E}|\theta - \tau| = \frac{1}{2} + \mathbf{E} \int_0^\tau \left(4\Phi\left(\frac{S_t - B_t}{\sqrt{1-t}}\right) - 3 \right) dt. \quad (6)$$

Наконец, из (2) и (6) вытекает утверждение леммы.

З а м е ч а н и я. (i) Обозначим через $L = (L_t)_{0 \leq t \leq 1}$ локальное время броуновского движения B в нуле и положим $g = \sup\{0 \leq t \leq 1: B_t = 0\}$. Тогда для любого $(\mathcal{F}_t^{|B|})$ -момента остановки τ ($0 \leq \tau \leq 1$) имеет место равенство

$$\mathbf{E}(L_g - L_\tau + |B_\tau|)^2 = \mathbf{E}|g - \tau| + \frac{1}{2}.$$

Это вытекает из леммы 1, одинаковой распределенности процессов B и $L - |B|$ и совпадения фильтраций, порожденных процессами $|B|$ и $L - |B|$ (см. [3, гл. VI, (2.2)]).

(ii) В формуле (1) θ не является $(\mathcal{F}_t^B)$ -моментом остановки. Возникает вопрос о справедливости аналогичного утверждения, в котором рассматриваются два момента остановки.

Пусть $B = (B_t)_{t \geq 0}$ — стандартное броуновское движение, выходящее из нуля. Тогда для любых $(\mathcal{F}_t^B)$ -моментов остановки σ и τ таких, что $\mathbf{E}\sigma < \infty$ и $\mathbf{E}\tau < \infty$, имеет место равенство $\mathbf{E}(B_\sigma - B_\tau)^2 = \mathbf{E}|\sigma - \tau|$. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(B_\sigma - B_\tau)^2 &= \mathbf{E}B_\sigma^2 + \mathbf{E}B_\tau^2 - 2\mathbf{E}\left[\left(\int_0^\sigma dB_t\right)\left(\int_0^\tau dB_t\right)\right] \\ &= \mathbf{E}\sigma + \mathbf{E}\tau - 2\mathbf{E}(\sigma \wedge \tau) = \mathbf{E}|\sigma - \tau|. \end{aligned}$$

2. Остановка броуновского движения наиболее близко к моменту достижения максимума. Рассматриваемая в этом пункте задача — найти $(\mathcal{F}_t^B)$ -момент остановки τ_* , который наиболее близок к θ в некотором смысле (или такой, что B_{τ_*} наиболее близко к $B_\theta = \max_{0 \leq t \leq 1} B_t$ в некотором смысле). Если процесс B описывает движение цен акций на некотором отрезке времени, то финансовая мотивация такой постановки следующая: мы хотим, последовательно наблюдая цены акций, продать акции в момент τ_* , как можно более близкий к точке максимума θ (мы не можем продать акции в момент θ , поскольку этот момент не определяется по последовательным наблюдениям за ценами).

Первый результат в этом направлении был установлен в работе С. Э. Граверсена, Г. Пешкира и А. Н. Ширяева [1]. Авторы решили задачу

$$\inf_{\tau} \mathbf{E} \left(\max_{0 \leq t \leq 1} B_t - B_\tau \right)^2, \quad (7)$$

где инфимум берется по $(\mathcal{F}_t^B)$ -моментам остановки τ ($0 \leq \tau \leq 1$). Дальнейшие результаты можно найти в [2, гл. VIII] и в [5].

Рассмотрим задачу оптимальной остановки

$$\inf_{\tau} \mathbf{E}|\tau - \theta|. \quad (8)$$

Ввиду леммы 1, оптимальный момент остановки в (8) совпадает с оптимальным моментом остановки в (7). Таким образом, из результатов [1] немедленно вытекает следующая теорема.

Теорема 1. В задаче (8) существует единственный оптимальный момент остановки τ_* , и он имеет следующий вид:

$$\tau_* = \inf\{0 \leq t \leq 1: S_t - B_t \geq z_* \sqrt{1-t}\},$$

где $S_t = \max_{0 \leq s \leq t} B_s$, z_* — единственный положительный корень уравнения $4\Phi(z) - 2z\varphi(z) - 3 = 0$, $\varphi(z)$ и $\Phi(z)$ — соответственно плотность и функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

З а м е ч а н и я. (i) Используя свойство самоподобия броуновского движения, получаем, что оптимальный момент остановки в постановке (8), рассматриваемой на отрезке времени $[0, T]$, имеет вид $\tau_* = \inf\{0 \leq t \leq T: S_t - B_t \geq z_* \sqrt{T-t}\}$ с тем же самым z_* .

(ii) Цены акций положительны, а броуновское движение принимает отрицательные значения. Поэтому если речь идет о финансовой мотивации постановки (8), то хотелось бы решить аналогичную задачу для положительного процесса X вместо броуновского движения B (например, для $X = e^B$). Поскольку в (8) участвуют только моменты времени (но не значения процессов), то при $X = f(B)$, где f — непрерывная строго возрастающая функция, решение такой задачи немедленно вытекает из теоремы 1.

3. Условно экстремальная постановка. В этом пункте решены две следующие условно экстремальные задачи:

$$\inf_{\tau \in \mathcal{M}_\alpha} \mathbf{E}(\tau - \theta)^+ \quad (9)$$

и

$$\inf_{\tau \in \mathcal{N}_\alpha} \mathbf{E}(\tau - \theta)^-, \quad (10)$$

где классы $(\mathcal{F}_t^B)$ -моментов остановки $\mathcal{M}_\alpha$ и $\mathcal{N}_\alpha$ определяются формулами $\mathcal{M}_\alpha = \{0 \leq \tau \leq 1: \mathbf{E}(\tau - \theta)^- \leq \alpha\}$ и $\mathcal{N}_\alpha = \{0 \leq \tau \leq 1: \mathbf{E}(\tau - \theta)^+ \leq \alpha\}$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, а также используются обозначения $x^+ = x \vee 0$ и $x^- = -(x \wedge 0)$.

Если мы выбрали правило остановки τ , а наша цель — остановиться в момент, «близкий к θ », то $(\tau - \theta)^+$ интерпретируется как штраф за опоздание (равный времени запаздывания), а $(\tau - \theta)^-$ — как штраф за раннюю остановку (равный времени от момента ранней остановки до θ). Тогда постановка (9) означает, что мы минимизируем средний штраф за опоздание в классе правил остановки, для которых средний штраф за раннюю остановку не превосходит α . Аналогично интерпретируется постановка (10).

Теорема 2. Для любого $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ в задаче (9) существует единственный оптимальный момент остановки τ_* , и он имеет вид

$$\tau_* = \inf\{0 \leq t \leq 1: S_t - B_t \geq z_* \sqrt{1-t}\}, \quad (11)$$

где $S_t = \max_{0 \leq s \leq t} B_s$, а положительное число z_* однозначно определяется из условия

$$\mathbf{E}(\tau_* - \theta)^- = \alpha. \quad (12)$$

(См. также замечание (i) в конце работы.)

Теорема 3. Для любого $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ в задаче (10) существует единственный оптимальный момент остановки τ_* , и он имеет вид (11), где положительное число z_* однозначно определяется из условия

$$\mathbf{E}(\tau_* - \theta)^+ = \alpha. \quad (13)$$

(См. также замечание (i) в конце работы.)

Для решения (9) и (10) используем «метод множителей Лагранжа». Этот метод предписывает для каждого $c > 0$ решить задачу

$$\inf_{\tau} \mathbf{E}[(\tau - \theta)^- + c(\tau - \theta)^+], \quad (14)$$

где инфимум берется по $(\mathcal{F}_t^B)$ -моментам остановки τ ($0 \leq \tau \leq 1$). Решение задачи (14) является предметом следующей леммы. Затем приводится доказательство теоремы 2, доказательство теоремы 3 проводится аналогично.

Лемма 2. Для любого $c > 0$ в постановке (14) существует единственный оптимальный момент остановки τ_* , и он имеет вид $\tau_* = \inf\{0 \leq t \leq 1: S_t - B_t \geq z_c \sqrt{1-t}\}$, где z_c — единственный положительный корень уравнения

$$(2c+2)\Phi(z) - (c+1)z\varphi(z) - (c+2) = 0, \quad (15)$$

$\varphi(z)$ и $\Phi(z)$ — соответственно плотность и функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

Доказательство. 1) Рассуждая так же, как в части 2) доказательства леммы 1, получаем, что

$$\mathbf{E}[(\tau - \theta)^- + c(\tau - \theta)^+] = \frac{1}{2} + \mathbf{E} \int_0^{\tau} F\left(\frac{S_t - B_t}{\sqrt{1-t}}\right) dt,$$

где $F(x) = (2c+2)\Phi(x) - (c+2)$. Известно (см. [3, гл. VI, (2.3), (2.12)]), что процессы $S - B$ и $|B|$ одинаково распределены, а также что фильтрации, порожденные процессами B и $S - B$, совпадают. Поэтому (14) сводится к задаче

$$\inf_{\tau} \mathbf{E} \int_0^{\tau} F\left(\frac{|B_t|}{\sqrt{1-t}}\right) dt, \quad (16)$$

где инфимум берется по $(\mathcal{F}_t^{|B|})$ -моментам остановки τ ($0 \leq \tau \leq 1$). Далее мы решим (16) в предположении, что инфимум берется по $(\mathcal{F}_t^B)$ -моментам остановки. Окажется, что оптимальный момент является $(\mathcal{F}_t^{|B|})$ -моментом остановки. Тем самым, задача (16) будет решена и для случая, когда инфимум берется по $(\mathcal{F}_t^{|B|})$ -моментам остановки.

Рассмотрим детерминированную замену времени $\rho_s = 1 - e^{-2s}$, $s \geq 0$, переводящую $\mathbf{R}_+$ в $[0, 1]$. Положим $Z_s = B_{\rho_s}/\sqrt{1-\rho_s} = e^s B_{\rho_s}$, $s \geq 0$. Очевидно, что $\mathcal{F}_s^Z = \mathcal{F}_{\rho_s}^B$, $s \geq 0$. Согласно формуле Ито, процесс Z удовлетворяет уравнению

$$dZ_s = Z_s ds + \sqrt{2} d\beta_s, \quad (17)$$

где $\beta_s = \int_0^s \frac{1}{\sqrt{2}} e^u dB_{\rho_u}$, $s \geq 0$. Процесс β есть $(\mathcal{F}_s^Z)$ -броуновское движение, так как это непрерывный локальный мартингал, выходящий из нуля, с $\langle \beta \rangle_s = s$.

Очевидно, что σ — $(\mathcal{F}_s^Z)$ -момент остановки ($0 \leq \sigma \leq \infty$) тогда и только тогда, когда ρ_{σ} — $(\mathcal{F}_t^B)$ -момент остановки ($0 \leq \rho_{\sigma} \leq 1$). Поскольку

$$\int_0^{\rho_{\sigma}} F\left(\frac{|B_t|}{\sqrt{1-t}}\right) dt = 2 \int_0^{\sigma} e^{-2s} F(|Z_s|) ds,$$

то (16) сводится к задаче

$$\inf_{\sigma} \mathbf{E} \int_0^{\sigma} e^{-2s} F(|Z_s|) ds, \quad (18)$$

где инфимум берется по $(\mathcal{F}_s^Z)$ -моментам остановки σ ($0 \leq \sigma \leq \infty$).

2) Рассмотрим семейство мер $(\mathbf{P}_z)_{z \in \mathbf{R}}$ такое, что относительно меры $\mathbf{P}_z$ процесс Z удовлетворяет уравнению (17) с начальным условием $Z_0 = z$. Положим

$$V_*(z) = \inf_{\sigma} \mathbf{E}_z \int_0^{\sigma} e^{-2s} F(|Z_s|) ds \quad (19)$$

($V_*(0)$ отвечает интересующей нас задаче (18)). Естественно ожидать, что оптимальный момент остановки в (19) имеет вид

$$\sigma_* = \inf\{s \geq 0: |Z_s| \geq z_c\}, \quad (20)$$

где z_c — некоторый положительный порог (который следует найти). Отметим, что $|Z_s| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, поэтому $\sigma_* < \infty$ $\mathbf{P}_z$ -п.н. Для нахождения функции цены $V_*(z)$ и порога z_c сформулируем следующую задачу Стефана (см. [6, гл. III, § 8]):

$$(L_Z - 2)V(z) = -F(|z|), \quad |z| < z_c, \quad (21)$$

$$V(\pm z_c) = 0, \quad (22)$$

$$V'(\pm z_c) = 0, \quad (23)$$

где L_Z — инфинитезимальный оператор процесса Z . Из (17) следует, что

$$L_Z = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Из (19) и (17) следует, что функция $V_*(z)$ четна. Поэтому вместо (21)–(23) будем решать задачу

$$V''(z) + zV'(z) - 2V(z) = (c+2) - (2c+2)\Phi(z), \quad z \in (0, z_c), \quad (24)$$

с граничными условиями $V(z_c) = V'(z_c) = V'(0) = 0$.

Общее решение задачи (24) дается формулой

$$V(z) = C_1(1+z^2) + C_2[z\varphi(z) + (1+z^2)\Phi(z)] + (c+1)\Phi(z) - \frac{c+2}{2},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Из условия $V'(0) = 0$ находим, что $C_2 = -(c+1)/2$. Из условия $V'(z_c) = 0$ находим, что $C_1 = (c+1)\Phi(z_c)/2$. Из условия $V(z_c) = 0$ получаем, что z_c должно удовлетворять уравнению (15). Наконец, легко проверить, что для любого $c > 0$ уравнение (15) имеет единственный положительный корень.

3) Пусть z_c — единственный положительный корень уравнения (15). Положим

$$V(z) = \begin{cases} \frac{c+1}{2}\Phi(z_c)(1+z^2) - \frac{c+1}{2}[z\varphi(z) + (1+z^2)\Phi(z)] \\ \quad + (c+1)\Phi(z) - \frac{c+2}{2}, & \text{если } 0 \leq z \leq z_c; \\ 0, & \text{если } z > z_c, \end{cases}$$

и доопределим $V(z)$ на $\mathbf{R}$ как четную функцию. Докажем, что заданная таким образом функция $V(z)$ совпадает с функцией цены $V_*(z)$ в задаче (19), а также что момент остановки σ_* , определенный в (20), является оптимальным в этой задаче.

Ясно, что $V \in C^1(\mathbf{R}) \cap C^2(\mathbf{R} \setminus \{-z_c, z_c\})$. По формуле Ито (относительно меры $\mathbf{P}_z$)

$$e^{-2s}V(Z_s) = V(z) + \int_0^s e^{-2u}(L_Z - 2)V(Z_u)du + M_s,$$

где $M_s = \int_0^s e^{-2u}V'(Z_u)\sqrt{2}d\beta_u$ — $(\mathcal{F}_s^Z)$ -локальный мартингал. Поскольку функция $V'(z)$ ограничена, то $[M]_\infty \leq \text{const} < \infty$. Из неравенств Буркхольдера–Дэвиса–Ганди вытекает, что M — равномерно интегрируемый мартингал, откуда $\mathbf{E}M_\sigma = 0$ для любого $(\mathcal{F}_s^Z)$ -момента остановки σ ($0 \leq \sigma \leq \infty$). Следовательно, для любого $(\mathcal{F}_s^Z)$ -момента остановки σ

$$V(z) = \mathbf{E}_z[e^{-2\sigma}V(Z_\sigma)] - \mathbf{E}_z \int_0^\sigma e^{-2u}(L_Z - 2)V(Z_u)du \leq \mathbf{E}_z \int_0^\sigma e^{-2u}F(|Z_u|)du, \quad (25)$$

поскольку, как легко проверить, $V(z) < 0$ при $z \in (-z_c, z_c)$, а также $(L_Z - 2)V(z) \geq -F(|z|)$ при $z \in \mathbf{R} \setminus \{-z_c, z_c\}$. При этом единственным моментом остановки, для которого в (25) имеет место равенство, является момент σ_* , определенный в (20).

Итак, мы доказали, что функция $V(z)$ совпадает с функцией цены $V_*(z)$ в задаче (19) и что σ_* — единственный оптимальный момент остановки. Возвращаясь к исходной постановке задачи (14), получаем утверждение леммы.

З а м е ч а н и е. Нетрудно установить, что z_c как функция от $c \in (0, \infty)$ строго убывает, непрерывна, $\lim_{c \downarrow 0} z_c = \infty$ и $\lim_{c \rightarrow \infty} z_c = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Положим

$$\tau(z) = \inf\{0 \leq t \leq 1: S_t - B_t \geq z\sqrt{1-t}\}, \quad f(z) = \mathbf{E}(\tau(z) - \theta)^-.$$

Легко проверить, что функция $f(z)$, $z \in (0, \infty)$, не возрастает, непрерывна, $\lim_{z \downarrow 0} f(z) = \frac{1}{2}$ и $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Поэтому найдется $z_* > 0$ такое, что $f(z_*) = \alpha$. В силу свойств z_c как функции от $c \in (0, \infty)$ найдется $c_* > 0$ такое, что $z_* = z_{c_*}$. Тогда из леммы 2 следует, что $\tau(z_*)$ — единственный оптимальный момент остановки в постановке (9).

Наконец, если бы нашлось $z_{**} > 0$ такое, что $f(z_{**}) = \alpha$ и $z_{**} \neq z_*$, то $\tau(z_{**})$ был бы единственным оптимальным моментом остановки в задаче (9). Это противоречит тому, что $\tau(z_*)$ — единственный оптимальный момент остановки в этой задаче. Поэтому условие (12) однозначно определяет положительное число z_* .

З а м е ч а н и я. (i) Для нахождения оптимальных моментов остановки в задачах (9) и (10) требуется решить относительно z_* уравнения (12) и (13). Поэтому хотелось бы найти детерминированный алгоритм вычисления функций

$$f(z) = \mathbf{E}(\tau(z) - \theta)^- \quad \text{и} \quad g(z) = \mathbf{E}(\tau(z) - \theta)^+,$$

где

$$\tau(z) = \inf\{0 \leq t \leq 1: S_t - B_t \geq z\sqrt{1-t}\}.$$

В работе [5] доказывается, что для любого $\lambda > 0$ уравнение

$$2(\lambda + 1)u \left(\Phi(u) - \frac{1}{2} \right) - [(\lambda + 1)u^2 + 1]\varphi(u) - u = 0$$

имеет единственный положительный корень u_λ , а также что u_λ как функция от $\lambda \in (0, \infty)$ строго убывает, непрерывна, $\lim_{\lambda \downarrow 0} u_\lambda = \infty$ и $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} u_\lambda = 0$. Опять используя результаты [5], можно установить, что для любого $z > 0$

$$g(z) = \frac{1}{\lambda} \left[-\frac{\varphi(z)}{z} + \lambda \left(\Phi(z) - \frac{1}{2} \right) - \frac{2 - 2\Phi(z)}{1 + z^2} \right],$$

где $\lambda > 0$ таково, что $u_\lambda = z$. В свою очередь, из доказательства леммы 2 вытекает, что для любого $z > 0$

$$f(z) = (c + 1)\Phi(z) - \frac{c}{2} - 1 - cg(z),$$

где $c > 0$ таково, что $z_c = z$.

(ii) Рассмотрим «граничные» случаи $\alpha = 0$ и $\alpha = \frac{1}{2}$ в задачах (9) и (10). Нетрудно установить, что в постановке (9) при $\alpha = 0$ единственным оптимальным моментом остановки является $\tau_* \equiv 1$, а при $\alpha = \frac{1}{2}$ единственным оптимальным моментом является $\tau_* \equiv 0$. Аналогичное справедливо и для постановки (10).

Справедливы также замечания, аналогичные замечаниям к теореме 1.

Автор благодарен А. Н. Ширяеву за постановку задач и важные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Graversen S. E., Peskir G., Shiryaev A. N.* Stopping Brownian motion without anticipation as close as possible to its ultimate maximum. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, в. 45, т. 1, с. 125–136.
2. *Pedersen J. L.* Some results on optimal stopping and Skorokhod embedding with applications. PhD Thesis. Aarhus: Department of Mathematical Sciences, University of Aarhus, 2000.
3. *Revuz D., Yor M.* Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin: Springer-Verlag, 1994, 560 p.
4. *Rogers L. C. G., Williams D.* Diffusions, Markov Processes, and Martingales. V. 2: Itô Calculus. New York: Wiley, 1987, 475 p.
5. *Урусов М. А.* Об оптимальном прогнозе момента достижения максимума броуновским движением. — Успехи матем. наук, 2002, т. 57, в. 1, с. 165–166.
6. *Ширяев А. Н.* Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976, 272 с.

Поступила в редакцию
11.XII.2003