Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, А. А. Могульский, Вероятности больших отклонений для сумм независимых случайных векторов на границе и вне крамеровской зоны. II, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 4, 641–664

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2458>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 16:25:40

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.
Выходит 4 раза в год
Москва • Наука

Том 53
Выпуск 4, 2008 год
октябрь, ноябрь, декабрь

© 2008 г. **БОРОВКОВ А. А.***, **МОГУЛЬСКИЙ А. А.****

ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ НА ГРАНИЦЕ И ВНЕ КРАМЕРОВСКОЙ ЗОНЫ. II¹⁾

Настоящая работа является продолжением работы [1] и посвящена изучению асимптотики вероятности попадания сумм независимых случайных векторов в малый куб с вершиной в точке x в области больших уклонений. В многомерном случае эта асимптотика найдена для некоторого класса распределений, правильно меняющихся на бесконечности, и для уклонений, удаленных от крамеровской зоны.

Ключевые слова и фразы: функция уклонений, большие уклонения, нерегулярные большие уклонения, крамеровская зона уклонений, сверхбольшие уклонения, интегро-локальная теорема.

6. Многомерный случай. Уклонения, удаленные от крамеровской зоны. В многомерном случае мы будем использовать все обозначения первой части работы; при этом мы ограничимся рассмотрением лишь одного класса распределений $\mathcal{ER}$ (аналог класса $\mathcal{ER}$ в одномерном случае). Мы будем рассматривать альтернативный к теореме 2.1 в [1] случай, когда отклонение точки $\alpha = x/n$ от множества $\mathcal{A}'$ сильно больше чем $\sqrt{n}$.

Для того чтобы сформулировать основные утверждения, нам понадобится ряд предварительных сведений. Мы выясним прежде всего, в какой точке следует делать преобразование Крамера при рассмотрении

* Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск; Новосибирский государственный университет, Академгородок, ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: borovkov@math.nsc.ru

** Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: mogul@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантами РФФИ (№ 05-01-00810, 07-01-00595, 08-01-00962), НШ-8980.2006.1, РНШ.2.1.1.1379.

уклонений $x = \alpha n$, $\alpha \notin \mathcal{A}'$, и какой вид имеет функция уклонений для таких α .

6.1. Функция уклонений вне крамеровской зоны. В этом пункте для упрощения изложения мы будем накладывать на распределение **F** ряд «завышенных» ограничений. Пояснения по поводу возможности ослабления или полного снятия этих ограничений см. в последующих комментариях и в замечании 6.2. К числу названных ограничений относится следующее условие.

[A]. Множество $\mathcal{A}$ конечности функции $\varphi(\lambda) := \mathbf{E} e^{(\lambda, \xi)}$ (или $A(\lambda) := \ln \varphi(\lambda)$) ограничено, а вектор-функция

$$\varphi'(\lambda) := \mathbf{E} e^{(\lambda, \xi)} \xi$$

(или $A'(\lambda) = \varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda)$) равномерно ограничена и непрерывна на $\mathcal{A}$.

Отметим, что множество $\mathcal{A}$ всегда выпукло, а при выполнении условия [A] оно и замкнуто; ограниченным и замкнутым будет и множество $\mathcal{A}' := \{\alpha = A'(\lambda): \lambda \in \mathcal{A}\}$.

На самом деле, если рассматривать уклонения x лишь в некотором заданном направлении, то понадобится не условие [A] в его «полном» виде, а лишь предположение, что ограниченным и замкнутым является пересечение $\mathcal{A}$ с некоторым конусом.

Напомним, что через $\lambda(\alpha)$ мы обозначаем точку в $\mathcal{A}$, в которой достигается

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{A}} \{\langle \lambda, \alpha \rangle - A(\lambda)\} = \langle \lambda(\alpha), \alpha \rangle - A(\lambda(\alpha)) =: \Lambda(\alpha). \quad (6.1)$$

Поскольку максимум непрерывной функции на компакте достигается в некоторой точке этого компакта, то точка $\lambda(\alpha)$ существует и единственна в силу строгой выпуклости функции $A(\lambda)$, следующей, в свою очередь, из невырожденности **F** (см., например, [2]). При $\alpha \in \mathcal{A}'$ значение $\lambda(\alpha)$ определяется как решение уравнения

$$\alpha = \alpha(\lambda) := A'(\lambda). \quad (6.2)$$

Это решение (т.е. вектор-функция, обратная к $A'(\lambda)$) однозначно определено и имеет вид (см. (1.4) в [1])

$$\lambda(\alpha) = \Lambda'(\alpha), \quad (6.3)$$

так что $A'(\Lambda'(\alpha)) \equiv \alpha$. При этом взаимно однозначные отображения (6.2), (6.3) переводят внутренность ($\mathcal{A}$) (область аналитичности функции $A(\lambda)$) во внутренность ($\mathcal{A}'$) (область аналитичности функции $\Lambda(\alpha)$) и наоборот (см. [2]). Отсюда следует, что при выполнении условия [A] такое же взаимно однозначное соответствие функции (6.2), (6.3)

осуществляют и между границами $\partial\mathcal{A}$ и $\partial\mathcal{A}'$. Напомним, что через λ_+ и α_+ мы обозначаем точки границ $\partial\mathcal{A}$ и $\partial\mathcal{A}'$ соответственно, и положим

$$\alpha_+(\lambda_+) := A'(\lambda_+), \quad \lambda_+(\alpha_+) := \Lambda'(\alpha_+) \quad (6.4)$$

(имеются в виду «внутренние» производные).

Опишем теперь поведение функции отклонений $\Lambda(\alpha)$ вне множества $\mathcal{A}'$.

Лемма 6.1. Пусть выполнено условие [A]. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Для любого $\alpha \notin \mathcal{A}'$ найдется единственная точка $\lambda_+[\alpha] \in \partial\mathcal{A}$ (или точка¹⁾ $\alpha_+[\alpha] \in \partial\mathcal{A}'$) такая, что

$$\Lambda(\alpha) = \Lambda(\alpha_+[\alpha]) + \langle \lambda_+[\alpha], \alpha - \alpha_+[\alpha] \rangle. \quad (6.5)$$

2. Для $\alpha \notin \mathcal{A}'$ и $\lambda_+ \in \partial\mathcal{A}$ в очевидном неравенстве

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{A}} \langle \lambda, \alpha - A'(\lambda_+) \rangle \geq \langle \lambda_+, \alpha - A'(\lambda_+) \rangle$$

равенство

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{A}} \langle \lambda, \alpha - A'(\lambda_+) \rangle = \langle \lambda_+, \alpha - A'(\lambda_+) \rangle \quad (6.6)$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\lambda_+ = \lambda_+[\alpha]$.

Лемма 6.1 будет доказана в п. 6.3. Соотношения, указанные в сноске 2), устанавливают связь между $\alpha_+[\alpha]$ и $\lambda_+[\alpha]$, в то время как соотношение (6.6) позволяет построить алгоритм отыскания этих значений (см. также (6.16)). Соотношение (6.6) означает, что точка $\lambda_+[\alpha]$, лежащая на границе $\partial\mathcal{A}$, является «крайней в множестве $\mathcal{A}$ в направлении $e[\alpha] := e(\alpha - \alpha_+[\alpha])$ », где $e(v) := v/|v|$. Другими словами, гиперплоскость, ортогональная $e[\alpha]$, касается $\partial\mathcal{A}$ в точке $\lambda_+[\alpha]$. Если в точке $\lambda_+[\alpha]$ граница $\partial\mathcal{A}$ выпуклого множества $\mathcal{A}$ имеет единичную нормаль e (направленную вне множества $\mathcal{A}$), то $e = e[\alpha]$.

Из сказанного следует, что для точек

$$\alpha_c := \alpha + c(\alpha - \alpha_+[\alpha]) \notin \mathcal{A}',$$

образующих луч $\mathcal{L}_\alpha := \{\alpha_c : c > -1\}$, выполняются равенства

$$\begin{aligned} \alpha_+[\alpha_c] &= \alpha_+[\alpha], \quad \lambda_+[\alpha_c] = \Lambda'(\alpha_+[\alpha_c]) = \Lambda'(\alpha_+[\alpha]) = \alpha_+[\alpha], \\ e[\alpha_c] &= e(\alpha_c - \alpha_+[\alpha]) = e(\alpha + c(\alpha - \alpha_+[\alpha]) - \alpha_+[\alpha]) \\ &= e(\alpha(1+c) - \alpha_+[\alpha](1+c)) = e[\alpha], \end{aligned}$$

¹⁾ Значения $\lambda_+[\alpha]$ и $\alpha_+[\alpha]$ в силу (6.2), (6.3) однозначно определяют друг друга с помощью равенств (см. (6.4)) $\alpha_+[\alpha] = \alpha_+(\lambda_+[\alpha])$, $\lambda_+[\alpha] = \lambda_+(\alpha_+[\alpha])$.

так что для точек α_c этого луча направление $e[\alpha_c]$ и точки $\alpha_+[\alpha_c]$, $\lambda_+[\alpha_c]$ остаются неизменными. При этом два луча $\mathcal{L}_{\alpha'}$, $\mathcal{L}_{\alpha''}$, построенные по двум точкам $\alpha', \alpha'' \notin \mathcal{A}'$ указанным выше способом, либо сливаются, либо не пересекаются.

Функция уклонений $\Lambda(\alpha)$ вне области $\mathcal{A}'$ ведет себя линейно вдоль каждого луча $\mathcal{L}_\alpha$ (см. (6.5); как уже отмечалось, значения $\alpha_+[\alpha_c]$ и $\lambda_+[\alpha_c]$ остаются для точек α_c луча $\mathcal{L}_\alpha$ неизменными).

З а м е ч а н и е 6.1. Если в дополнение к условию [A] потребовать, чтобы множество $\mathcal{A}$ было строго выпуклым и граница $\partial\mathcal{A}$ в каждой точке имела нормаль (отсутствуют точки «излома»; эти дополнительные условия не выполнены, например, в случае, когда координаты вектора ξ независимы), то второе утверждение леммы 6.1 можно дополнить следующим утверждением.

2А. Для каждого $\alpha \notin \mathcal{A}'$ значение $\sup_{\lambda \in \mathcal{A}} \langle \lambda, \alpha - \alpha_+[\alpha] \rangle$ достигается в единственной точке $\lambda = \lambda_+[\alpha]$, так что

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{A}} \langle \lambda, \alpha - \alpha_+[\alpha] \rangle = \langle \lambda_+[\alpha], \alpha - \alpha_+[\alpha] \rangle. \quad (6.7)$$

Лемма 6.1 и утверждение 2А позволяют установить взаимно однозначное соответствие между каждым из множеств $\partial\mathcal{A}$, $\partial\mathcal{A}'$ и полем лучей $\mathcal{L}_\alpha$. Действительно, каждый луч $\mathcal{L}_\alpha$ определяется начальной точкой $\alpha_+[\alpha]$ и направлением $e[\alpha]$. Но, как мы видели (см. также 2А), направление $e[\alpha]$ однозначно определяет точку $\lambda_+[\alpha]$ (единственную крайнюю точку множества $\mathcal{A}$ в этом направлении), а стало быть, и точку $\alpha_+[\alpha]$. Таким образом, каждый луч $\mathcal{L}_\alpha$ полностью характеризуется направлением $e[\alpha]$ — точкой единичной сферы

$$E = \{e: |e| = 1\}.$$

Далее, как уже отмечалось, каждому направлению $e \in E$ соответствует единственная «крайняя в этом направлении» точка $\lambda_+ \in \partial\mathcal{A}$ множества $\mathcal{A}$. Это доказывает взаимно однозначное соответствие между $\partial\mathcal{A}$ и E . То же самое можно сказать о взаимно однозначном соответствии между $\partial\mathcal{A}'$ и E .

Из утверждения 2 леммы 6.1 вытекает также, что случайный вектор $\xi_{\lambda_+[\alpha]}$ «не удовлетворяет условию Крамера в направлении $e[\alpha]$ » в следующем смысле: преобразование Лапласа над распределением $\xi_{\lambda_+[\alpha]}$, равное $\varphi(\lambda + \lambda_+[\alpha])/\varphi(\lambda_+[\alpha])$, обращается в ∞ в любой точке λ такой, что $\langle \lambda, e[\alpha] \rangle > 0$.

Вернемся к изучению асимптотики вероятности $\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\}$. Рассмотрим уклонения $x = n\alpha$, $\alpha \notin \mathcal{A}'$. Сделаем аналогично предыдущему преобразование Крамера над распределениями векторов ξ и $S(n)$, а в качестве параметра λ выберем точку $\lambda_+ = \lambda_+[\alpha]$. Тогда, как и прежде,

при $\Delta = \Delta_n > 0$, стремящемся к нулю достаточно медленно, получим

$$\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\} \sim e^{-n\Lambda(\alpha)} \mathbf{P}\{S_{\lambda_+}(n) - n\alpha_+[\alpha] \in \Delta[y]\}, \quad (6.8)$$

где $y := x - n\alpha_+[\alpha] = n(\alpha - \alpha_+[\alpha])$, а

$$S_{\lambda_+}(n) \stackrel{d}{=} \xi_{\lambda_+}(1) + \dots + \xi_{\lambda_+}(n)$$

можно рассматривать как сумму независимых копий случайного вектора ξ_{λ_+} , распределение которого не удовлетворяет условию Крамера в направлении $\alpha - \alpha_+[\alpha]$.

Чтобы найти асимптотику правой части (6.8), нам придется привлечь дополнительные условия на правильное изменение распределения $\mathbf{F}$ «в направлении $\alpha - \alpha_+[\alpha]$ ». Здесь вновь для облегчения изложения мы введем упрощающие предположения, которые позже можно будет ослабить (см. замечание 6.2). А именно, мы будем предполагать, что выполнено следующее условие.

$[\mathcal{ER}]_1$. При всех t таких, что $|t| \geq N$ для достаточно большого N , распределение $\mathbf{F}$ имеет плотность $f(t)$ вида

$$f(t) = g(e(t))l(|t|)e^{-h(t)}, \quad e(t) := \frac{t}{|t|}, \quad (6.9)$$

где функция $g(e)$ положительна и непрерывна на E , $l(v) := v^\beta L(v)$, функция $L(v)$ медленно меняется при $v \rightarrow \infty$; выпуклая функция $h(t)$ представима в виде

$$h(t) = \rho(e(t))|t|,$$

где функция $\rho(e)$ положительна и непрерывна на E .

Класс таких распределений обозначим $\mathcal{ER}$ (в [3] класс абсолютно непрерывных распределений, близкий к $\mathcal{ER}$, назван классом гамма-подобных распределений (см. гл. 3.1)).

Лемма 6.2. Пусть выполнено условие $[\mathcal{ER}]_1$ и

$$\int_1^\infty v^d l(v) dv < \infty \quad (6.10)$$

(для выполнения (6.10) достаточно, чтобы $\beta < -d - 1$). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Выполнено условие $[A]$, и при этом множество $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\mathcal{A} = \{\lambda: h^*(\lambda) = 0\}, \quad \text{где} \quad h^*(\lambda) := \sup_t \{\langle \lambda, t \rangle - h(t)\} \quad (6.11)$$

или, что то же,

$$\mathcal{A} = \{\lambda: h^E(\lambda) \leq 0\}, \quad \text{где} \quad h^E(\lambda) := \sup_{e \in E} \{\langle \lambda, e \rangle - h(e)\}. \quad (6.12)$$

Кроме того, для любого направления $e \in E$ найдется точка $\lambda_+^e \in \partial \mathcal{A}$ такая, что для $u > 0$

$$h(ue) = \sup_{\lambda \in \mathcal{A}} \langle \lambda, e \rangle u = \sup_{\lambda_+ \in \partial \mathcal{A}} \langle \lambda_+, e \rangle u = \langle \lambda_+^e, e \rangle u. \quad (6.13)$$

2. Если $m(v) \geq 0$ — неубывающая функция при $v \geq 0$ и $\int_1^\infty m(v)v^{d-1}l(v)dv < \infty$, то для любого $\lambda_+ \in \partial \mathcal{A}$

$$\mathbf{E} m(|\xi_{\lambda_+}|) < \infty.$$

Из последнего утверждения следует, в частности, что если $\beta < -d-s$ при $s \geq 0$, то $\mathbf{E} |\xi_{\lambda_+}|^s < \infty$.

Лемма 6.2 будет доказана в п. 6.4.

6.2. Предельная теорема для класса $\mathcal{ER}$. При изучении асимптотики вероятности в правой части (6.8) нам понадобятся дополнительные условия на функцию $h = h(t)$, определяющую класс $\mathcal{ER}$.

$[\mathcal{ER}]_2$. Выполнено условие $[\mathcal{ER}]_1$, функция $l(v)$ удовлетворяет условию

$$\int_1^\infty v^{(d-1)/2+1}l(v)dv < \infty \quad (6.14)$$

и выпуклая функция $h(t)$ при всех $t \neq 0$ дважды непрерывно дифференцируема; при этом симметричная неотрицательно определенная матрица

$$h''(e) := h''(t)|_{t=e}$$

для любого $e \in E$ имеет ранг $d-1$.

Последнее условие, касающееся ранга матрицы $h''(e)$, эквивалентно тому, что сечение конуса $z = h(t)$ гиперплоскостью $z = 1$ (т.е. множество $\{t: h(t) \leq 1\}$) строго выпукло и его граница в каждой точке имеет ненулевую конечную кривизну. Для выполнения неравенства (6.14) достаточно, чтобы $\beta < -(d+1)/2-1$.

Лемма 6.3. Пусть выполнено условие $[\mathcal{ER}]_2$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Для любого $t \neq 0$

$$h(t) = \langle h'(t), t \rangle, \quad h'(t) = h'(e(t)), \quad h''(t) = \frac{1}{|t|} h''(e(t)), \quad (6.15)$$

где $h'(e) := h'(t)|_{t=e}$, $h''(e) := h''(t)|_{t=e}$.

2. Выполнено условие $[A]$,

$$\partial \mathcal{A} = \{\lambda_+ = h'(e): e \in E\},$$

и для любой точки $\alpha \notin \mathcal{A}'$ пара точек $\lambda_+ = \lambda_+[\alpha]$, $\alpha_+ = \alpha_+[\alpha]$ (см. лемму 6.1) является единственным решением в $\partial \mathcal{A} \times \partial \mathcal{A}'$ системы уравнений

$$h'(\alpha - \alpha_+) = \lambda_+, \quad A'(\lambda_+) = \alpha_+, \quad (6.16)$$

а вектор $\alpha - \alpha_+[\alpha]$ является нормалью, направленной вне $\mathcal{A}$, к поверхности $\partial\mathcal{A}$ в точке $\lambda_+[\alpha]$.

3. Если $m(v) \geq 0$ — неубывающая функция при $v \geq 0$ и

$$\int_1^\infty m(v)v^{(d-1)/2}l(v)dv < \infty, \quad (6.17)$$

то для любого $\lambda_+ \in \partial\mathcal{A}$

$$\mathbf{E} m(|\xi_{\lambda_+}|) < \infty.$$

Из последнего утверждения следует, в частности, что если $\beta < -(d+1)/2 - s$ при $s \geq 0$, то $\mathbf{E} |\xi_{\lambda_+}|^s < \infty$.

Для формулировки теоремы нам понадобятся следующие обозначения. Через P обозначим оператор проектирования $\mathbf{R}^d$ в $\mathbf{R}^{d-1}$ следующего вида: для $t = (t_1, \dots, t_d)$ мы положим по определению

$$Pt = (t_2, \dots, t_d),$$

так что $t = (t_1, Pt)$. Для любого направления $e \in E$ через M_e обозначим ортогональную матрицу, которая составлена из собственных вектор-строк матрицы $h''(e)$, так что $eM_e = e$ и матрица

$$M_e h''(e) M_e^T = \left\| \sum_{i=1}^d \delta_{i,j} b_i(e) \right\|$$

(где $\delta_{i,j} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{i,j} = 0$ при $i \neq j$) есть диагональная матрица с диагональю $b(e) = (b_1(e), \dots, b_d(e))$, где $b_1(e) = 0$, $\min_{2 \leq i \leq d} b_i(e) > 0$. Обозначим через $B^2(e)$ ковариационную матрицу (порядка $d-1$) случайного вектора $P\zeta(e)$, где

$$\zeta(e) := \xi_{\lambda_+} M_e^T.$$

Наконец, $T^2(e)$ будет обозначать диагональную матрицу порядка $d-1$

$$T^2(e) := \left\| \sum_{i=1}^{d-1} \delta_{i,j} b_{i+1}(e) \right\|.$$

Определитель квадратной матрицы G обозначим $|G|$; например,

$$|T^2(e)| = b_2(e) \times \dots \times b_d(e).$$

Для $v > 0$ обозначим

$$R_e(v) := \frac{|B^2(e)|^{1/2}}{|B^2(e) + vT^2(e)|^{1/2}}.$$

Теорема 6.1. *Предположим, что выполнено условие $[\mathcal{ER}]_2$ при $\beta < -(d+1)/2 - 2$. Для $\alpha = x/n \notin \mathcal{A}'$ построим точки $\lambda_+ = \lambda_+[\alpha] \in \partial \mathcal{A}$, $\alpha_+ = \alpha_+[\alpha] \in \partial \mathcal{A}'$ (см. леммы 6.1, 6.3). Положим*

$$y := x - n\alpha_+[\alpha] = n(\alpha - \alpha_+[\alpha]).$$

Пусть даны две фиксированные функции $\Delta_1 = \Delta_1(y) = |y|^{-\kappa}$ при любом фиксированном $\kappa > 0$ и $\Delta_2 = \Delta_2(y) \geq \Delta_1(y)$, $\Delta_2 = o(1)$ при $|y| \rightarrow \infty$. Тогда равномерно по $\Delta \in [\Delta_1, \Delta_2]$ и y таким, что $|y| \gg \sqrt{n \ln n}$ при $n \rightarrow \infty$, имеет место следующее асимптотическое соотношение:

$$\mathbf{P} \{S(n) \in \Delta[x]\} = \frac{\Delta^d}{\varphi(\lambda_+)} nR_e\left(\frac{n}{|y|}\right) e^{-n\Lambda(\alpha_+) - \langle \lambda_+, y \rangle} g(e)l(|y|)(1 + o(1)), \tag{6.18}$$

где для краткости обозначено $e = e(y) := y/|y|$, $\lambda_+ = \lambda_+[\alpha]$, $\alpha_+ = \alpha_+[\alpha]$. При этом в области $|y| \gg n$ утверждение (6.18) сохранится при $\beta < -(d+1)/2 - 1$. Если $|y| \gg n$, то $R_e(n/|y|)$ следует заменить на 1; если $|y| = o(n)$, то — на $(|y|/n)^{(d-1)/2} |T(e)|^{-1}$.

Равномерность в теореме 6.1 понимается в следующем естественном смысле: для любой фиксированной последовательности N_n , неограниченно возрастающей при $n \rightarrow \infty$, остаточный член $o(1)$ в (6.18) можно заменить на функцию $\varepsilon = \varepsilon(n, \Delta, y)$, удовлетворяющую соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\Delta \in [\Delta_1, \Delta_2], |y| \geq N_n \sqrt{n \ln n}} |\varepsilon(n, \Delta, y)| = 0.$$

Доказательство теоремы 6.1 приведено в п. 6.6.

Если распределение $\mathbf{F}$ из класса $\mathcal{ER}$ абсолютно непрерывно, то утверждение теоремы 6.1 несколько упростится.

Теорема 6.2. *Пусть выполнены условия теоремы 6.1 и, кроме того, распределение $\mathbf{F}$ абсолютно непрерывно. Тогда плотность $f^{(n)}(t)$ суммы $S(n)$ удовлетворяет соотношению*

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{\varphi(\lambda_+)} nR_e\left(\frac{n}{|y|}\right) e^{-n\Lambda(\alpha_+) - \langle \lambda_+, y \rangle} g(e)l(|y|)(1 + o(1)), \tag{6.19}$$

при сохранении всех прочих обозначений и утверждений теоремы 6.1.

Приведем теперь аналог теоремы 6.1 в арифметическом случае, рассмотрев класс арифметических распределений $\mathbf{F}$, удовлетворяющих для всех $t \in \mathbf{Z}^d$ условию (ср. с (6.9))

$$\mathbf{P} \{\xi = t\} = g(e(t))l(|t|)e^{-h(t)}, \quad |t| \rightarrow \infty, \tag{6.20}$$

где на функции $g(e)$, $l(v) = v^\beta L(v)$, $h(t)$ наложены те же ограничения, что и в условии $[\mathcal{ER}]_2$.

Теорема 6.3. Пусть арифметическое распределение $\mathbf{F}$ удовлетворяет условию (6.20) при $\beta < -(d+1)/2 - 2$. Тогда равномерно по $y := x - n\alpha_+[\alpha]$ таким, что $x = y + n\alpha_+[\alpha] \in \mathbf{Z}^d$, $|y| \gg \sqrt{n \ln n}$ при $n \rightarrow \infty$, имеет место следующее асимптотическое соотношение:

$$\mathbf{P}\{S(n) = x\} = \frac{1}{\varphi(\lambda_+)} n R_e \left(\frac{n}{|y|} \right) e^{-n\Lambda(\alpha_+) - \langle \lambda_+, y \rangle} g(e) l(|y|) (1 + o(1)),$$

при сохранении всех прочих обозначений и утверждений теоремы 6.1.

Доказательства теорем 6.2 и 6.3 по существу являются упрощенными версиями доказательства теоремы 6.1; поэтому мы их опускаем.

Опишем кратко возможности расширения (ослабления) использовавшихся выше условий.

З а м е ч а н и е 6.2. 1) Если рассматривать отклонения x лишь в некотором конусе $\mathcal{C}$, то, как уже отмечалось ранее, выполнения условия [A] достаточно требовать только на пересечении $\mathcal{A}$ с некоторым конусом, соответствующим $\mathcal{C}$.

2) В условии $[\mathcal{E}\mathcal{R}]_1$ можно требовать, чтобы соотношение (6.9) выполнялось лишь в некотором фиксированном конусе $\mathcal{C}_\delta(e) = \{t = ue' : u \geq N, e' \in E, |e' - e| < \delta\}$, а вне его можно ограничиться неравенством

$$f(t) \leq e^{-h(t)}, \quad |t| \geq N. \quad (6.21)$$

Условие $[\mathcal{E}\mathcal{R}]_2$ на функцию $h(t)$ можно тоже накладывать только в том же конусе $\mathcal{C}_\delta(e)$. Тогда утверждения теоремы 6.1 останутся справедливыми для отклонений $x = n\alpha_+ + y$ таких, что $e(y)$ близко к этому фиксированному направлению e . Доказательства при этом практически не изменятся.

3) В условии $[\mathcal{E}\mathcal{R}]_1$ можно отказаться от абсолютной непрерывности в области $|t| \geq N$. Вместо этого можно использовать интегро-локальные версии соотношений (6.9), (6.21). При этом, рассматривая зону отклонений $x = n\alpha_+ + y$ при $|y| \gg \sqrt{n}$, $|y| = o(n)$, необходимо дополнительно потребовать наличие ненулевой абсолютно непрерывной компоненты у распределения $\mathbf{F}$. Тогда утверждение теоремы 6.1 сохранится для $\Delta > 0$ из некоторого отрезка, определяемого интегро-локальным условием для одного слагаемого. Доказательства при этом мало изменятся.

П р и м е р 1. Пусть распределение $\mathbf{F}$ случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbf{R}^d$ абсолютно непрерывно со сферически однородной плотностью

$$f(t) = e^{-\rho|t|} l(|t|), \quad t \in \mathbf{R}^d,$$

где $l(v) := v^\beta L(v)$, $L(v)$ — медленно меняющаяся функция при $v \rightarrow \infty$, $\rho > 0$ (это соответствует $\rho(e) = \rho = \text{const}$, $g(e) = 1$ в представлении (6.9)) и выполнено условие $\beta < -(d+1)/2 - 2$. Тогда, очевидно,

выполнены все условия теоремы 6.2, и утверждение (6.19) этой теоремы имеет место. Найдем явный вид функций, входящих в правую часть (6.19).

Поскольку плотность $f(t)$ случайного вектора ξ сферически однородна, то распределение случайной величины $\langle e, \xi \rangle$ не зависит от направления $e \in E$ и совпадает с распределением первой координаты $\xi_1 = \langle e^{(1)}, \xi \rangle$. Поэтому

$$\begin{aligned} \langle \lambda, \xi \rangle &= |\lambda| \langle e(\lambda), \xi \rangle \stackrel{d}{=} |\lambda| \xi_1, \\ \varphi(\lambda) &:= \mathbf{E} e^{\langle \lambda, \xi \rangle} = \varphi_1(|\lambda|), \quad A(\lambda) = A_1(|\lambda|), \end{aligned} \quad (6.22)$$

где

$$\varphi_1(v) := \mathbf{E} e^{v\xi_1}, \quad A_1(v) := \ln \varphi_1(v) = A_1(|v|).$$

Покажем, что

$$\Lambda(\alpha) = \Lambda_1(|\alpha|), \quad \text{где} \quad \Lambda_1(u) := \sup_v \{vu - A_1(v)\}.$$

При $v = |\lambda|$ имеем

$$\begin{aligned} \Lambda(\alpha) &:= \sup_{\lambda} \{\langle \lambda, \alpha \rangle - A(\lambda)\} = \sup_{v \geq 0} \sup_{e \in E} \{v \langle e, \alpha \rangle - A_1(v)\} \\ &= \sup_{v \geq 0} \{v|\alpha| - A_1(v)\} = \Lambda_1(|\alpha|). \end{aligned}$$

Очевидно, далее, что плотность

$$f_1(u) = \int_{(t_2, \dots, t_d) \in \mathbf{R}^{d-1}} f((u, t_2, \dots, t_d)) dt_2 \cdots dt_d$$

случайной величины ξ_1 является четной функцией. Можно показать, используя замену $t_i = v_i \sqrt{u}$ для $i = 2, \dots, d$, что при $u \rightarrow \infty$

$$f_1(u) \sim c_1 e^{-\rho u} l(u) u^{(d-1)/2},$$

где $c_1 > 0$. Поэтому функции $\varphi_1(v)$, $A_1(v)$ и $A'_1(v)$ конечны на отрезке $[-\rho, \rho]$ и бесконечны вне этого отрезка; функция $\Lambda_1(u)$ аналитична в интервале $(-u_+, u_+)$, где $u_+ := A'_1(\rho)$, и линейна вне этого интервала:

$$\Lambda_1(u) = \Lambda_1(u_+) + \rho(|u| - u_+), \quad |u| \geq u_+.$$

Следовательно, в силу (6.22),

$$\mathcal{A} = \{\lambda \in \mathbf{R}^d: |\lambda| \leq \rho\}, \quad \mathcal{A}' = \{\alpha \in \mathbf{R}^d: |\alpha| \leq u_+\}.$$

Используя леммы 6.1–6.3 и формулы (6.32) (см. доказательство леммы 6.3 ниже), можно показать, что для любого направления $e \in E$

квадратная матрица $T^2(e)$ порядка $d - 1$ (см. определение перед теоремой 6.1) имеет вид

$$T^2(e) = \rho I,$$

где $I = I_{d-1}$ — единичная матрица порядка $d - 1$. Далее, в силу (1.5) в [1] ковариационная матрица случайного вектора $\xi_{\lambda(\alpha)}$ имеет вид

$$\sigma^2(\alpha) = (\Lambda''(\alpha))^{-1}.$$

С помощью (6.22) и (6.32) вычислим матрицу $\Lambda''(\alpha)$:

$$\Lambda''(\alpha) = \frac{\Lambda'_1(|\alpha|)}{|\alpha|} I_d + e^T(\alpha) e(\alpha) \left[\Lambda''_1(|\alpha|) - \frac{\Lambda'_1(|\alpha|)}{|\alpha|} \right].$$

Для матрицы $\Lambda''(\alpha)$ вида

$$\Lambda''(\alpha) = aI + b e^T(\alpha) e(\alpha)$$

при $a + b > 0$, $a > 0$ обратная матрица имеет вид

$$(\Lambda''(\alpha))^{-1} = a^{-1} I + c e^T(\alpha) e(\alpha), \quad c := -\frac{b}{a(a+b)}.$$

Поэтому, учитывая, что для $\alpha = u_+ e$

$$\frac{\Lambda'_1(|\alpha|)}{|\alpha|} = \frac{\Lambda'_1(u_+)}{u_+} = \frac{\rho}{u_+},$$

получаем для матрицы $B^2(e)$ (см. определение перед теоремой 6.1) представление

$$B^2(e) = \frac{u_+}{\rho} I.$$

Поэтому функция $R_e(v)$ (см. определение перед теоремой 6.1) имеет вид

$$R_e(v) = \frac{1}{(1 + v\rho^2/u_+)^{(d-1)/2}}.$$

С учетом сказанного основное утверждение (6.19) теоремы 6.2 в рассматриваемом примере выглядит так: *для произвольной последовательности $N_n \rightarrow \infty$ плотность $f^{(n)}(x)$ суммы $S(n)$ в области*

$$\{x \in \mathbf{R}^d: |x| \geq nu_+ + N_n \sqrt{n \ln n}\}$$

удовлетворяет следующему асимптотическому соотношению:

$$f^{(n)}(x) = r \frac{n l(u)}{(1 + (n/u)\rho_+)^{(d-1)/2}} e^{-n\Lambda_+ - \rho u} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $u := |x| - nu_+$, $\Lambda_+ := \Lambda_1(u_+)$, $r := 1/\varphi_1(\rho)$, $\rho_+ := \rho^2/u_+$.

Интегрируя плотность $f^{(n)}(x)$ по сфере vE , получаем асимптотическое представление для плотности $f_1^{(n)}(v)$ случайной величины $|S(n)|$: при $v = nu_+ + u$, $u \geq N_n \sqrt{n \ln n}$

$$f_1^{(n)}(v) = rC_d \frac{nl(u)(nu_+ + u)^{d-1}}{(1 + (n/u)\rho_+)^{(d-1)/2}} e^{-n\Lambda_+ - \rho u}(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (6.23)$$

где $C_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ — площадь в $\mathbf{R}^d$ единичной сферы E . В свою очередь, из локальной теоремы (6.23) вытекает интегральная теорема для $|S(n)|$: при $v = nu_+ + u$, $u \geq N_n \sqrt{n \ln n}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{|S(n)| \geq v\} &= r\rho^{-1}C_d \frac{nl(u)(nu_+ + u)^{d-1}}{(1 + (n/u)\rho_+)^{(d-1)/2}} \\ &\times e^{-n\Lambda_+ - \rho u}(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

6.3. Доказательство леммы 6.1. 1. Мы уже доказали, что при выполнении условия [A] для любого $\alpha \in \mathbf{R}^d$ функция $\lambda(\alpha) \in \mathcal{A}$ определена и единственна (см. рассуждения после формулы (6.1)). Поскольку $\alpha \notin (\mathcal{A}')$, то $\lambda_+[\alpha] := \lambda(\alpha)$ лежит на границе $\partial\mathcal{A}$, так что

$$\Lambda(\alpha) = \langle \lambda_+[\alpha], \alpha \rangle - A(\lambda_+[\alpha]). \quad (6.24)$$

Для $\alpha_+ := \alpha_+[\alpha] = A'(\lambda_+[\alpha]) \in \partial\mathcal{A}'$ точка $\lambda(\alpha_+)$ имеет вид $\lambda(\alpha_+) = A'(A'(\lambda_+[\alpha])) = \lambda_+[\alpha]$, поэтому выполняется равенство

$$\Lambda(\alpha_+[\alpha]) = \langle \lambda_+[\alpha], \alpha_+[\alpha] \rangle - A(\lambda_+[\alpha]). \quad (6.25)$$

Из (6.24), (6.25) вытекает первое утверждение леммы 6.1.

2. Обозначим $\alpha^0 := \alpha - \alpha_+[\alpha]$ и определим открытое полупространство $\Pi := \{\lambda: \langle \lambda - \lambda_+[\alpha], \alpha^0 \rangle > 0\}$, ограниченное плоскостью, проходящей через точку $\lambda_+[\alpha]$ и имеющей нормаль α^0 . Допустим, что пересечение $\partial\mathcal{A} \cap \Pi$ непусто, т.е. существует точка $\mu_+ \in \partial\mathcal{A}$ такая, что $\langle \mu_+ - \lambda_+[\alpha], \alpha^0 \rangle > 0$. Рассмотрим случайную величину

$$\eta := \langle \mu_+, \xi_{\lambda_+[\alpha]} - \alpha_+[\alpha] \rangle.$$

Легко видеть, что $\mathbf{E}\eta = 0$, $\varphi_\eta(t) := \mathbf{E}e^{t\eta} < \infty$ при $t \in [0, 1]$, поэтому функция уклонений $\Lambda_\eta(v)$ в любой точке $v > 0$ положительна:

$$\Lambda_\eta(v) = \sup_t \{tv - A_\eta(t)\} > 0. \quad (6.26)$$

Поскольку

$$A_\eta(t) = A(t\mu_+ + \lambda_+[\alpha]) - A(\lambda_+[\alpha]) - t\langle \mu_+, \alpha_+[\alpha] \rangle,$$

то из неравенства

$$\Lambda(\alpha) \geq \sup_t \{ \langle t\mu_+ + \lambda_+[\alpha], \alpha \rangle - A(t\mu_+ + \lambda_+[\alpha]) \}$$

и (6.26) вытекает строгое неравенство

$$\Lambda(\alpha) > \langle \lambda_+[\alpha], \alpha \rangle - A(\lambda_+[\alpha]).$$

Последнее неравенство противоречит (6.24), поэтому принятое допущение о том, что пересечение $\partial\mathcal{A} \cap \Pi$ непусто, невозможно. Мы доказали, что для $\lambda_+ = \lambda_+[\alpha]$ равенство (6.6) имеет место.

Пусть теперь для точки $\alpha \notin \mathcal{A}'$ вектор $\alpha^0 = \alpha - \alpha_+$ удовлетворяет условию

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{A}} \langle \lambda, \alpha^0 \rangle = \langle \lambda_+, \alpha^0 \rangle, \quad (6.27)$$

где $\lambda_+ \in \partial\mathcal{A}$, $\alpha_+ = A'(\lambda_+) \in \partial\mathcal{A}'$. Очевидно, что

$$\Lambda(\alpha_+ + \alpha^0) \geq \langle \lambda_+, \alpha_+ + \alpha^0 \rangle - A(\lambda_+) = \Lambda(\alpha_+) + \langle \lambda_+, \alpha^0 \rangle.$$

С другой стороны,

$$\Lambda(\alpha_+ + \alpha^0) \leq \sup_{\lambda \in \mathcal{A}} \langle \lambda, \alpha^0 \rangle + \sup_{\lambda} \{ \langle \lambda, \alpha_+ \rangle - A(\lambda) \}.$$

В силу (6.27) правая часть последнего неравенства не больше, чем $\langle \lambda_+, \alpha^0 \rangle + \Lambda(\alpha_+)$, поэтому мы доказали, что

$$\Lambda(\alpha) = \Lambda(\alpha_+) + \langle \lambda_+, \alpha - \alpha_+ \rangle. \quad (6.28)$$

Из (6.28) и из уже доказанного первого утверждения леммы 6.1 вытекает, что

$$\lambda_+ = \lambda_+[\alpha], \quad \alpha_+ = \alpha_+[\alpha].$$

Второе утверждение леммы 6.1, а вместе с ним и лемма 6.1 доказаны.

6.4. Доказательство леммы 6.2. Для неотрицательной, выпуклой, непрерывной и линейной вдоль любого луча функции $h(t)$ множество $\mathcal{W}$ определим соотношением $\mathcal{W} = \{ \lambda: h^*(\lambda) = 0 \}$, где $h^*(\lambda)$ есть преобразование Лежандра над $h(t)$:

$$h^*(\lambda) = \sup_t \{ \langle \lambda, t \rangle - h(t) \}.$$

Убедимся сначала, что справедливо представление (ср. с (6.11), (6.13))

$$h(t) = \sup_{\lambda \in \mathcal{W}} \langle \lambda, t \rangle = \sup_{\lambda_+ \in \partial\mathcal{W}} \langle \lambda_+, t \rangle = \langle \lambda_+^{e(t)}, t \rangle, \quad (6.29)$$

где $\lambda_+^{e(t)}$ — точка границы $\partial\mathcal{W}$, в которой достигается супремум в (6.29). Функция $h^*(\lambda)$ выпукла и неотрицательна. В силу линейности функции

$h(t)$ по любому лучу $\{te; t > 0\}$, $e \in E$, функция $h^*(\lambda)$ принимает только значения 0, ∞ . Очевидно, что множество $\mathscr{W}$ выпукло, ограничено, замкнуто и содержит начало координат. Остается заметить, что (см. [8]) результат дважды примененного к выпуклой функции $h(t)$ преобразования Лежандра совпадает с ней самой:

$$h(t) = \sup_{\lambda} \{\langle \lambda, t \rangle - h^*(\lambda)\} = \sup_{\lambda \in \mathscr{W}} \langle \lambda, t \rangle.$$

Представление (6.29) установлено.

Выберем любую точку $\lambda_+ \in \partial \mathscr{W}$ на границе выпуклого множества $\mathscr{W}$. Тогда

$$H_{(\lambda_+)}(t) := h(t) - \langle \lambda_+, t \rangle = \sup_{\lambda \in \mathscr{W}} \langle (\lambda - \lambda_+), t \rangle \geq 0 \quad \text{при всех } t \in \mathbf{R}^d. \quad (6.30)$$

В силу (6.30) для $\lambda_+ \in \partial \mathscr{W}$

$$\varphi(\lambda_+) \leq \mathbf{E}(e^{\langle \lambda_+, \xi \rangle}; |\xi| \leq N) + c \int_{|t| \geq N} l(|t|) dt \leq e^{|\lambda_+|N} + c_1 \int_N^\infty v^{d-1} l(v) dv.$$

Поэтому, в силу условия (6.10), функция $\varphi(\lambda)$ конечна и непрерывна на границе $\partial \mathscr{W}$ выпуклого замкнутого ограниченного множества $\mathscr{W}$. Это означает, что $\mathscr{W} \subseteq \mathscr{A}$.

Убедимся теперь, что для любого $\lambda \notin \mathscr{W}$ выполняется $\varphi(\lambda) = \infty$. Для этого заметим, что для $\lambda \notin \mathscr{W}$ найдутся $e \in E$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ такие, что

$$\inf_{e' \in E, |e' - e| < \varepsilon} \{\langle \lambda, e' \rangle - h(e')\} \geq \delta.$$

Поэтому в конусе $\{te': e' \in E, |e' - e| < \varepsilon, t \geq N\}$ при некотором $c > 0$ для функции $e^{\langle \lambda, t \rangle} f(t)$ справедлива оценка снизу $e^{\langle \lambda, t \rangle} f(t) \geq ce^{\delta|t|} l(|t|)$. Отсюда следует, что $\varphi(\lambda) = \infty$. Мы доказали, что при любом вещественном β множество $\mathscr{A}$ является подмножеством $\mathscr{W}$. Поэтому при выполнении (6.10) имеет место равенство $\mathscr{A} = \mathscr{W}$. Формула (6.11) установлена. Поскольку очевидно, что правые части формул (6.11), (6.12) определяют одно множество, то формула (6.12) тоже доказана. Поскольку доказательство третьего утверждения леммы 6.2 совершенно аналогично доказательству конечности функции $\varphi(\lambda_+)$, а свойство [A] очевидным образом вытекает из условия (6.10), то лемма 6.2 доказана.

6.5. Доказательство леммы 6.3. 1. Поскольку для $u > 0$

$$\left. \frac{d^2}{du} h(ut) \right|_{u=1} = th''(t)t^T = 0,$$

то вектор t всегда является собственным вектором симметричной неотрицательно определенной матрицы $h''(t)$, отвечающим нулевому собственному числу:

$$th''(t) = 0. \quad (6.31)$$

Поэтому функция $h_0(t) := h(t) - \langle h'(t), t \rangle$ имеет нулевую производную:

$$h'_0(t) = h'(t) - h'(t) - th''(t) \equiv 0,$$

и, следовательно (в силу того, что $h_0(0) = 0$), тождественно равна нулю. Мы доказали первое соотношение в (6.15).

Вычисляя градиент и матрицу вторых производных функций $g(t) = |t|^2/2$, $g(t) = |t|$ (см. (1.3) в [1]), получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{|t|^2}{2}\right)' &= t, & \left(\frac{|t|^2}{2}\right)'' &= t' = I, \\ |t'| &= e(t), & |t|'' &= e'(t) = \frac{I}{|t|} - \frac{e^T(t)e(t)}{|t|}, \end{aligned} \quad (6.32)$$

где I — единичная матрица. Из формул (6.32) вытекает

$$\begin{aligned} h'(t) &= (|t|h(e(t)))' = e(t)h(e(t)) + |t|h'(e(t))e'(t) \\ &= e(t)h(e(t)) + |t|h'(e(t)) \frac{I}{|t|} - |t|h'(e(t)) \frac{e^T(t)e(t)}{|t|} \\ &= h'(e(t)) + e(t) \left[h(e(t)) - \langle h'(e(t)), e(t) \rangle \right]. \end{aligned}$$

В силу уже доказанного первого соотношения в (6.15) выполняется равенство $h(e(t)) - \langle h'(e(t)), e(t) \rangle = 0$, поэтому мы доказали, что $h'(t) = h'(e(t))$. Второе соотношение в (6.15) доказано.

Наконец, применяя (6.31) и (6.32), получаем

$$h''(t) = (h'(e(t)))' = h''(e(t))e'(t) = h''(e(t)) \left(\frac{I}{|t|} - \frac{e^T(t)e(t)}{|t|} \right) = \frac{h''(e(t))}{|t|}.$$

Третье соотношение в (6.15), а вместе с ним и первое утверждение леммы 6.3 доказаны.

2. Докажем второе утверждение леммы 6.3. Допустим сначала, что выполнено условие (6.10). Тогда в силу леммы 6.2 выполнено условие [A], и функция $h(t)$ представляется в виде (см. (6.13))

$$h(t) = \sup_{\lambda \in \mathcal{A}} \langle \lambda, t \rangle = \langle \lambda_+^{e(t)}, t \rangle,$$

где точка $\lambda_+^{e(t)}$ лежит на поверхности $\partial \mathcal{A}$ и является «самой крайней точкой множества $\mathcal{A}$ в направлении $e(t)$ ». Вычисляя производную вектор-функции $h(t)$, получаем

$$h'(t) = \langle \lambda_+^{e(t)}, t \rangle' = \lambda_+^{e(t)} + M(t),$$

где вектор-функция $M(t) := \frac{d}{dt} \langle \lambda_+^{e(t)}, v \rangle|_{v=t}$ удовлетворяет соотношению $M(t) = |t|M(e(t))$ и, следовательно, тождественно равна 0. Мы доказали,

что в каждом направлении e множество $\mathcal{A}$ имеет единственную крайнюю точку $\lambda_+^e = h'(e)$.

Допустим теперь, что точка λ_+ границы $\partial\mathcal{A}$ является «крайней» для двух разных направлений e' и e'' , т.е. $\lambda_+ = \lambda_+^{e'} = \lambda_+^{e''}$. Это означает, что в секторе $\{t = ue' + ve'' : u > 0, v > 0\}$ функция $h(t)$ меняется линейно:

$$h(ue' + ve'') = uh(e') + vh(e'').$$

Отсюда следует, что для t из сектора, в котором функция $h(t)$ меняется линейно, ранг матрицы вторых производных $h''(e(t))$ меньше $d - 1$. Это противоречит условию $[\mathcal{E}\mathcal{R}]_2$, поэтому сделанное допущение невозможно. Мы доказали, что для любой точки λ_+ границы $\partial\mathcal{A}$ существует единственное направление $e \in E$, для которого эта точка является «крайней», а единичный вектор e при этом является единичной нормалью к поверхности $\partial\mathcal{A}$ в точке λ_+ , направленной вне $\mathcal{A}$. При этом в силу леммы 6.2 выполняются равенства

$$\mathcal{A} = \mathcal{W} := \{\lambda : h^E(\lambda) \leq 0\}, \quad \partial\mathcal{A} = \partial\mathcal{W} := \{\lambda : h^E(\lambda) = 0\}.$$

Иначе говоря, мы доказали следующее свойство функции h , которое имеет место при выполнении $[\mathcal{E}\mathcal{R}]_2$ (вне зависимости от значения β).

[Н]. Для любого $e \in E$ точка $\lambda_+ = h'(e) := h'(t)|_{t=e}$ лежит на границе $\partial\mathcal{W}$, и вектор e является единичной нормалью в точке λ_+ , направленной вне $\mathcal{W}$; любая точка λ_+ границы $\partial\mathcal{W}$ имеет вид $\lambda_+ = h'(t) = h'(e(t))$ для некоторого ненулевого вектора $t \in \mathbf{R}^d$.

Из свойства [Н] вытекает, что функция $\lambda_+ = h'(e) := h'(t)|_{t=e}$ осуществляет взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение множества E на множество $\partial\mathcal{W}$, и поэтому $\partial\mathcal{W} = \{\lambda_+ = h'(e) : e \in E\}$.

Пусть теперь для точки $\alpha \notin \mathcal{A}'$ пара $(\lambda_+, \alpha_+) \in \partial\mathcal{A} \times \partial\mathcal{A}'$ является решением системы (6.16):

$$h'(\alpha - \alpha_+) = \lambda_+, \quad A'(\lambda_+) = \alpha_+.$$

Тогда $h'(\alpha - \alpha_+) = h'(e(\alpha - \alpha_+)) = \lambda_+$, и в силу свойства [Н], установленного выше, вектор $\alpha - \alpha_+$ является нормалью к поверхности $\partial\mathcal{A}$ в точке λ_+ , направленной вне множества $\mathcal{A}$. В силу утверждения 2 леммы 6.1 из последнего вытекает, что $\lambda_+ = \lambda_+[\alpha]$, $\alpha_+ = \alpha_+[\alpha]$, а в силу утверждения 1 той же леммы пара $(\lambda_+[\alpha], \alpha_+[\alpha])$ единственна. Существование и единственность решения системы (6.16) доказаны. Утверждение 2 леммы 6.3 при дополнительном условии (6.10) доказано.

3. Докажем третье утверждение и оставшуюся часть второго утверждения леммы 6.3. Рассмотрим сначала некоторые упрощающие соглашения. Для фиксированного направления $e^0 \in E$ рассмотрим тройку $(e^0, \lambda_+, \alpha_+) \in E \times \partial\mathcal{A} \times \partial\mathcal{A}'$, $\lambda_+ = h'(e^0)$, $\alpha_+ := A'(\lambda_+)$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что

а) фиксированный единичный вектор e^0 имеет вид $e^0 := (1, 0, \dots, 0) \in E$.

б) ортогональная матрица M_{e^0} , отвечающая фиксированному вектору e^0 (см. обозначения перед формулировкой теоремы 6.1), является единичной (иначе говоря, произведена нужная замена координат).

Кроме того,

с) сделаем еще одну замену переменных, заменив t_1 на v_1 и t_i на $\sqrt{b_i(e^0)}v_i$ для $i = 2, \dots, d$ (см. обозначения перед формулировкой теоремы 6.1).

Тем самым, в новых координатах, которые мы снова обозначим $t = (t_1, \dots, t_d)$, матрица M_{e^0} является единичной, а вектор $b(e^0) \in \mathbf{R}^d$ имеет вид $(0, 1, 1, \dots, 1)$, так что диагональная матрица $T(e^0)$ является единичной матрицей порядка $d - 1$.

Из условия $[\mathcal{E}\mathcal{R}]_2$ (при соглашениях а)–с)) вытекают следующие два соотношения для функции $H_{e^0}(t) := h(t) - \langle h'(e^0), t \rangle$: (а) для некоторых констант c, C таких, что $0 < c < C < \infty$, и для всех $e \in E$

$$c|Pe|^2 \leq H_{e^0}(e) \leq C|e|^2; \quad (6.33)$$

(б) при $|e - e^0| \rightarrow 0$

$$H_{e^0}(e) \sim \frac{|Pe|^2}{2}. \quad (6.34)$$

Соотношение (6.33) следует из соотношения (6.34). Для доказательства (6.34) достаточно рассмотреть функцию $\tilde{H}(Pt) := H_{e^0}((1, Pt))$. Воспользуемся разложением Тейлора функции $\tilde{H}(Pt)$: для $e \in E$, $e_1 > 0$

$$H_{e^0}(e) = e_1 \tilde{H}\left(\frac{Pe}{e_1}\right) = e_1 \tilde{H}(0) + \langle \tilde{H}'(0), Pe \rangle + \frac{1}{2e_1} Pe \tilde{H}''(\theta Pe)(Pe)^T,$$

где $\theta \in (0, 1)$. Поскольку $\tilde{H}(0) = 0$, $\tilde{H}'(0) = 0$ и квадратная порядка $d - 1$ матрица $(1/e_1)\tilde{H}''(\theta Pe)$ сходится при $|e - e^0| \rightarrow 0$ к единичной матрице того же порядка, то соотношения (а), (б) установлены.

Продолжим доказательство леммы 6.3. Убедимся, что если выполнено условие (6.17), то для $\lambda_+ = h'(e^0)$

$$\mathbf{E} m(|\xi|)e^{\langle \lambda_+, \xi \rangle} < \infty. \quad (6.35)$$

В силу (6.33) для некоторого $c > 0$ и всех t имеет место неравенство

$$H_{e^0}(t) \geq \frac{1}{2t_1} c|Pt|^2.$$

Поэтому для некоторого $M \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left(m(|\xi|)e^{\langle \lambda_+, \xi \rangle}; \max_{1 \leq i \leq d} |\xi_i| \geq M \right) \\ & \leq \int_{\max_{1 \leq i \leq d} |t_i| \geq M} m(|t|) \exp \left\{ -\frac{1}{2t_1} c|Pt|^2 \right\} dt. \end{aligned}$$

Замена $P t = \sqrt{t_1} P v$ позволяет получить для некоторого $C < \infty$ неравенство

$$\mathbf{E} \left(m(|\xi|) e^{(\lambda_+, \xi)}; \max_{1 \leq i \leq d} |\xi_i| \geq M \right) \leq C \int_M^\infty m(t_1) t_1^{(d-1)/2} l(t_1) dt_1 < \infty.$$

Мы показали, что при выполнении условия (6.17) имеет место (6.35). Таким образом, утверждение 3 леммы 6.3 доказано.

Вернемся к доказательству утверждения 2 леммы 6.3. Из уже доказанного утверждения 3 этой леммы вытекает, что при выполнении условия (6.14) множество $\mathcal{A}$ содержит множество $\mathcal{W} := \{\lambda: h^E(\lambda) \leq 0\}$. При доказательстве леммы 6.2 мы установили, что если $\lambda \notin \mathcal{W}$, то $\varphi(\lambda)$ равно ∞ при любом вещественном β . Тем самым, мы убедились, что при выполнении условия (6.14) множества $\mathcal{W}$ и $\mathcal{A}$ совпадают и выполнено условие [A]. Остается воспользоваться уже доказанным свойством [H] и соотношением $\partial \mathcal{W} = \{\lambda_+ = h'(e): e \in E\}$. Утверждение 2 леммы 6.3, а вместе с ним и лемма 6.3 доказаны.

6.6. Доказательство теоремы 6.1. В силу (6.8) задача отыскания асимптотики $\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\}$ при $x = n\alpha_+ + y$ сводится к задаче отыскания асимптотики вероятности

$$\mathbf{P}\{S_{\lambda_+}(n) - n\alpha_+ \in \Delta[y]\}, \quad (6.36)$$

где $\Delta \in [\Delta_1, \Delta_2]$, при $|y| \gg \sqrt{n \ln n}$.

Сначала мы найдем асимптотику вероятности (6.36) для частного случая $y = ue^0$, $u := |y|$, где направление $e^0 = (1, 0, \dots, 0) \in E$ фиксировано (см. соглашения а)–с), принятые выше). В дополнение к соглашениям а)–с), которые не ограничивают общности рассмотрений, будем считать, что функция $g(e)$ тождественно равна единице (см. определение класса $\mathcal{ER}$). Это последнее предположение несколько упростит доказательство; в общем случае доказательство почти не изменится. Для $\mathbf{F} \in \mathcal{ER}$ при $\lambda_+ = h'(e^0)$ распределение $\mathbf{F}_{\lambda_+}$ вектора ξ_{λ_+} имеет при $|t| \geq N$ плотность $f_{\lambda_+}(t)$ вида

$$f_{\lambda_+}(t) \sim \frac{1}{\varphi(\lambda_+)} e^{-H(t)} |t|^\beta L(|t|),$$

где $H(t) = H_{e^0}(t) := h(t) - \langle \lambda_+, t \rangle$.

Мы будем следовать схеме доказательства теоремы 9.2.1 в [5]. Обозначим

$$\zeta := \xi_{\lambda_+} - \alpha_+, \quad \zeta(i) := \xi_{\lambda_+}(i) - \alpha_+, \quad Z(n) := S_{\lambda_+}(n) - n\alpha_+,$$

$$G_n := \{Z(n) \in \Delta[y]\}, \quad B_j := \left\{ \zeta_1 < \frac{u}{r} \right\}, \quad u = |y|, \quad r > 1, \quad B := \bigcap_{j=1}^{n'} B_j$$

и для искомой вероятности $\mathbf{P}(G_n)$ воспользуемся соотношением

$$\mathbf{P}(G_n) = \mathbf{P}(G_n B) + \mathbf{P}(G_n \bar{B}), \quad (6.37)$$

где

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(G_n \bar{B}_j) \geq \mathbf{P}(G_n \bar{B}) \geq \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(G_n \bar{B}_j) - \sum_{i < j \leq n} \mathbf{P}(G_n \bar{B}_i \bar{B}_j). \quad (6.38)$$

1. *Оценка вероятности $\mathbf{P}(G_n B)$.* Как показано при доказательстве теоремы 9.2.1 в [5], для произвольного фиксированного $\kappa > 0$ можно выбрать $r > 2$ такое, что при $u \gg \sqrt{n \ln n}$, $n \rightarrow \infty$, выполнено равенство

$$\mathbf{P}(G_n B) = o\left(\Delta_1^d n l(u) R_{e^0}\left(\frac{n}{u}\right)\right), \quad (6.39)$$

где $\Delta_1 = u^{-\kappa}$.

2. *Оценка вероятности $\mathbf{P}(G_n \bar{B}_{n-1} \bar{B}_n)$.* В силу утверждения 3 леммы 6.3 для любого $\varepsilon > 0$ при $-\beta > (d+1)/2 + \varepsilon$ найдется $M_\varepsilon < \infty$ такое, что $\mathbf{E}|\zeta|^{-\beta-(d+1)/2-\varepsilon} \leq M_\varepsilon$. Поэтому в силу неравенства Чебышёва для любого $\varepsilon \in (0, -\beta - (d+1)/2)$

$$\mathbf{P}\{\bar{B}_j\} = \mathbf{P}\left\{\zeta_1 \geq \frac{u}{r}\right\} \leq \mathbf{P}\left\{|\zeta| \geq \frac{u}{r}\right\} \leq \frac{M_\varepsilon}{y^{-\beta-(d+1)/2-\varepsilon}}. \quad (6.40)$$

В силу (6.33) и (6.34) для некоторого $M < \infty$ плотность $p(v)$ случайного вектора ζ в области $\{v: v_1 \geq u/r\}$ допускает оценку

$$p(v) \leq M e^{-c|Pv|^2/u} l(u).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \sup_v \mathbf{P}\{Z(n-2) + \zeta(n-1) + v \in \Delta[y]\} \\ & \leq \Delta^d M l(u) \sup_v \mathbf{E} \exp\left\{-c \frac{|P(Z(n-2) + v)|^2}{u}\right\}. \end{aligned}$$

Поскольку в силу интегро-локальной теоремы Стоуна [6]

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \exp\left\{-c \frac{|P(Z(n-2) + v)|^2}{u}\right\} \\ & \leq e^{-\ln^2 u} + \mathbf{P}\left\{c \frac{|P(Z(n-2) + v)|^2}{u} \leq \ln^2 u\right\} \leq M R_{e^0}\left(\frac{n}{u}\right) \ln^{d-1} u, \end{aligned}$$

то получаем

$$\sup_v \mathbf{P}\{Z(n-2) + \zeta(n-1) + v \in \Delta[y]\} \leq \Delta^d M l(u) R_{e^0}\left(\frac{n}{u}\right) \ln^{d-1} u.$$

Отсюда в силу (6.40) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{G_n \overline{B}_{n-1} \overline{B}_n\} &\leqslant \sup_v \mathbf{P}\{Z(n-2) + \zeta(n-1) + v \in \Delta[y]\} \mathbf{P}\{\overline{B}_n\} \\ &\leqslant \Delta^d Ml(u) R_{e^0}\left(\frac{n}{u}\right) \ln^{d-1} u \frac{M_\varepsilon}{u^{-\beta-(d+1)/2-\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Поскольку при $-\beta > (d+1)/2 + 2$ в зоне $u \gg \sqrt{n \ln n}$, $u = O(n)$ и при $-\beta > (d+1)/2 + 1$ в зоне $u \gg n$ выполняется соотношение

$$n \ln^{d-1} u \frac{M_\varepsilon}{u^{-\beta-(d+1)/2-\varepsilon}} = o(1),$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то для любого $\Delta > 0$

$$\sum_{i < j \leqslant n} \mathbf{P}(G_n \overline{B}_i \overline{B}_j) = \Delta^d o\left(l(u) R_{e^0}\left(\frac{n}{u}\right)\right). \tag{6.41}$$

3. *Оценки сверху и снизу вероятности $\mathbf{P}(G_n \overline{B}_n)$* устанавливаются аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 9.2.1 в [5]. Поскольку

$$G_n \cap \left\{Z_1(n-1) < u\left(1 - \frac{1}{r}\right)\right\} \subseteq G_n \overline{B}_n \subseteq G_n \cap \left\{Z_1(n-1) < u\left(1 - \frac{1}{r}\right) + \Delta\right\},$$

то для некоторых функций $\varepsilon_1(\Delta) > 0$ и $\varepsilon_2(u) > 0$ таких, что $\varepsilon_1(\Delta) \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow 0$ и $\varepsilon_2(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$, и любых $\Delta \in (0, \Delta_1]$, $\Delta_1 > 0$, имеем

$$\mathbf{P}(G_n \overline{B}_n) = (1 + \theta(\varepsilon_1(\Delta) + \varepsilon_2(u))) \Delta^d E_{n-1}(u), \tag{6.42}$$

где $|\theta| \leqslant 1$ и

$$E_n(u) := \mathbf{E}\left(p(y - Z(n)); Z_1(n) \leqslant u\left(1 - \frac{1}{r}\right)\right).$$

Получим оценку сверху

$$E_n(u) \leqslant \frac{1}{\varphi(\lambda_+)} l(u) R_{e^0}\left(\frac{n}{u}\right) (1 + o(1)) \tag{6.43}$$

и оценку снизу

$$E_n(u) \geqslant \frac{1}{\varphi(\lambda_+)} l(u) R_{e^0}\left(\frac{n}{u}\right) (1 + o(1)) \tag{6.44}$$

в каждой из трех зон уклонений: 1) $u \gg n$, $n \rightarrow \infty$; 2) $u \sim sn$, $n \rightarrow \infty$; 3) $u \gg \sqrt{n \ln n}$, $u = o(n)$, $n \rightarrow \infty$.

Начнем с оценки сверху. Обозначим

$$\eta(n) := \frac{1}{\sqrt{n}} Z(n),$$

так что

$$E_n(u) = \mathbf{E} \left(p(y - \sqrt{n}\eta(n)); \eta_1(n) \leq \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{u}{\sqrt{n}} \right).$$

Заметим, что первая координата случайного вектора ζ удовлетворяет условию Крамера в отрицательном направлении, поэтому, не теряя нужной точности $o(R_{e^0}(n/u)l(u))$, можно заменить $E_n(y)$ на

$$E_n^{(1)}(u) := \mathbf{E} \left(p(y - \sqrt{n}\eta(n)); -\ln u \leq \eta_1(n) \leq \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{u}{\sqrt{n}} \right).$$

3.1. Оценка (6.43) в зоне $u \gg n$, $n \rightarrow \infty$. Поскольку

$$p(v) := f_{\lambda_+}(v + \alpha_+) \leq \frac{1}{\varphi(\lambda_+)} l(|v + \alpha_+|),$$

то в зоне $u \gg n$ при $r(u) = o(1)$ и некотором $M < \infty$ получаем оценку

$$\begin{aligned} E_n^{(1)}(u) &\leq \frac{1}{\varphi(\lambda_+)} \left[\mathbf{E} \left(l(|y - \sqrt{n}\eta(n)|); |\sqrt{n}\eta(n)| \leq r(u)u \right) \right. \\ &\quad \left. + Ml(u) \mathbf{P} \{ |\sqrt{n}\eta(n)| \geq r(u)u \} \right]. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Так как $-\beta > (d+1)/2 + 1$, то $\mathbf{E}|\zeta| < \infty$, и поэтому, если $r(u) \rightarrow 0$ достаточно медленно, в зоне $u \gg n$ в силу закона больших чисел второе слагаемое в правой части (6.45) пренебрежимо мало по сравнению с первым. Таким образом, учитывая, что $R_{e^0}(n/u) \sim 1$ в зоне $u \gg n$, получаем неравенство (6.43) в этой зоне.

3.2. Оценка (6.43) в зоне $u \sim sn$. В силу (6.33) для любого $\delta > 0$ вне конуса $\mathcal{C} := \{t = ue: |e - e^0| \leq \delta, u \geq N\}$ выполняется $H_{e^0}(v) \geq s|v|$, $s = s(\delta) > 0$. Поэтому

$$E_n^{(1)}(u) \leq \frac{1}{\varphi(\lambda_+)} E_n^{(2)}(u) + o \left(l(u) R_{e^0} \left(\frac{n}{u} \right) \right),$$

где

$$\begin{aligned} E_n^{(2)}(u) &:= \mathbf{E} \left(l(|X(y, n)|) e^{-H_{e^0}(X(y, n))}; \right. \\ &\quad \left. |P\eta(n)| \leq q(u) \frac{u}{\sqrt{n}}, -\ln u \leq \eta_1(n) \leq \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{u}{\sqrt{n}} \right), \end{aligned}$$

$X(y, n) := y - \sqrt{n}\eta(n)$, $q(u)$ достаточно медленно стремится к 0 при $u \rightarrow \infty$. В силу (6.33) и (6.34), при любом $\gamma > 0$, некоторых константах $M < \infty$, $c > 0$ и функции $r(u) = o(1)$, $u \rightarrow \infty$, получаем неравенство

$$E_n^{(2)}(u) \leq l(u) (E_n^{(3)}(u) + M E_n^{(4)}(u)),$$

где

$$E_n^{(3)}(u) := \mathbf{E} \left(\exp \left\{ - (1 - \gamma) \frac{n}{2u} |\mathbf{P}\eta(n)|^2 \right\}; -\ln u \leq \eta_1(n) \leq r(u) \frac{u}{\sqrt{n}} \right),$$

$$E_n^{(4)}(u) := \mathbf{E} \left(\exp \left\{ - c \frac{n}{2u} |\mathbf{P}\eta(n)|^2 \right\}; r(u) \frac{u}{\sqrt{n}} \leq \eta_1(n) \leq \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{u}{\sqrt{n}} \right).$$

При $-\beta > (d+1)/2 + 2$ в силу центральной предельной теоремы $\eta(n)$ слабо сходится по распределению к нормальному случайному вектору η . Если $y \sim sn$ для фиксированного $s > 0$, то

$$E_n^{(3)}(u) \sim \mathbf{E} \exp \left\{ - (1 - \gamma) \frac{1}{2s} |\mathbf{P}\eta|^2 \right\} \leq (1 + \varepsilon(\gamma)) R_{e^0} \left(\frac{1}{s} \right),$$

$$E_n^{(4)}(u) = o \left(R_{e^0} \left(\frac{1}{s} \right) \right).$$

Поскольку $R_{e^0}(n/u) \sim R_{e^0}(1/s)$, то в силу произвольности $\gamma > 0$ получаем оценку (6.43) в зоне $u \sim sn$.

3.3. Доказательство (6.43) в зоне $u = o(n)$, $u \gg \sqrt{n \ln n}$. Здесь мы воспользуемся интегро-локальной теоремой Стоуна [6], в которой при наших условиях (наличие ненулевой абсолютно непрерывной компоненты у распределения одного слагаемого) размер кубика можно выбрать зависящим от n и устремить к нулю с ростом $n \rightarrow \infty$ с любой степенной скоростью.

Поскольку в этом случае $R_{e^0}(n/u) \sim c(u/n)^{(d-1)/2}$, то можно воспользоваться неравенством

$$l(u)(E_n^{(3)}(u) + ME_n^{(4)}(u)) \leq l(u)(E_n^{(5)}(u) + ME_n^{(6)}(u)) + o \left(R_{e^0} \left(\frac{n}{u} \right) l(u) \right),$$

где

$$E_n^{(5)}(u) := \mathbf{E} \left(\exp \left\{ - (1 - \gamma) \frac{n}{2u} |\mathbf{P}\eta(n)|^2 \right\}; |\mathbf{P}\eta(n)| \leq 1 \right),$$

$$E_n^{(6)}(u) := \mathbf{E} \left(\exp \left\{ - c \frac{n}{2u} |\mathbf{P}\eta(n)|^2 \right\}; |\mathbf{P}\eta(n)| \leq 1, |\eta_1(n)| > N_u \right),$$

$N_u \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow \infty$. Докажем сначала, что

$$E_n^{(6)}(u) = o \left(R_{e^0} \left(\frac{n}{u} \right) \right). \quad (6.46)$$

Для фиксированного $N < \infty$ выполняется $E_n^{(6)}(u) \leq E_n^{(7)}(u)$, где

$$E_n^{(7)}(u) := \mathbf{E} \left(\exp \left\{ - c \frac{n}{2u} |\mathbf{P}\eta(n)|^2 \right\}; |\mathbf{P}\eta(n)| \leq 1, |\eta_1(n)| > N \right)$$

$$= E_n^{(8)}(u) - E_n^{(9)}(u),$$

$$E_n^{(8)}(u) := \mathbf{E} \left(\exp \left\{ - c \frac{n}{2u} |\mathbf{P}\eta(n)|^2 \right\}; |\mathbf{P}\eta(n)| \leq 1 \right),$$

$$E_n^{(9)}(u) := \mathbf{E} \left(\exp \left\{ - c \frac{n}{2u} |\mathbf{P}\eta(n)|^2 \right\}; |\mathbf{P}\eta(n)| \leq 1, |\eta_1(n)| \leq N \right).$$

В силу интегро-локальной теоремы, в которой размеры кубика можно выбирать порядка n^{-M} для любого $M < \infty$, имеем:

$$E_n^{(8)}(u) \sim \mathbf{E} \left(\exp \left\{ -c \frac{n}{2u} |\mathbf{P} \eta|^2 \right\}; |\mathbf{P} \eta| \leq 1 \right),$$

$$E_n^{(9)}(u) \sim \mathbf{E} \left(\exp \left\{ -c \frac{n}{2u} |\mathbf{P} \eta|^2 \right\}; |\mathbf{P} \eta| \leq 1, |\eta_1| \leq N \right).$$

Поэтому

$$E_n^{(8)}(u) \sim \mathbf{E} \exp \left\{ -c \frac{n}{2u} |\mathbf{P} \eta|^2 \right\} := R_{e^0}^{(0)} \left(\frac{n}{u} \right),$$

$$E_n^{(9)}(u) \sim \mathbf{E} \left(\exp \left\{ -c \frac{n}{2u} |\mathbf{P} \eta|^2 \right\}; |\eta_1| \leq N \right),$$

и при $N = N_u$, стремящемся к ∞ при $u \rightarrow \infty$ достаточно медленно,

$$E_n^{(6)}(u) \leq E_n^{(7)}(u) = E_n^{(8)}(u) - E_n^{(9)}(u) = o \left(R_{e^0}^{(0)} \left(\frac{n}{u} \right) \right) = o \left(R_{e^0} \left(\frac{n}{u} \right) \right).$$

Равенство (6.46) доказано.

Поскольку соотношение

$$E_n^{(5)}(u) \sim \mathbf{E} \exp \left\{ -(1-\gamma) \frac{n}{2u} |\mathbf{P} \eta|^2 \right\}$$

доказывается совершенно аналогично, то неравенство (6.43) в зоне $u \gg \sqrt{n \ln n}$, $u = o(n)$ получено. Оценка сверху (6.43) в каждой из трех зон установлена.

3.4. Оценка снизу. Неравенство (6.44) в двух зонах $u = o(n)$, $u \gg \sqrt{n \ln n}$ и $u \sim sn$ проверяется совершенно аналогично тому, как было доказано соотношение (6.43). Поэтому в пояснениях нуждается лишь доказательство (6.44) в области $u \gg n$ при $n \rightarrow \infty$. Повторяя предыдущие рассуждения (которые использовались при оценках сверху), приходим к тому, что нам достаточно оценить снизу функцию

$$\tilde{E}_n(u) := \mathbf{E} \left(\exp \left\{ -(1+\gamma) \frac{n}{2u} |\mathbf{P} \eta(n)|^2 \right\}; |\sqrt{n} \eta(n)| \leq r(u)u \right),$$

где $r(u) = o(1)$ при $u \rightarrow \infty$. При $-\beta > (d+1)/2 + 1$ имеем $\mathbf{E} |\zeta| < \infty$, и в силу закона больших чисел в зоне $u \gg n^2$

$$(1+\gamma) \frac{n}{2u} |\mathbf{P} \eta(n)|^2 = (1+\gamma) \frac{n^2}{2u} \left| \frac{\mathbf{P} \eta(n)}{\sqrt{n}} \right|^2 \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Поэтому $\tilde{E}_n(u) \sim 1$. При $-\beta > (d+1)/2 + 1$ имеем $\mathbf{E} |\zeta|^2 < \infty$, поэтому в зоне $u \gg n$ аналогичное соотношение следует из центральной

предельной теоремы. Оценка снизу (6.44) в каждой из трех зон установлена.

Завершим доказательство теоремы 6.1. Из соотношений (6.44), (6.42) и (6.43) для $\Delta \in (0, \Delta_1]$, где $\Delta_1 = o(1)$ при $u \rightarrow \infty$, вытекает соотношение

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(G_n \bar{B}_j) \sim \Delta^d n \frac{1}{\varphi(\lambda_+)} l(u) R_{e^0} \left(\frac{n}{u} \right), \quad u \gg \sqrt{n \ln n}. \quad (6.47)$$

Из соотношений (6.37)–(6.39), (6.41), (6.47), в свою очередь, вытекает утверждение (6.18), в котором $e(y) = e$ и направление $e = e^0 := (1, 0, \dots, 0) \in E$ фиксировано. Очевидно, что в качестве фиксированного направления $e(y) = e$ мы могли бы выбрать любое $e \in E$.

Далее, анализируя приведенное доказательство и привлекая при этом равномерный вариант интегро-локальной теоремы Стоуна (см. [7]), можно заметить, что все оценки, выполненные в этом доказательстве, равномерны по направлению $e = e(y) \in E$. Поэтому полученное асимптотическое представление равномерно в области $u := |y| \geq N_n \sqrt{n \ln n}$, где N_n — произвольная фиксированная последовательность, стремящаяся к ∞ при $n \rightarrow \infty$. Теорема 6.1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А., Могульский А. А. Вероятности больших отклонений для сумм независимых случайных векторов на границе и вне крамеровской зоны. I. — Теория вероятн. и ее примен., 2008, т. 53, в. 2, с. 336–344.
2. Боровков А. А., Могульский А. А. Большие отклонения и проверка статистических гипотез. Новосибирск: Наука, 1992, 223 с.
3. Zaiĭraev O. Large-deviation Theorems for Sums of Independent and Identically Distributed Random Vectors. Toruń: Uniwersytet Mikołaja Kopernika, 2005, 187 p.
4. Боровков А. А., Боровков К. А. О вероятностях больших отклонений для случайных блужданий. I. Распределения с правильно меняющимися хвостами. — Теор. вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 2, с. 209–232.
5. Боровков А. А., Боровков К. А. Асимптотический анализ случайных блужданий. I. Медленно убывающие распределения скачков. М.: Наука (в печати).
6. Stone C. On local and ratio limit theorems. — Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, v. II, part 2. Berkeley: Univ. of California Press, 1966, p. 217–224.
7. Боровков А. А., Могульский А. А. Интегро-локальные теоремы для сумм независимых случайных векторов в схеме серий. — Матем. заметки, 2006, т. 79, № 4, с. 468–482.
8. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973, 469 с.

Поступила в редакцию
6.IV.2008