Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Каменов, Башелье-версия русского опциона на конечном интервале, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 3, 576–587

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2451>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 13:23:44

© 2008 г.

КАМЕНОВ А. А.*

**БАШЕЛЬЕ-ВЕРСИЯ РУССКОГО ОПЦИОНА
НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ**

Рассматривается задача об оптимальной остановке для русского опциона в модели Башелье в случае конечного временного горизонта. Получено интегральное уравнение, решение которого дает границу между областями остановки и продолжения наблюдений. Найдено асимптотическое поведение данной границы вблизи 0 и на бесконечности.

Ключевые слова и фразы: русский опцион, модель Башелье, теория оптимальной остановки, интегральное уравнение, генератор процесса, асимптотическое поведение цены.

1. Термин «русский опцион» был впервые введен Л. Шеппом и А. Н. Ширяевым в работе [1]. В случае бесконечного временного горизонта оптимальное правило остановки формулируется просто: необходимо остановиться, как только разность (в случае модели Башелье) или отношение (в случае модели Блэка–Шоулса) максимума цены актива до настоящего момента и текущей цены достигнет определенного значения.

В том случае если временной горизонт конечен (иными словами, если остановка наблюдений должна произойти не позже некоторого момента времени T), задача несколько усложняется. Как показано (для случая модели Блэка–Шоулса) в работах [2] и [4], оптимально останавливаться тогда, когда указанное отношение достигает некоторой границы, непрерывно зависящей от времени. Данная работа посвящена исследованию вида этой кривой для модели Башелье.

В п. 2 получено явное интегральное уравнение, решение которого и дает нам искомую кривую. Хотя это уравнение и возможно решить численно, оно достаточно сложно и найти решение в явном виде не представляется возможным. Более того, из этого уравнения не удастся даже получить асимптотическое поведение искомой кривой в нуле и на бесконечности. Асимптотика кривой вблизи нуля находится аналогично американскому опциону — рассуждения очень похожи на рассуждения в работе [4] и приводятся здесь скорее для полноты изложения. В случае же асимптотики на бесконечности, хотя используется та же главная

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: kamenov@cnt.ru

идея, что и в [5], сами рассуждения значительно отличаются от проведенных в этой работе.

2. Предположим, что динамика цен $(\hat{X}_t)_{t \geq 0}$ некоторого финансового актива описывается моделью Башелье:

$$\hat{X}_t = \mu t + B_t, \quad (1)$$

где $B = (B_t)_{t \geq 0}$ — стандартное броуновское движение.

Рассматривается задача об оптимальной остановке для платежного поручения

$$\hat{V}_T = \sup_{\tau \leq T} \mathbf{E} \left[\max_{u \leq \tau} \hat{X}_u - c\tau \right], \quad (2)$$

здесь и далее τ предполагается моментом остановки относительно $(\mathcal{F}_t^B)$, где $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, s \leq t)$, а $c \geq 0$.

Теорема 1. *Оптимальным моментом остановки в задаче (2) является момент первого выхода процесса $\max_{u \leq t} \hat{X}_u - \hat{X}_t$ на кривую $b(t)$, являющуюся решением интегрального уравнения*

$$\mathbb{A}(t, T, b(t)) = b(t) + (c - \mu)(T - t) - c \int_0^{T-t} \mathbb{B}(t, u, b(t), b(t+u)) du,$$

где $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — операторы, явный вид которых указан в (8).

Доказательство. Поскольку процесс $\max_{u \leq t} \hat{X}_u$ марковским не является и для марковости надо рассматривать процесс $(\hat{X}_t, \max_{u \leq t} \hat{X}_u)$, то поставленная задача двумерна. Тем не менее, как показывает следующая лемма, ее можно свести к одномерной.

Лемма 1. *Имеет место представление $\hat{V}_T = \sup_{\tau \leq T} \mathbf{E} G(X_\tau, \tau)$, где $\text{Law}(X_t; t \leq T) = \text{Law}(\max_{u \leq t} \hat{X}_u - \hat{X}_t; t \leq T)$ и $G(x, t) = x - (c - \mu)t$, $x \geq 0$.*

Доказательство леммы 1. Воспользуемся тем, что $\max_{u \leq t} \hat{X}_u - ct = (\max_{u \leq t} \hat{X}_u - \hat{X}_t) + (\hat{X}_t - ct)$ и, значит,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\max_{u \leq \tau} \hat{X}_u - c\tau \right] &= \mathbf{E} \left[\max_{u \leq \tau} \hat{X}_u - \hat{X}_\tau \right] + \mathbf{E} \left[\hat{X}_\tau - c\tau \right] \\ &= \mathbf{E} \left(\left[\max_{u \leq \tau} \hat{X}_u - \hat{X}_\tau \right] + (\mu - c)\tau \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Обозначим $c - \mu = r$ и используем тот факт (доказанный в [2]), что

$$\text{Law} \left(\max_{u \leq t} \hat{X}_u - \hat{X}_t; t \leq T \right) = \text{Law}(|Y_t^\mu|; t \leq T), \quad (4)$$

где $Y^\mu = (Y_t^\mu)_{t \leq T}$ — это «бэнг-бэнг» процесс, заданный стохастическим дифференциальным уравнением

$$dY_t^\mu = -\mu \text{sign } Y_t^\mu dt + dB_t.$$

Из соотношений (2)–(4) можно заключить, что достаточно рассматривать новую задачу

$$V_T = \sup_{\tau \leq T} \mathbf{E} [|Y_\tau^\mu| - r\tau]. \quad (5)$$

При этом, очевидно, $V_T = \hat{V}_T$.

Процесс $|Y^\mu|$ есть отраженное броуновское движение со сносом: $|Y^\mu| = \text{RBM}(-\mu) = X$, где процесс X определяется инфинитезимальным генератором $\mathbb{L}_X = -\mu f' + \frac{1}{2} f''$ с $f'(0+) = 0$. Таким образом, (5) можно записать как $V_T = \sup_{\tau \leq T} \mathbf{E} G(X_\tau, \tau)$, где $G(x, t) = x - rt$, $x \geq 0$. Лемма 1 доказана.

Итак, исходная задача сведена к одномерной. Теперь рассмотрим последовательность задач

$$V(t, x) = \sup_{0 \leq \tau \leq T-t} \mathbf{E}_{t,x} G(X_{t+\tau}, t + \tau), \quad (6)$$

где $\mathbf{E}_{t,x}$ обозначает условное математическое ожидание $\mathbf{E}(\cdot | X_t = x)$.

По формуле Ито $dX_t = d|Y_t^\mu| = -\mu dt + \text{sign } Y_t^\mu dB_t + dL^0(Y^\mu)_t$ (здесь L^0 обозначает локальное время Леви процесса в нуле) и, следовательно, $V(t + s, X_{t+s})$ равно

$$\begin{aligned} V(t, X_t) + \int_0^s \left[\left(V'_t - \mu V'_x + \frac{1}{2} V''_{xx} \right) (t + u, X_{t+u}) du \right. \\ \left. + V'_x(t + u, X_{t+u}) dL^0(Y^\mu)_u \right] + M_s, \end{aligned} \quad (7)$$

где $M_s = \int_0^s V'_x(t + u, X_{t+u}) \text{sign } Y_u^\mu dB_t$.

Из принципа нормального отражения следует, что при $x = 0$, т.е. в точках роста $L^0(Y^\mu)_u$ выполнено равенство $V_x(t, x) = 0$, значит, $\int_0^s V_x(t + u, X_{t+u}) dL^0(Y^\mu)_u = 0$.

Можно надеяться, что оптимальный момент остановки в задачах (6) определяется некоторой границей $b = (b(t))_{t \leq T}$, разделяющей области продолжения наблюдений $C_T = \{(t, x), t \leq T, x \geq 0: x < b(t)\}$ и остановки наблюдений $D_T = \{(t, x), t \leq T, x \geq 0: x \geq b(t)\}$. По-видимому, кривая $b = b(t)$ имеет форму, указанную на рис. 1.

Рис. 1

Предположим, что области остановки и продолжения наблюдений имеют указанный вид для некоторой убывающей функции $b(t)$. Тогда выражение (7) можно записать следующим образом:

$$V(t, X_t) + \int_0^s \left(\mathbf{I}(X_{t+u} \geq b(t+u)) \left[V'_t - \mu V'_x + \frac{1}{2} V''_{xx} \right] (t+u, X_{t+u}) + \mathbf{I}(X_{t+u} < b(t+u)) \times \left[V'_t - \mu V'_x + \frac{1}{2} V''_{xx} \right] (t+u, X_{t+u}) \right) du + M_s.$$

При этом там, где наблюдения продолжаются, т.е. там, где выполнено неравенство $X_{t+u} < b(t+u)$, имеет место $V'_t - \mu V'_x + \frac{1}{2} V''_{xx} = 0$. Действительно, двумерный процесс $Z_t = (X_t, t)$ — марковский, его генератор $\mathbb{L}_Z$ равен $\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{L}_X = \frac{\partial}{\partial t} - \mu \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Как показано в [3, гл. 3, п. 2.1], в области продолжения наблюдений имеет место равенство $\mathbb{L}_Z V = 0$, т.е., с учетом вида $\mathbb{L}_Z$, имеем $V'_t - \mu V'_x + \frac{1}{2} V''_{xx} = 0$.

Там же, где наблюдения останавливаются, выполнены равенства $V'_t - \mu V'_x + \frac{1}{2} V''_{xx} = G'_t - \mu G'_x + \frac{1}{2} G''_{xx} = -c$. Следовательно,

$$V(t+s, X_{t+s}) = V(t, X_t) - c \int_0^s \mathbf{I}(X_{t+u} \geq b(t+u)) du + M_s.$$

Положим $s = T - t$, $X_t = x$:

$$V(T, X_T) = V(t, x) - c \int_0^{T-t} \mathbf{I}(X_{t+u} \geq b(t+u)) du + M_s.$$

Беря математическое ожидание в левой и правой части, находим

$$\mathbf{E}_{t,x} V(T, X_T) = V(t, x) - c \int_0^{T-t} \mathbf{E}_{t,x} [\mathbf{I}(X_{t+u} \geq b(t+u))] du.$$

Если $x = b(t)$, то $\mathbf{E}_{t,b(t)} [X_T - rT] = V(t, b(t)) - c \int_0^{T-t} \mathbf{E}_{t,b(t)} [\mathbf{I}(X_{t+u} \geq b(t+u))] du$, или

$$\mathbf{E}_{t,b(t)} X_T = b(t) + r(T-t) - c \int_0^{T-t} \mathbf{E}_{t,b(t)} [\mathbf{I}(X_{t+u} \geq b(t+u))] du.$$

Формально, если положить

$$A(t, T, b(t)) = \mathbf{E}_{t,b(t)} X_T, \quad B(t, u, b(t), b(t+u)) = \mathbf{E}_{t,b(t)} \mathbf{I}(X_{t+u} \geq b(t+u)), \quad (8)$$

то для нахождения b необходимо решить интегральное уравнение

$$A(t, T, b(t)) = b(t) + (c - \mu)(T-t) - c \int_0^{T-t} B(t, u, b(t), b(t+u)) du. \quad (9)$$

Итак, с учетом сделанного предположения о виде оптимального правила остановки, мы доказали теорему 1. Доказательство того, что это предположение верно, приведено в следующем пункте. Сейчас рассмотрим полученное уравнение подробнее для частного случая.

Пусть $\mu = 0$, т.е. мы рассматриваем задачу

$$\hat{V}_T = \sup_{\tau \leq T} \mathbf{E} \left[\max_{u \leq \tau} B_u - c\tau \right] = \sup_{\tau \leq T} \mathbf{E} [|B_\tau| - c\tau].$$

Тогда $\mathbb{A}(t, T, b(t))$ будет равно $\mathbf{E} |B_{T-t} + b(t)| = \mathbf{E} |\sqrt{T-t}B_1 + b(t)|$, а $\mathbb{B}(t, u, b(t), b(t+u)) = \mathbf{E} \mathbf{I}(|B_u + b(t)| > b(t+u)) = \mathbf{P}\{|\sqrt{u}B_1 + b(t)| > b(t+u)\}$. Таким образом, интегральное уравнение (9) принимает вид:

$$\mathbf{E} |\sqrt{T-t}B_1 + b(t)| = b(t) + c(T-t) - c \int_0^{T-t} \mathbf{P}\{|\sqrt{u}B_1 + b(t)| > b(t+u)\} du. \quad (10)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |\sqrt{T-t}B_1 + b(t)| &= \sqrt{T-t} \mathbf{E} \left| B_1 + \frac{b(t)}{\sqrt{T-t}} \right| \\ &= \sqrt{T-t} \left[\frac{b(t)}{\sqrt{T-t}} \left(1 - 2\Phi \left(-\frac{b(t)}{\sqrt{T-t}} \right) \right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left\{ -\frac{b^2(t)}{2(T-t)} \right\} \right] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{|\sqrt{u}B_1 + b(t)| > b(t+u)\} &= 1 - \Phi \left(\frac{b(t+u) - b(t)}{\sqrt{u}} \right) \\ &\quad + \Phi \left(\frac{-b(t+u) - b(t)}{\sqrt{u}} \right). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (10), получаем

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{2}{\pi}} (T-t) \exp \left\{ -\frac{b^2(t)}{2(T-t)} \right\} - 2b(t) \Phi \left(-\frac{b(t)}{\sqrt{T-t}} \right) \\ &= c \int_0^{T-t} \left[\Phi \left(\frac{b(t+u) - b(t)}{\sqrt{u}} \right) - \Phi \left(\frac{-b(t+u) - b(t)}{\sqrt{u}} \right) \right] du. \end{aligned}$$

Для того чтобы численно решить это уравнение, преобразуем его. Введем переменную $s = T - t$ и обозначим $h(s) = b(T - s)$, тогда уравнение примет вид

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{2s}{\pi}} \exp \left\{ -\frac{h^2(s)}{2s} \right\} - 2h(s) \Phi \left(-\frac{h(s)}{\sqrt{s}} \right) \\ &= c \int_0^s \left[\Phi \left(\frac{h(s-u) - h(s)}{\sqrt{u}} \right) - \Phi \left(\frac{-h(s-u) - h(s)}{\sqrt{u}} \right) \right] du. \end{aligned}$$

В таком виде уравнение допускает приближенное решение (см. рис. 2), поскольку замена слагаемого $2h(s)\Phi(-h(s)/\sqrt{s})$ на $2h(s+\alpha)\Phi(-h(s+\alpha)/\sqrt{s+\alpha})$ приводит к тому, что значение в точке $s+\alpha$ восстанавливается по значениям на отрезке $[0, s]$.

Рис. 2. Результат численного моделирования границы $h(t)$ (приближение шагов, случай $c = 1$)

Заметим, что при $T = \infty$ решение этой задачи просто: используя тождество $\mathbf{E}\tau = \mathbf{E}B_\tau^2$, получаем $V_\infty = \sup_{\tau < \infty} \mathbf{E}[|B_\tau| - cB_\tau^2]$. Заметив, что функция $|x| - cx^2$ достигает максимума в точках $|x| = 1/(2c)$, получаем, что оптимальный момент остановки τ^* в этом случае равен $\inf\{t: |B_t| = 1/(2c)\}$ и $V_\infty = 1/(2c) - c(1/(2c))^2 = 1/(4c)$. Это позволяет проверять результаты численного моделирования, поскольку, как будет показано далее, $h(t)$ при $t \rightarrow \infty$ сходится к $1/(2c)$.

3. Теперь докажем, что момент выхода процесса X_t на границу $b(t)$ действительно оптимален в исходной задаче об оптимальной остановке. Идейно доказательство повторяет приведенное в книге [3] для случая геометрического броуновского движения, однако некоторые существенные отличия все же имеются.

Для установления некоторых свойств функции $V(t, x)$ нам понадобится ее представление через $\hat{X}_t$. Заметим, что $\mathbf{E}_{t,x}$ есть условное математическое ожидание при условии события $\{\hat{M}_t - \hat{X}_t = x\}$, где мы обозначили $\hat{M}_t = \max_{0 \leq s \leq t} \hat{X}_s$. Итак, $V(t, x) = \sup_{0 \leq \tau \leq T-t} \mathbf{E}(\hat{M}_{t+\tau} - \hat{X}_{t+\tau} - c(t+\tau) \mid \hat{M}_t - \hat{X}_t = x)$. Заметим, что данное условное математическое ожидание не зависит от $\hat{X}_t$, следовательно, его можно записать в виде $\mathbf{E}(\hat{M}_{t+\tau} - \hat{X}_{t+\tau} - c(t+\tau) \mid \hat{M}_t = x, \hat{X}_t = 0)$. Вводя процесс $\tilde{X}_t$, также являющийся броуновским движением со сносом μ и с условием $\tilde{X}_0 = 0$, получаем, что

$$\begin{aligned} V(t, x) &= -ct + \sup_{0 \leq \tau \leq T-t} \mathbf{E}(\max(\tilde{M}_\tau - \tilde{X}_\tau, x) - c\tau) \\ &= -ct + \sup_{0 \leq \tau \leq T-t} \mathbf{E}(\max(X_\tau, x) - c\tau), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\widetilde{M}_t = \max_{0 \leq s \leq t} \widetilde{X}_s$. Заметим теперь, что функция под знаком математического ожидания возрастает и выпукла вниз по x при любом τ , значит, этими же свойствами обладает и $V(t, x)$.

Лемма 2. *Функция $V: S = [0, T] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной.*

Доказательство. Воспользовавшись представлением (11) математического ожидания, получим для $x > y$:

$$\begin{aligned} V(t, x) - V(t, y) &= \sup_{0 \leq \tau \leq T-t} \mathbf{E}(\max(X_\tau, x) - c\tau) - \sup_{0 \leq \tau \leq T-t} \mathbf{E}(\max(X_\tau, y) - c\tau) \\ &\leq \sup_{0 \leq \tau \leq T-t} (\max(X_\tau, x) - \max(X_\tau, y)) \leq x - y. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, доказана равномерная непрерывность по x , и для доказательства непрерывности по паре переменных осталось доказать непрерывность по t при каждом фиксированном x . Действительно, пусть $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ и задано некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда возьмем момент остановки τ_1^ε таким, чтобы выполнялось неравенство $\mathbf{E}_{t_1, x} G(X_{t_1 + \tau_1^\varepsilon}, t_1 + \tau_1^\varepsilon) \geq V(t_1, x) - \varepsilon$. Положим $\tau_2^\varepsilon = \min(\tau_1^\varepsilon, T - t_2)$. Пользуясь очевидным неравенством $V(t_2, x) \geq \mathbf{E}_{t_2, x} G(X_{t_2 + \tau_2^\varepsilon}, t_2 + \tau_2^\varepsilon)$ и обозначая условные распределения X при условии $X_{t_1} = x$ через X^1 , а при условии $X_{t_2} = x$ через X^2 , получим

$$0 \leq V(t_1, x) - V(t_2, x) \leq \mathbf{E}(X_{t_1 + \tau_1^\varepsilon}^1 - X_{t_2 + \tau_2^\varepsilon}^2 - r(\tau_1^\varepsilon - \tau_2^\varepsilon)) + \varepsilon. \quad (13)$$

Далее, устремим сначала $t_2 - t_1$ к 0 (при этом $\tau_1^\varepsilon - \tau_2^\varepsilon \rightarrow 0$ и математическое ожидание справа также устремится к 0), а потом ε к 0. Тогда $V(t_1, x) - V(t_2, x) \rightarrow 0$, что и требовалось для доказательства непрерывности V .

Введем множество продолжения наблюдений $C = \{(t, x) \in [0, T] \times [0, \infty): V(t, x) > G(x)\}$ и множество остановки $D = \{(t, x) \in [0, T] \times [0, \infty): V(t, x) = G(x)\}$. Поскольку функции V и G непрерывны, множество C открыто, а D , соответственно, замкнуто. С помощью стандартных рассуждений, основанных на строго марковском свойстве, получим, что момент остановки $\tau_D = \inf\{0 \leq s \leq T - t: (t + s, X_{t+s}) \in D\}$ является оптимальным в задаче (6).

Покажем, что множество продолжения наблюдений C действительно задается как $C = \{(t, x): x < b(t)\}$ для некоторой убывающей функции $b(t)$.

В самом деле, предположим, что $(t, x) \in C$. Тогда, воспользовавшись неравенством (12), получим для $y < x$:

$$V(t, y) - y \geq V(t, x) - x > 0. \quad (14)$$

А значит, (t, y) также принадлежит C . Таким образом, области остановки и продолжения наблюдений разделяются графиком некоторой функции $b(t)$. То, что $b(t)$ убывающая, сразу следует из доказанного ранее убывания $V(t, x)$ по t .

Для окончательного решения поставленной задачи осталось показать, что $b(t)$ является единственным решением интегрального уравнения (9). Соответствующее доказательство в нашем случае практически не отличается от доказательства, проведенного в [3, гл. 7, п. 2.2], поэтому приводить мы его здесь не будем.

4. Заметим, что если мы позволим менять T , то $b(t, T)$ будет зависеть только от $T - t$, поэтому вместо исследования вида кривой b мы будем работать с уже введенной функцией $h(t) = b(T - t)$. Очевидно, что $h(0) = 0$ и $h(t)$ возрастает по t . Обозначим $U(t, x) = V_t(0, x) = c(T - t) + V_T(T - t, x)$.

Исследуем сначала асимптотику $b(t)$ при $t \rightarrow T$.

Теорема 2. При $t \rightarrow T$

$$b(t) = \sqrt{(T - t) \ln(T - t)^{-1}} + O(T - t).$$

Доказательство. Сразу перейдем от рассмотрения асимптотики $b(t)$ при $t \rightarrow T$ к изучению асимптотики $h(t)$ при $t \rightarrow 0$. Тогда утверждение теоремы можно сформулировать так:

$$h(t) = \sqrt{t \ln t^{-1}} + O(t). \quad (15)$$

Воспользовавшись тем, что $\text{Law}(X_t) = \text{Law}(\max_{u \leq t} \hat{X}_u - \hat{X}_t)$, напомним:

$$\mathbf{E} X_t = \mathbf{E} \left(\max_{u \leq t} \hat{X}_u - \hat{X}_t \right) = \mathbf{E} \max_{u \leq t} (\mu u + B_u) - \mu t.$$

Далее, очевидно, что $\max_{u \leq t} (\mu u + B_u) \geq \max_{u \leq t} B_u + \min_{u \leq t} \mu u$, при этом второе слагаемое равно $\min(\mu t, 0)$. Математическое ожидание максимума броуновского движения до момента t , как известно, равно $\sqrt{t\pi}/2$. Итак, получено неравенство

$$\mathbf{E} X_t \geq \sqrt{\frac{t\pi}{2}} - \mu t + \min(\mu t, 0) = \sqrt{\frac{t\pi}{2}} - \mu^+ t,$$

где $\mu^+ = \max(\mu, 0)$.

Рассмотрим функцию $W(x) = \mathbf{E}_x X_t - \mu t$, где $\mathbf{E}_x$ обозначает условное математическое ожидание при условии $X_0 = x$. Заметим, что если t мало, то $W(x) \geq W(0) > 0$ в силу найденной асимптотики для $\mathbf{E} X_t$, а значит, при достаточно малых x выполнено неравенство $W(x) > x$. При $x > h(t)$ имеем $W(x) \leq U(t, x) = x$. В силу выпуклости вниз $W(x)$ как функции от x , уравнение $W(x) = x$ при фиксированном t имеет единственный положительный корень $a(t)$.

Лемма 3. Если $t \rightarrow 0$, то $a(t) - h(t) = O(\sqrt{t})$.

Доказательство. Заметим, что $a(t) < h(t)$, поскольку $a(t) = W(a(t)) < U(t, a(t))$, а значит, $a(t)$ лежит в области продолжения наблюдений. Далее, поскольку $U(t, x) \in C^2$ по x , то $U(t, a(t))$ может быть представлено в виде

$$U(t, a(t)) = U(t, h(t)) + (a(t) - h(t)) U'_x(t, h(t)) + \frac{1}{2} (a(t) - h(t))^2 U''_{xx}(t, \xi),$$

где $a(t) < \xi < h(t)$. Условие гладкого склеивания для $V(t, x)$ дает равенство $U'_x(t, h(t)) = 1$, а $U(t, h(t)) + a(t) - h(t) = a(t) = W(a(t))$. Таким образом, имеем

$$U(t, a(t)) - W(a(t)) = \frac{1}{2} (a(t) - h(t))^2 U''_{xx}(t, \xi).$$

С другой стороны, заметим, что $U(t, x) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} \mathbf{E}(\max_{u \leq \tau} \hat{X}_u \vee x - c\tau) \leq \mathbf{E}(\max_{u \leq t} \hat{X}_u \vee x) = \mathbf{E}_x X_t + \mu t$ и

$$U(t, x) - W(x) \leq \mathbf{E}_x X_t + \mu t - \mathbf{E}_x X_t + rt = ct.$$

Также имеем $\frac{1}{2} U''_{xx} = \mu U'_x + U_t$. Далее, $U'_t \geq 0$ в силу возрастания $U(t, x)$ по t . Поскольку также $U'_x \geq 0$, то и $U''_{xx} \geq 0$. Это означает, что $U'_x(t, \xi) \geq U(t, \xi)/\xi \geq 1$. С учетом вышесказанного,

$$(a(t) - h(t))^2 = 2 \frac{U(t, a(t)) - W(a(t))}{U''_{xx}(t, \xi)} \leq \frac{2ct}{\mu U'_x + U'_t} \leq \frac{2ct}{\mu}.$$

Лемма 3 доказана; значит, для того чтобы найти асимптотику $h(t)$, достаточно исследовать поведение $a(t)$ вблизи 0.

Лемма 4. При $t \rightarrow 0$ верно $a(t) \sim \sqrt{t \ln t^{-1}}$.

Доказательство. По определению $a(t) + rt = \mathbf{E}_{a(t)} X_t = \mathbf{E}(\max_{u \leq t} \hat{X}_u \vee a(t)) - \mu t$, или $\mathbf{E}(\max_{u \leq t} \hat{X}_u - a(t))^+ = (r + \mu)t = ct$. Но $\max_{u \leq t} \hat{X}_u - \mu^+ t \leq \max_{u \leq t} B_u \leq \max_{u \leq t} \hat{X}_u + \mu^- t$. Отсюда следует, что $0 < c - \mu^- \leq t^{-1} \mathbf{E}(\max_{u \leq t} \hat{B}_u - a(t))^+ \leq c + \mu^+$. Далее, $\mathbf{E}(\max_{u \leq t} B_u - a(t))^+ = \sqrt{t} \mathbf{E}(\max_{u \leq 1} B_u - \alpha(t))^+$, где $\alpha(t) = a(t)/\sqrt{t}$. Таким образом, $\mathbf{E}(\max_{u \leq 1} B_u - \alpha(t))^+ = O(\sqrt{t})$, что возможно лишь в том случае, когда $\alpha(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$. Далее, обозначая $\max_{u \leq 1} B_u = \xi$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\xi - \alpha)^+ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} (x - \alpha) e^{-x^2/2} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\alpha^2/2}}{\alpha^2} \int_0^{\infty} y e^{-y - y^2/(2\alpha^2)} dy \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\alpha^2/2}}{\alpha^2} \end{aligned}$$

при $t \rightarrow 0$. Следовательно, $0 < m < \alpha^2 e^{\alpha^2/2} \sqrt{t} < M$, откуда $-\ln t + \ln m < \alpha^2 < -\ln t + \ln M$, что означает эквивалентность $\alpha(t) \sim \ln t^{-1}$ при $t \rightarrow 0$, т.е. дает необходимую асимптотику для $a(t)$.

Итак, найдя асимптотику $a(t)$ при $t \rightarrow 0$, мы доказали утверждение (15), а значит, и теорему 2.

5. Исследуем асимптотику $h(t)$ на бесконечности. В случае бесконечного временного горизонта оптимальным моментом остановки является момент первого достижения процессом X_t некоторого значения S_0 , и было бы логично ожидать, что $h(t) \rightarrow S_0$ при $t \rightarrow \infty$. Для того чтобы доказать это и найти, насколько сходимость быстрая, нам понадобится оценить разность между ценами опционов в нулевой момент времени для случаев конечного и бесконечного горизонтов.

Итак, сначала решим исходную задачу в случае бесконечного временного горизонта. Имеем следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} V_{\infty}''(x) - \mu V_{\infty}'(x) &= c \quad \text{при } x \leq S_0, \\ V_{\infty}'(x) &= 0 \quad \text{при } x = 0, \quad V_{\infty}'(x) = 1 \quad \text{при } x = S_0, \\ V_{\infty}(x) &= x \quad \text{при } x \geq S_0, \quad V_{\infty}(x) > x \quad \text{при } x < S_0. \end{aligned}$$

Решив эту систему, получаем, что $V_{\infty}(x) = a_1 e^{2\mu x} + a_2 - cx/\mu$ на отрезке $[0, S_0]$, где

$$S_0 = \frac{\ln(\mu/c + 1)}{2\mu}, \quad a_1 = \frac{c}{2\mu^2}, \quad a_2 = \frac{(1 + c/\mu)(\ln(\mu/c + 1) - 1)}{2\mu}.$$

Заметим, что в тех точках, где $\mathbb{L}_X V = V_t' - \mu V_x' + \frac{1}{2} V_{xx}'' = 0$, выполнено равенство $\mathbb{L}_1 U = c$, где $\mathbb{L}_1 = -\partial/\partial t - \mu \partial/\partial x + \frac{1}{2} \partial^2/\partial x^2$ ($\mathbb{L}_1$ отличается от $\mathbb{L}_X$ знаком при $\partial/\partial t$).

Теорема 3. Для некоторого положительного D имеет место оценка $0 < V_{\infty}(S) - U(t, S) < D e^{x\mu/2 - qt} \cos(\lambda x)$, где $\lambda = \pi/(2S_0)$ и $q = (\min(\mu, 0))^2/4 + \lambda^2$.

Доказательство. Зафиксируем некоторое число $\xi > 0$ и обозначим $D_{\xi} = \{(x, t): 0 \leq x \leq 1/(2c), 0 \leq t \leq \xi\}$. В этой области $V_{\infty}(S) > U(t, S)$.

Оценим разность между $V_{\infty}(S)$ и $U(t, S)$ величиной $H(S, t)$ вида $H_1(S) H_2(t)$, удовлетворяющей условию $\mathbb{L}_1 H \leq 0$. В качестве такой величины можем взять $D e^{pS + qt} \cos(\lambda S)$, где $\lambda = \pi/(2S_0)$. Заметим, что это выражение неотрицательно при $0 \leq S \leq S_0$. Указанное условие дает нам два неравенства: $p \leq \mu/2$ и $q - \mu p + p^2 - \lambda^2 \leq 0$. Нам хотелось бы, чтобы q было возможно больше (чтобы получить максимально сильную оценку), но при этом, как будет видно позднее, p должно быть неположительным. В таком случае максимальное q можем взять при $p = \min(\mu, 0)/2$: тогда $q = -(\min(\mu, 0))^2/4 - \lambda^2$.

Введем величины $w = V_\infty - U - H$ и $\tilde{w} = V_\infty - H$.

Лемма 5. *Максимум функции w в области D_ξ достигается на границе этой области.*

Доказательство леммы 5. При $S < h(t)$ имеем $\mathbb{L}_1 w = \mathbb{L}_1 V_\infty - \mathbb{L}_1 U - \mathbb{L}_1 H = c - c - \mathbb{L}_1 H \geq 0$. При $S > h(t)$ также $\mathbb{L}_1 w = \mathbb{L}_1 V_\infty - \mathbb{L}_1 U - \mathbb{L}_1 H = c - \mu - \mathbb{L}_1 H \geq r \geq 0$.

Во внутренних точках D_ξ , для которых $S \neq h(t)$, w не может достигать максимума, иначе мы получили бы, что $\mathbb{L}_1 w < 0$, что не так.

Предположим, что максимум достигается в точке $(h(t_0), t_0)$. Тогда в этой точке $\tilde{w}'_S = U'_S = 1$. Также, очевидно, $\tilde{w}''_t(h(t_0), t_0) \geq 0$ и $\tilde{w}''_{SS}(h(t_0), t_0) \leq 0$. Учитывая все это, получаем: $\mathbb{L}_1 \tilde{w}(h(t_0), t_0) \leq -\mu$. Но, с другой стороны, $\mathbb{L}_1 \tilde{w}(h(t_0), t_0) \geq c$, что делает достижение величины w максимума на кривой $h(t)$ невозможным.

Таким образом, w должна достигать своего максимума на границе D_ξ . При $S = 0$ она не может его достичь, поскольку $w'_x(0, t) = -H'_x(0, t) = -pH(0, t) \geq 0$, при этом в случае равенства нулю имеем $w''_x(0, t) = -H''_x(0, t) = \lambda^2 H(0, t) \geq 0$. При $S = S_0$ имеем $V_\infty = U = S_0$, $w = -H < 0$.

Лемма 6. *Существует такое D , что при $t = 0$ и $x \in [0, S_0]$ имеет место неравенство $w \leq 0$.*

Доказательство леммы 6. Заметим, что $V_\infty(S) - U(0, S) = e^{pS} \cos(\lambda S)$, что равно нулю при $S = S_0$, причем производная первой функции равна нулю, а производная второй есть $pe^{pS_0} \cos(\lambda S_0) - \lambda e^{pS_0} \sin(\lambda S_0) = -\lambda e^{pS_0} < 0$. Это означает, что, будучи доопределенной нулем в точке S_0 , функция $(V - U)/(e^{pS} \cos(\lambda S))$ непрерывна на отрезке $[0, S_0]$ и достигает на нем максимума. Это максимальное значение и можно взять в качестве D .

Таким образом, если максимум функции w в области D_ξ положителен, то он достигается на отрезке $\{(x, \xi): x \in [0, S_0]\}$. При $\xi \rightarrow \infty$ максимум не будет уменьшаться и при всех ξ будет достигаться на указанном отрезке. Но, с другой стороны, $\lim_{\xi \rightarrow \infty} (V_\infty - U) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} H = 0$. Значит, максимум w в области D_ξ при любом ξ неположителен, следовательно, $w \leq 0$ в области $D_\infty = \{(x, t): t \geq 0, x \in [0, S_0]\}$. Теорема 3 доказана.

Итак, воспользуемся полученной оценкой, чтобы оценить разность $h(t) - S_0$.

Теорема 4. *Имеет место оценка $0 \leq S_0 - h(t) \leq \sqrt{D/(2c)} e^{qt/2}$.*

Доказательство. Первое неравенство очевидным образом следует из того, что

$$h(t) = U(t, h(t)) < V_\infty(h(t)).$$

Для доказательства второго неравенства запишем:

$$\begin{aligned} De^{qt} &\geq De^{pS+qt} \cos(\lambda S) \geq V_{\infty}(h(t)) - U(t, h(t)) \\ &= V_{\infty}(h(t)) - V_{\infty}(S_0) + (S_0 - h(t)) \\ &= (V'_{\infty}(S_0) - 1)(h(t) - S_0) + \frac{1}{2} V''_{\infty}(\zeta)(h(t) - S_0)^2, \end{aligned}$$

где $h(t) \leq \zeta \leq S_0$.

Вторая производная $V''_{\infty}(\zeta)$ не меньше, чем $V''_{\infty}(S_0) = 2c$. Таким образом, имеем $S_0 - h(t) \leq \sqrt{D/(2c)} e^{qt/2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shepp L., Shiryaev A. N. The Russian option: reduced regret. — Ann. Appl. Probab., 1993, v. 3, № 3, p. 631–640.
2. Graversen S. E., Shiryaev A. N. An extension of P. Lévy's distributional properties to the case of Brownian motion with drift. — Bernoulli, 2000, v. 6, № 4, p. 615–620.
3. Peskir G., Shiryaev A. N. Optimal Stopping and Free-Boundary Problems. Basel: Birkhäuser, 2006, 500 p.
4. Ekström E. Russian options with a finite time horizon. — J. Appl. Probab., 2004, v. 41, № 2, p. 313–326.
5. Bian B. J., Dai X. L., Yuan G. Q. Asymptotic analysis and numerical computation of American option when expiry date runs to infinity. (Chinese). — Tongji Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban (J. Tongji Univ.), 2005, v. 33, № 4, p. 545–549.

Поступила в редакцию
12.XII.2005

Исправленный вариант
25.III.2008