Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, Е. Е. Дьяконова, Волны в редуцированных ветвящихся процессах в случайной среде, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 4, 665–683

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2459>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:49:09

© 2008 г.

ВАТУТИН В. А.*, ДЬЯКОНОВА Е. Е.*

**ВОЛНЫ В РЕДУЦИРОВАННЫХ ВЕТВЯЩИХСЯ
ПРОЦЕССАХ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ¹⁾**

Рассматривается ветвящийся процесс $Z(n)$, $n = 0, 1, \dots$, в случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных производящих функций $f_0(s), f_1(s), \dots$. Пусть $S_0 = 0$, $S_k = X_1 + \dots + X_k$, $k \geq 1$, — сопровождающее случайное блуждание этого процесса, где $X_i = \ln f'_{i-1}(1)$, а $\tau(n)$ — самая левая точка, в которой достигается минимум блуждания $\{S_k, k \geq 0\}$ на интервале $[0, n]$. Обозначим $Z(k, m)$ число частиц, существовавших в ветвящемся процессе в момент времени $k \leq m$ и имеющих ненулевое потомство в момент m . В предположении, что сопровождающее случайное блуждание удовлетворяет условию Дони $\mathbf{P}(S_n > 0) \rightarrow \rho \in (0, 1)$, $n \rightarrow \infty$, доказаны (в рамках так называемого quenched approach) условные предельные теоремы при $n \rightarrow \infty$ для распределения случайной величины $Z(nt_1, nt_2)$, $0 < t_1 < t_2 < 1$, при условии $Z(n) > 0$. Показано, что вид предельных распределений существенно зависит от взаимного расположения величины $\tau(n)$ и отрезка $[nt_1, nt_2]$.

Ключевые слова и фразы: ветвящиеся процессы в случайной среде, редуцированные процессы, условие Дони, условные предельные теоремы.

1. Введение. Настоящая работа представляет собой продолжение статей [7]–[12], посвященных исследованию таких ветвящихся процессов в случайной среде (ВПСС), в которых вероятностные законы размножения частиц различных поколений независимы и одинаково распределены. Детальное построение модели рассматриваемых нами ВПСС содержится в работах [1]–[3] и [9]–[12]. Здесь мы лишь напомним основные понятия и результаты, относящиеся к этим процессам.

Пусть $\mathbf{F} = \{f(s)\}$ — множество всех производящих функций, соответствующих вероятностным распределениям с носителями, сосредоточенными на множестве неотрицательных целых чисел $\mathbf{N}_0$, снабженное

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: vatutin@mi.ras.ru, elena@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00035), INTAS (проект 03-51-5018), NWO 047.016.013 и программы РАН «Современные проблемы теоретической математики».

равномерной метрикой. Предположим, что на борелевских подмножествах пространства $\mathbf{F}$ задана вероятностная мера $\mathbb{P}$. Выбирая из множества $\mathbf{F}$ в соответствии с мерой $\mathbb{P}$ последовательность производящих функций $f_n(s)$, $n = 0, 1, \dots$, и фиксируя ее, мы получаем бесконечную последовательность, называемую случайной средой. Последовательность случайных величин $\{Z(n); n \geq 0\}$, задаваемая соотношениями

$$Z(0) = 1,$$

$$\mathbb{E}[s^{Z(n+1)} | f_0, f_1, \dots, f_n; Z(0), Z(1), \dots, Z(n)] = (f_n(s))^{Z(n)}, \quad n \geq 0,$$

называется ветвящимся процессом в случайной среде $\{f_n(s), n = 0, 1, \dots\}$.

Пусть

$$\begin{aligned} f &\stackrel{d}{=} f_0, \quad X_j := \ln f'_{j-1}(1), \\ \eta_j &:= f''_{j-1}(1)(f'_{j-1}(1))^{-2}, \quad j \in \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}; \\ X &\stackrel{d}{=} X_1; \quad S_0 := 0, \quad S_n := X_1 + \dots + X_n, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Последовательность $\{S_n; n \geq 0\}$ называется сопровождающим случайным блужданием, соответствующим ВПСС.

Далее мы предполагаем, что с вероятностью 1

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty \quad \text{и} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty. \quad (2)$$

Условие (2) означает, что мы рассматриваем невырожденный критический ВПСС (см. [4] и [11]). В дальнейшем для краткости мы будем опускать слово «невырожденный» и называть процесс, удовлетворяющий (2), просто критическим ВПСС.

Обозначим $Z(k, m)$ число частиц в процессе $\{Z(n); n \geq 0\}$ в момент времени k , $0 \leq k \leq m$, имеющих ненулевое потомство в момент времени m . Набор $\{Z(k, m); 0 \leq k \leq m < \infty\}$ называется редуцированным ветвящимся процессом для первоначального процесса $\{Z(n); n \geq 0\}$.

Редуцированные процессы для обычных процессов Гальтона–Ватсона изучали Фляйшманн и Прен [17], Зубков [14] и Фляйшманн и Зигмунд-Шультце [18]. Первые результаты для редуцированных ВПСС с дробно-линейными производящими функциями получили Боровков и Ватутин [5] и Фляйшманн и Ватутин [16], применяя так называемый annealed approach (т.е. усредняя характеристики и меры относительно распределения $\mathbb{P}$, заданного на пространстве сред). В дальнейшем Ватутин [6] обобщил результаты работы [5] и доказал, следуя annealed approach, условную предельную теорему для критических редуцированных ветвящихся процессов в случае производящих функций общего вида.

Редуцированные ВПСС в рамках так называемого quenched approach (т.е. в ситуации, когда вероятности событий и меры рассматриваются как случайные элементы, зависящие от реализации среды) впервые исследовали Ватутин и Дьяконова в [7] и [12]. Они доказали условные предельные теоремы при $n \rightarrow \infty$ для распределения случайной величины $Z(nt, n)$, $0 < t < 1$, при условии $Z(n) > 0$ в случае критического ВПСС.

В настоящей статье мы уточняем результаты упомянутых работ и доказываем условные предельные теоремы при $n \rightarrow \infty$ о распределении величины $Z(nt_1, nt_2)$, $0 < t_1 < t_2 < 1$, при условии $Z(n) > 0$. Отложив строгие формулировки и обсуждения до следующего пункта, отметим, что результаты работ [7] и [12] указывают на то, что вид искомым предельных распределений должен зависеть от взаимного расположения интервала $[nt_1, nt_2]$ и величины

$$\tau(n) := \min\{i \in [0, n]: S_j \geq S_i, j = 0, 1, \dots, n\},$$

— самой левой точки, в которой достигается минимум случайного блуждания $\{S_k; k \geq 0\}$ на интервале $[0, n]$.

2. Основные условия. Будем предполагать, что распределение случайной величины X либо нерешетчато, либо центрально решетчато (т.е. X принимает лишь значения hk , $h > 0$, $k \in \mathbf{Z}$, и $\mathbf{P}(X = 0) > 0$) и что сопровождающее случайное блуждание удовлетворяет следующему условию Дони.

Условие A1. Существует число $0 < \rho < 1$ такое, что

$$\mathbf{P}(S_n > 0) \rightarrow \rho, \quad n \rightarrow \infty.$$

Заметим, что, согласно [13], условие A1 эквивалентно формально более слабому условию Спицера

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(S_k > 0) \rightarrow \rho, \quad n \rightarrow \infty.$$

Пусть

$$\gamma_0 := 0, \quad \gamma_{j+1} := \min(n > \gamma_j: S_n < S_{\gamma_j}), \quad j \geq 0,$$

и

$$\Gamma_0 := 0, \quad \Gamma_{j+1} := \min(n > \Gamma_j: S_n > S_{\Gamma_j}), \quad j \geq 0,$$

— строгие убывающие и соответственно возрастающие лестничные моменты случайного блуждания $\{S_n, n \geq 0\}$. Введем функции

$$V(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_{\gamma_j} \geq -x), \quad x > 0, \quad V(0) = 1, \quad V(x) = 0, \quad x < 0,$$

$$U(x) := 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(S_{\Gamma_j} < x), \quad x > 0, \quad U(0) = 1, \quad U(x) = 0, \quad x < 0.$$

В дальнейшем мы будем отождествлять вероятностную производящую функцию

$$f_n(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \pi_n(k) s^k$$

с бесконечномерным вектором π_n :

$$\pi_n := \{\pi_n(0), \pi_n(1), \pi_n(2), \dots\}, \quad \pi_n(k) \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \pi_n(k) = 1, \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

Для $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi(k) s^k \stackrel{d}{=} f_n(s)$ и $a \in \mathbf{N}_0$ положим

$$\Theta(a) := \frac{\sum_{k=a}^{\infty} k^2 \pi(k)}{(\sum_{k=0}^{\infty} k \pi(k))^2}.$$

Условие A2. Существуют числа $\varepsilon_0 > 0$ и $a \in \mathbf{N}_0$ такие, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\ln^+ \Theta(a))^{1/\rho+\varepsilon_0} < \infty \quad \text{и} \quad \mathbf{E}[V(X)(\ln^+ \Theta(a))^{1+\varepsilon_0}] < \infty, \\ \mathbf{E}(\ln^+ \Theta(a))^{1/(1-\rho)+\varepsilon_0} < \infty \quad \text{и} \quad \mathbf{E}[U(-X)(\ln^+ \Theta(a))^{1+\varepsilon_0}] < \infty. \end{aligned}$$

Более детальное обсуждение этих условий можно найти в [4] и [10].

Пусть Ω_n — пространство элементарных событий, соответствующее наборам $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-1}, Z(0), Z(1), \dots, Z(n)$; $\Omega = \Omega_{\infty}$, а

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-1}; Z(0), Z(1), \dots, Z(n)), \quad n \in \mathbf{N}_0, \quad \mathcal{F} := \bigvee_n \mathcal{F}_n$$

— последовательность естественных σ -алгебр, порожденных ВПСС. Мы будем использовать символы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$ для обозначения математического ожидания и вероятности относительно вероятностной меры, порождаемой исходной мерой ветвящегося процесса на наборах $(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n, \dots; Z(0), Z(1), \dots, Z(n), \dots)$ (за исключением некоторых случаев, которые, как мы надеемся, не приведут к недоразумениям), а символы $\mathbf{E}_{\pi}$ и $\mathbf{P}_{\pi}$ — для обозначения условного математического ожидания и условной вероятности при фиксированной среде $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n, \dots)$. Тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ является нашим основным вероятностным пространством. Нам также потребуются две копии этого пространства, обозначаемые $(\Omega^-, \mathcal{F}^-, \mathbf{P}^-)$ и $(\Omega^+, \mathcal{F}^+, \mathbf{P}^+)$, на которых заданы две последовательности случайных элементов $\{f_n^-, n \geq 0\}$ и соответственно $\{f_n^+, n \geq 0\}$, порождающие соответствующие им сопровождающие случайные блуждания $\{S_n^-, n \geq 0\}$ и $\{S_n^+, n \geq 0\}$. В дальнейшем нам будет удобно все параметры и случайные величины, связанные с $\{f_n^-, n \geq 0\}$ и $\{f_n^+, n \geq 0\}$, снабжать индексами $-$ и $+$ соответственно. Например, мы будем использовать случайные величины

$$\Gamma^- := \min\{n \geq 1: S_n^- \geq 0\}, \quad \gamma^+ := \min\{n \geq 1: S_n^+ < 0\}. \quad (3)$$

Положим $D = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1} \mathbf{P}(S_j = 0)$ и $\mathcal{A}_{k,p} := \{\Gamma^- > k; \gamma^+ > p\}$. Свяжем с исходными мерами $\mathbf{P}^-$ и $\mathbf{P}^+$ вероятностную меру $\hat{\mathbf{P}}$ на измеримом пространстве $(\Omega^- \times \Omega^+, \mathcal{F}^- \times \mathcal{F}^+)$, полагая для $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_k^- \times \mathcal{F}_p^+$

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathcal{A}) := e^D \int_{\mathcal{A}} U(-S_k^-) V(S_p^+) I\{\mathcal{A}_{k,p}\} d(\mathbf{P}^- \times \mathbf{P}^+),$$

где $I\{\mathcal{A}\}$ — индикатор события $\mathcal{A}$ (более детальное описание этой меры, а также обоснование целесообразности ее введения можно найти в [11]). В соответствии с этим определением, мы будем использовать символ $\hat{\mathbf{E}}$ для обозначения математического ожидания относительно меры $\hat{\mathbf{P}}$.

3. Основные результаты. Пусть $\mathbf{M} = \mathbf{M}([0, \infty))$ — множество всех (возможно, несобственных) вероятностных мер на $[0, \infty)$, снабженное топологией слабой сходимости. Для меры $\mathcal{M} \in \mathbf{M}$ и функции $J: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ положим $\mathcal{M}[J] := \int J(x) \mathcal{M}(dx)$, если указанный интеграл существует. В дальнейшем мы будем рассматривать вероятностные распределения на $\mathbf{M}$, индуцированные значениями вероятностных мер $\mathbf{P}$ и соответственно $\hat{\mathbf{P}}$, на реализациях случайной среды. Способ построения таких распределений будет ясен из последующего изложения. Такой подход позволит нам трактовать элементы множества $\mathbf{M}$ как случайные меры и даст возможность изучать условные распределения случайных мер на $\mathbf{M}$ при условии осуществления интересующих нас событий A из естественной σ -алгебры на $\mathbf{M}$. Для мер $\mathcal{M}^{(n)}$ и $\mathcal{M}$ из $\mathbf{M}$ мы будем использовать выражение

$$\mathcal{M}^{(n)} \xrightarrow{w_A(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} \mathcal{M}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4)$$

для обозначения следующего вида условной слабой сходимости случайных мер $\mathcal{M}^{(n)}$ к случайной мере $\mathcal{M}$ при $n \rightarrow \infty$: для любых неслучайных непрерывных функций $J, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ с компактными носителями

$$\mathbf{E}[g(\mathcal{M}^{(n)}[J]) \mid \mathcal{M}^{(n)} \in A] \longrightarrow \hat{\mathbf{E}}[g(\mathcal{M}[J])], \quad n \rightarrow \infty.$$

При $A = \mathbf{M}$ условная сходимость превращается в безусловную, и в этом случае вместо (4) мы будем писать

$$\mathcal{M}^{(n)} \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} \mathcal{M}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Сопоставим мерам $\mathcal{M}^{(n)} \in \mathbf{M}$, $n \in \mathbf{N}_0$, и $\mathcal{M} \in \mathbf{M}$ их преобразования Лапласа

$$M^{(n)}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathcal{M}^{(n)}(dx), \quad M(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathcal{M}(dx), \quad \lambda \in [0, \infty).$$

С мерами $\mathcal{M}^{(n)}$ и $\mathcal{M}$ из $\mathbf{M}$, носители которых сконцентрированы на множестве $\mathbf{N}_0$, мы свяжем их производящие функции

$$m^{(n)}(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}^{(n)}(k) s^k, \quad m(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}(k) s^k$$

(строго говоря, здесь нужно было бы писать $\mathcal{M}^{(n)}(\{k\})$ и $\mathcal{M}(\{k\})$, но мы не будем использовать такие обозначения, чтобы избежать излишне громоздких формул).

Чтобы отличать меры, носители которых целиком лежат в $\mathbf{N}_0$, от мер, не обладающих таким свойством, нам будет иногда удобно вместо (4) использовать эквивалентные записи

$$m^{(n)}(s) \xrightarrow{w_A(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} m(s), \quad n \rightarrow \infty,$$

если носители мер $\mathcal{M}^{(n)}$ и $\mathcal{M}$ целиком сосредоточены в $\mathbf{N}_0$, и

$$M^{(n)}(\lambda) \xrightarrow{w_A(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} M(\lambda), \quad n \rightarrow \infty,$$

если носители мер $\mathcal{M}^{(n)}$ и $\mathcal{M}$ не сконцентрированы полностью в $\mathbf{N}_0$.

Эти же обозначения будут использоваться и в других сходных ситуациях.

Для $0 \leq k \leq n$ положим

$$\beta_n(k) := \frac{1}{\mathbf{E}_\pi[Z(k, n) \mid Z(n) > 0]} = \frac{1 - f_{0,n}(0)}{e^{S_k}(1 - f_{k,n}(0))}.$$

В частности,

$$\mathbf{E}_\pi[Z(n) \mid Z(n) > 0] = \frac{e^{S_n}}{1 - f_{0,n}(0)} = \frac{1}{\beta_n(n)}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} L^{(n)}(\lambda) &:= \mathbf{E}_\pi[e^{-\lambda Z(n) \beta_n(n)} \mid Z(n) > 0] \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathbf{P}_\pi(Z(n) \beta_n(n) \in dx \mid Z(n) > 0) =: \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathcal{L}^{(n)}(dx). \end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{W}^{(n)}(dx) = x \mathcal{L}^{(n)}(dx)$ и

$$W^{(n)}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathcal{W}^{(n)}(dx) = -\frac{d}{d\lambda} L^{(n)}(\lambda).$$

Следующее утверждение является комбинацией нескольких результатов, доказанных в [10] (см. следствие 1, теорему 1 и лемму 7 упомянутой работы).

Теорема 1. Если выполнены условия A1 и A2, то существует случайная мера $\mathcal{L}$ (являющаяся с вероятностью 1 собственной и невырожденной) такая, что

$$L^{(n)}(\lambda) \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} L(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathcal{L}(dx), \quad n \rightarrow \infty.$$

Более того, если $\mathcal{W}(x) = x \mathcal{L}(dx)$, то при $n \rightarrow \infty$

$$W^{(n)}(\lambda) \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} W(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathcal{W}(dx) = -\frac{dL(\lambda)}{d\lambda}.$$

Выберем два числа $0 < t_1 < t_2 < 1$ и начиная с этого момента будем считать, что они *фиксированы раз и навсегда*. Кроме того, условимся подразумевать под произведением вида nt , $t \in (0, 1)$, целое число $[nt]$. Положим

$$f_{k,n}(s) := f_k(f_{k+1}(\cdots(f_{n-1}(s))\cdots)), \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad f_{n,n}(s) := s, \\ f_{n,m}(s) := f_{n-1}(f_{n-2}(\cdots(f_m(s))\cdots)), \quad n \geq m+1.$$

Для выбранных выше чисел $0 < t_1 < t_2 < 1$ и величины

$$\Theta_n(t_1, t_2) := \frac{1 - f_{0,nt_1}(0)}{e^{S_{nt_1}}(1 - f_{nt_1,nt_2}(0))}$$

введем меру

$$\mathcal{M}^{(n)}(dx) = \mathcal{M}_{t_1, t_2}^{(n)}(dx) := \mathbf{P}_\pi \left[Z(nt_1, nt_2) \Theta_n(t_1, t_2) \in dx \mid Z(n) > 0 \right]$$

с преобразованием Лапласа

$$M_{t_1, t_2}^{(n)}(\lambda) := \mathbf{E}_\pi \left[s^{-\lambda Z(nt_1, nt_2) \Theta_n(t_1, t_2)} \mid Z(n) > 0 \right] = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathcal{M}_{t_1, t_2}^{(n)}(dx).$$

Зададим также меру

$$\mu^{(n)}(k) := \mu_{t_1, t_2}^{(n)}(k) = \mathbf{P}_\pi [Z(nt_1, nt_2) = k \mid Z(n) > 0], \quad k \in \mathbf{N}_0,$$

с производящей функцией

$$m^{(n)}(s) = m_{t_1, t_2}^{(n)}(s) := \mathbf{E}_\pi [s^{Z(nt_1, nt_2)} \mid Z(n) > 0] := \sum_{k=1}^\infty \mu^{(n)}(k) s^k. \quad (5)$$

В последующих рассуждениях существенное значение имеют следующие четыре события:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1(n) := \{\tau(n) < nt_1\}, \\ A_2 &= A_2(n) := \{\tau(n) \in [nt_1, nt_2]\}, \\ A_3 &= A_3(n) := \{\tau(n) > nt_2, \tau(nt_2) \leq nt_1\}, \\ A_4 &= A_4(n) := \{\tau(n) > nt_2, \tau(nt_2) > nt_1\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь мы можем сформулировать условные предельные теоремы (в рамках quenched approach) о распределении процесса $Z(nt_1, nt_2)$ при условии осуществления одного из событий $A_i(n)$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Теорема 2. Если выполнены условия A_1 и A_2 , то

$$M_{t_1, t_2}^{(n)}(\lambda) \xrightarrow{w_{A_1}(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} L(\lambda) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где $L(\lambda)$ — преобразование Лапласа, упомянутое в теореме 1.

Теорема 3. При выполнении условий A_1 и A_2 ,

$$M_{t_1, t_2}^{(n)}(\lambda) \xrightarrow{w_{A_3}(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} W(\lambda) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где $W(\lambda)$ — преобразование Лапласа, упомянутое в теореме 1.

Теорема 4. Если выполнены условия A1 и A2, то для $i = 2$ и $i = 4$

$$m_{t_1, t_2}^{(n)}(s) \xrightarrow{w_{A_i}(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} s \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Для того, чтобы дать неформальную интерпретацию наших результатов, напомним, что (см. [15, гл. IV, § 20]) при выполнении условия A1

$$n^{-1}\tau(n) \xrightarrow{d} \tau, \quad n \rightarrow \infty, \quad (7)$$

где τ — случайная величина, удовлетворяющая обобщенному закону арксинуса с параметром ρ :

$$\mathbf{P}(\tau \leq x) = \frac{\sin \pi \rho}{\pi} \int_0^x \frac{dy}{y^{1-\rho}(1-y)^\rho}, \quad x \in [0, 1].$$

Кроме того, в соответствии с теоремой 1 работы [10], существует положительная и конечная с вероятностью 1 случайная величина $\hat{\Theta}$ такая, что

$$\Theta_n(t_1, t_2) \exp\{S_{\tau(nt_1, nt_2)} - S_{\tau(nt_1)}\} \xrightarrow{d} \hat{\Theta}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (8)$$

для любых $0 < t_1 < t_2 < 1$, где

$$\tau(nt_2, nt_1) = \min\{i \in (nt_1, nt_2]: S_j \geq S_i, j = nt_1 + 1, \dots, nt_2\}.$$

Выберем теперь достаточно «большое» n , зафиксируем реализацию среды $(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$ и рассмотрим случайную величину $Z(nt_1, nt_2)$, равную числу частиц, существовавших в момент времени nt_1 и имеющих ненулевое потомство в момент времени nt_2 . Перемещая точки t_1, t_2 по интервалу $[0, 1]$ справа налево, с соблюдением условия $t_1 \leq t_2$, и начиная движение с точек $t_1 = t_2 = 1$, мы будем наблюдать следующую типичную картину.

Если $\tau(n) < nt_1$, то $\tau(n) = \tau(nt_1)$, и следовательно, согласно соотношению (8) и теореме 2, $Z(nt_1, nt_2) \asymp \exp\{S_{\tau(nt_1, nt_2)} - S_{\tau(n)}\}$ при $n \rightarrow \infty$.

Если $\tau(n) \in [nt_1, nt_2]$, то $\mathbf{P}_\pi(Z(nt_1, nt_2) = 1) \approx 1$ при $n \rightarrow \infty$. Это, нестрого говоря, означает, что все частицы, существующие в процессе $\{Z(k), k \geq 0\}$ в момент времени nt_2 , являются потомками одной частицы, существовавшей в момент времени nt_1 . Аналогичная картина наблюдается и при $\{\tau(n) > nt_2 > \tau(nt_2) > nt_1\}$.

И наконец, если $\{\tau(n) > nt_2 > nt_1 \geq \tau(nt_2)\}$, то $\tau(nt_2) = \tau(nt_1)$, что в силу (8) и теоремы 3 приводит к соотношению $Z(nt_1, nt_2) \asymp \exp\{S_{\tau(nt_1, nt_2)} - S_{\tau(nt_1)}\}$ при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, при смещении точек $t_1 \leq t_2$ от 1 к 0, величина $Z(nt_1, nt_2)$ меняется волнообразно. При этом логарифмы амплитуд волн определяются (с точностью до случайных констант) разностями $S_{\tau(nt_1, nt_2)} - S_{\tau(nt_1)}$.

4. Вспомогательные утверждения. Для $k \leq n$ обозначим

$$\sigma_n(k) := \frac{e^{S_k}(1 - f_{k,n}(0))}{1 - f_{0,n}(0)}. \quad (9)$$

Лемма 1. Если выполнены условия A1 и A2, то для фиксированного $0 < t < 1$

$$\{\sigma_n(nt) \mid \tau(n) > nt\} \xrightarrow{d} 1.$$

Для доказательства этого утверждения достаточно применить следствие 4 работы [10] с $\beta_n(k) = 1/\sigma_n(k)$.

В дальнейшем для краткости мы будем использовать следующие обозначения:

$$a := f_{nt_1, nt_2}(0), \quad (10)$$

$$y_1 := 1 - a = 1 - f_{nt_1, nt_2}(0), \quad y_2 := f_{nt_1, n}(0) - f_{nt_1, nt_2}(0). \quad (11)$$

Лемма 2. Справедливо представление

$$m^{(n)}(s) = m_{t_1, t_2}^{(n)}(s) = \frac{f_{0, nt_1}(a + sy_1) - f_{0, nt_1}(a + sy_2)}{1 - f_{0, n}(0)}. \quad (12)$$

Доказательство. Ясно, что

$$m^{(n)}(s) = \frac{\mathbf{E}_\pi[s^{Z(nt_1, nt_2)}] - \mathbf{E}_\pi[s^{Z(nt_1, nt_2)} I\{Z(n) = 0\}]}{1 - f_{0, n}(0)}, \quad s \in [0, 1]. \quad (13)$$

Несложно также видеть, что

$$\mathbf{E}_\pi[s^{Z(nt_1, nt_2)}] = f_{0, nt_1}(f_{nt_1, nt_2}(0) + s(1 - f_{nt_1, nt_2}(0))). \quad (14)$$

С другой стороны, для $s_1 \in [0, 1]$, $s_2 \in [0, 1]$

$$\mathbf{E}_\pi[s_1^{Z(nt_1, nt_2)} s_2^{Z(nt_2)} I\{Z(n) = 0\}] = \mathbf{E}_\pi[s_1^{Z(nt_1, nt_2)} (s_2 f_{nt_2, n}(0))^{Z(nt_2)}] \quad (15)$$

и

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_\pi[s_1^{Z(nt_1, nt_2)} s_2^{Z(nt_2)}] \\ &= f_{0, nt_1} \left(f_{nt_1, nt_2}(0) + (1 - f_{nt_1, nt_2}(0)) s_1 \frac{f_{nt_1, nt_2}(s_2) - f_{nt_1, nt_2}(0)}{1 - f_{nt_1, nt_2}(0)} \right). \end{aligned}$$

Отсюда, полагая $s_1 = s$ и $s_2 = 1$ в (15), получаем

$$\mathbf{E}_\pi[s^{Z(nt_1, nt_2)} I\{Z(n) = 0\}] = f_{0, nt_1} \left(f_{nt_1, nt_2}(0) + s(f_{nt_1, n}(0) - f_{nt_1, nt_2}(0)) \right). \quad (16)$$

Соотношения (13)–(16) дают (12).

Лемма доказана.

Введем функцию

$$m^{(n)*}(s) = m_{t_1, t_2}^{(n)*}(s) := s \frac{f'_{0, nt_1}(a + sy_1)}{e^{S_{nt_1}}} =: \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{(n)*}(k) s^k \quad (17)$$

и обозначим

$$d(\mu^{(n)}, \mu^{(n)*}) := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |\mu^{(n)}(k) - \mu^{(n)*}(k)|$$

расстояние по вариации между мерами $\mu^{(n)}$ и $\mu^{(n)*}$.

Лемма 3. Если выполнены условия A1 и A2, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(d(\mu^{(n)}, \mu^{(n)*}) > \varepsilon \mid \tau(n) > nt_1) = 0.$$

Доказательство. Запишем $f_{0,nt_1}(s)$ в виде

$$f_{0,nt_1}(s) = \sum_{h=0}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)}(h) s^h. \quad (18)$$

Из леммы 2 и определений (17) и (18) следует, что

$$\begin{aligned} m^{(n)}(s)(1 - f_{0,n}(0)) &= f_{0,nt_1}(a + y_1 s) - f_{0,nt_1}(a + y_2 s) \\ &= \sum_{h=1}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)}(h) \sum_{k=1}^h C_h^k s^k a^{h-k} (y_1^k - y_2^k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} s^k (y_1^k - y_2^k) \sum_{h=k}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)}(h) C_h^k a^{h-k} \end{aligned} \quad (19)$$

и

$$\begin{aligned} m^{(n)*}(s) e^{S_{nt_1}} &= \sum_{h=1}^{\infty} h \mathcal{F}^{(n)}(h) s (a + y_1 s)^{h-1} \\ &= \sum_{h=1}^{\infty} h \mathcal{F}^{(n)}(h) \sum_{k=1}^h C_{h-1}^{k-1} s^k y_1^{k-1} a^{h-k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} s^k y_1^{k-1} \sum_{h=k}^{\infty} h \mathcal{F}^{(n)}(h) C_{h-1}^{k-1} a^{h-k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} s^k y_1^{k-1} k \sum_{h=k}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)}(h) C_h^k a^{h-k}. \end{aligned} \quad (20)$$

Объединяя (5), (17), (19) и (20), находим

$$\begin{aligned} \mu^{(n)}(k) &= \frac{y_1^k - y_2^k}{1 - f_{0,n}(0)} \sum_{h=k}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)}(h) C_h^k a^{h-k}, \\ \mu^{(n)*}(k) &= k y_1^{k-1} e^{-S_{nt_1}} \sum_{h=k}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)}(h) C_h^k a^{h-k}. \end{aligned}$$

Поскольку $0 \leq y_2 \leq y_1 \leq 1$, то

$$k y_1^{k-1} (y_1 - y_2) - \frac{k(k-1)}{2} y_1^{k-2} (y_1 - y_2)^2 \leq y_1^k - y_2^k \leq k y_1^{k-1} (y_1 - y_2).$$

Используя эти оценки, равенство $y_1 - y_2 = 1 - f_{nt_1,n}(0)$ и определение (9), получаем

$$\frac{y_1^k - y_2^k}{1 - f_{0,n}(0)} - ky_1^{k-1}e^{-S_{nt_1}} \leq ky_1^{k-1}e^{-S_{nt_1}}(\sigma_n(nt_1) - 1)$$

и

$$\begin{aligned} & ky_1^{k-1}e^{-S_{nt_1}}(\sigma_n(nt_1) - 1) - \frac{k(k-1)}{2}y_1^{k-2}\frac{(1 - f_{nt_1,n}(0))^2}{1 - f_{0,n}(0)} \\ & \leq \frac{y_1^k - y_2^k}{1 - f_{0,n}(0)} - ky_1^{k-1}e^{-S_{nt_1}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \left| \mu^{(n)}(k) - \mu^{(n)*}(k) \right| \leq e^{-S_{nt_1}}(\sigma_n(nt_1) - 1) \sum_{h=k}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)}(h) C_h^k a^{h-k} y_1^{k-1} k \\ & + \frac{(1 - f_{nt_1,n}(0))^2}{1 - f_{0,n}(0)} \sum_{h=k}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)}(h) C_h^k a^{h-k} y_1^{k-2} \frac{k(k-1)}{2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Заметим теперь, что в силу равенства $a + y_1 = 1$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=k}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)}(h) C_h^k a^{h-k} y_1^{k-1} k = \sum_{h=1}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)}(h) \sum_{k=1}^h C_h^k a^{h-k} y_1^{k-1} k \\ & = \sum_{h=1}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)}(h) h(a + y_1)^{h-1} = \sum_{h=1}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)}(h) h = \mathbf{E}_{\pi}[Z(nt_1)] = e^{S_{nt_1}} \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=k}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)}(h) C_h^k a^{h-k} y_1^{k-2} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2} \mathbf{E}_{\pi}[Z(nt_1) Z(nt_1 - 1)].$$

Нетрудно проверить (см. [11, с. 39]), что

$$\mathbf{E}_{\pi}[Z(nt_1)Z(nt_1 - 1)] = (f_{0,nt_1}(s))''_{s=1} = 2e^{2S_{nt_1}}b_{nt_1}, \quad (22)$$

где (см. (1))

$$b_r := \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f_k''(1)}{(f_k'(1))^2} e^{-S_k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{r-1} \eta_{k+1} e^{-S_k}. \quad (23)$$

Так как

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - f_{nt_1,n}(0))^2}{2(1 - f_{0,n}(0))} \mathbf{E}_{\pi}[Z(nt_1) Z(nt_1 - 1)] = \sigma_n^2(nt_1)(1 - f_{0,n}(0)) b_{nt_1} \\ & \leq \sigma_n^2(nt_1) e^{S_{\tau(n)}} b_{nt_1}, \end{aligned} \quad (24)$$

то, суммируя (21) по k от 1 до ∞ и используя предыдущие оценки, нетрудно установить, что

$$2d(\mu^{(n)}, \mu^{(n)*}) \leq \sigma_n(nt_1) - 1 + \sigma_n^2(nt_1) e^{S_{\tau(n)} b_{nt_1}}. \quad (25)$$

Заметим наконец, что для любого целого N и любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(e^{S_{\tau(n)} b_{nt_1}} > \varepsilon; \tau(n) > nt_1) \\ & \leq \mathbf{P}(nt_1 + N > \tau(n) > nt_1) + \mathbf{P}(e^{S_{\tau(n)} b_{\tau(n)-N}} > \varepsilon), \end{aligned} \quad (26)$$

где первый член в правой части (26) пренебрежимо мал при $n \rightarrow \infty$ согласно обобщенному закону арксинуса, в то время как

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(e^{S_{\tau(n)} b_{\tau(n)-N}} > \varepsilon) = 0$$

по лемме 15 из [10]. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(e^{S_{\tau(n)} b_{nt_1}} > \varepsilon; \tau(n) > nt_1) = 0. \quad (27)$$

Отсюда, используя лемму 1, получаем, что при выполнении условия $\tau(n) > nt_1$ величина $\sigma_n^2(nt_1) e^{S_{\tau(n)} b_{nt_1}}$ стремится к нулю по вероятности при $n \rightarrow \infty$. Вспоминая теперь оценку (24) и применяя лемму 1, заключаем, что при выполнении условия $\tau(n) > nt_1$ правая часть (25) стремится к нулю по вероятности при $n \rightarrow \infty$.

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь пару последовательностей случайной среды $\{f_n^-, f_n^+; n \geq 0\}$, заданную на измеримом пространстве $(\Omega^- \times \Omega^+, \mathcal{F}^- \times \mathcal{F}^+)$, и соответствующую ей пару сопровождающих случайных блужданий $\{S_n^-, S_n^+; n \geq 0\}$. Следующее утверждение, связывающее свойства этих двух сред, было доказано в [10]:

Если выполнены условия A1 и A2 и

$$\zeta_{l,m}^-(s) := \frac{1 - f_{l,m}^-(s)}{e^{S_l^- - S_m^-}}, \quad m \in \mathbf{N}_0, \quad l \geq m + 1,$$

то $\hat{\mathbf{P}}$ -н.н. существует и является положительным предел

$$\zeta := \lim_{\min(l,r) \rightarrow \infty} \zeta_{l,0}^-(f_{0,r}^+(0)) \leq 1. \quad (28)$$

Для $l, m, k \in \mathbf{N}$ с $m \leq k$ введем обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma(l, m, k) &:= \frac{e^{-S_m^+ - S_l^-} (1 - f_{l,0}^-(f_{0,k}^+(0)))}{1 - f_{m,k}^+(0)} = \frac{e^{-S_m^+} \zeta_{l,0}^-(f_{0,k}^+(0))}{1 - f_{m,k}^+(0)}, \\ \Theta(l, m, k) &:= \frac{e^{-S_m^+ - S_l^-} (1 - f_{l,0}^-(f_{0,m}^+(0)))}{1 - f_{m,k}^+(0)} = \frac{e^{-S_m^+} \zeta_{l,0}^-(f_{0,m}^+(0))}{1 - f_{m,k}^+(0)}. \end{aligned}$$

Лемма 4. Если выполнены условия A1 и A2, то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Theta(l, m, k) = 0 \quad \widehat{\mathbf{P}}\text{-п.н.}$$

Доказательство. Несложно видеть, что

$$\Theta(l, m, k) \leq e^{-S_m^+} (1 - f_{m,k}^+(0))^{-1}. \quad (29)$$

Применяя рассуждения, близкие к тем, которые использовались при доказательстве леммы 2 в [12], можно показать, что правая часть неравенства (29) стремится к нулю $\widehat{\mathbf{P}}$ -п.н. при $m \rightarrow \infty$.

Лемма доказана.

Для $l, m, k \in \mathbf{N}$, где $m \leq k$, положим

$$\begin{aligned} R_m^{(l,k)}(\lambda) &:= 1 - \frac{1 - f_{l,0}^-(f_{0,m}^+(1 - (1 - e^{-\lambda \Gamma(l,m,k)})(1 - f_{m,k}^+(0))))}{1 - f_{l,0}^-(f_{0,k}^+(0))}, \\ T_m^{(l,k)}(\lambda) &:= 1 - \frac{1 - f_{l,0}^-(f_{0,m}^+(1 - (1 - e^{-\lambda \Theta(l,m,k)})(1 - f_{m,k}^+(0))))}{1 - f_{l,0}^-(f_{0,m}^+(0))}. \end{aligned} \quad (30)$$

Несложно видеть, что $T_m^{(l,k)}(\lambda)$ является преобразованием Лапласа некоторой вероятностной меры $\mathcal{T}_m^{(l,k)}$:

$$T_m^{(l,k)}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathcal{T}_m^{(l,k)}(dx).$$

Лемма 5. Если условия A1 и A2 выполнены, то для любого $\lambda > 0$

$$\lim_{\min(l,m) \rightarrow \infty} T_m^{(l,k)}(\lambda) = L(\lambda) \quad \widehat{\mathbf{P}}\text{-п.н.}$$

Доказательство. В силу леммы 3 работы [12]

$$\lim_{\min(l,m) \rightarrow \infty} R_m^{(l,k)}(\lambda) = L(\lambda) \quad \widehat{\mathbf{P}}\text{-п.н.} \quad (31)$$

Так как $m \leq k$, то из (28) следует, что $\widehat{\mathbf{P}}$ -п.н.

$$\lim_{\min(l,m) \rightarrow \infty} \frac{\Theta(l, m, k)}{\Gamma(l, m, k)} = \lim_{\min(l,m) \rightarrow \infty} \frac{\zeta_{l,0}^-(f_{0,m}^+(0))}{\zeta_{l,0}^-(f_{0,k}^+(0))} = 1. \quad (32)$$

Применяя рассуждения, сходные с теми, которые использовались при доказательстве леммы 3 в [12], можно показать при помощи (32) и леммы 4, что для любого $\lambda > 0$ $\widehat{\mathbf{P}}$ -п.н.

$$\lim_{\min(l,m) \rightarrow \infty} \frac{T_m^{(l,k)}(\lambda)}{R_m^{(l,k)}(\lambda)} = 1. \quad (33)$$

Теперь утверждение леммы вытекает из соотношений (31)–(33).

Обозначим

$$T_m^{(l,k)*}(\lambda) := -\frac{d}{d\lambda} T_m^{(l,k)}(\lambda). \quad (34)$$

Лемма 6. Если выполнены условия A1 и A2, то для любого $\lambda > 0$

$$\lim_{\min(l,m) \rightarrow \infty} T_m^{(l,k)*}(\lambda) e^{-\lambda \Theta(l,m,k)} = -L'(\lambda) \quad \widehat{\mathbf{P}}\text{-п.н.}$$

Доказательство. Заметим, что $T_m^{(l,k)}(\lambda)$ и $L(\lambda)$ являются аналитическими функциями в области $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Опираясь на этот факт и используя лемму 5 и соотношение (34), получаем, что для любого $\lambda > 0$

$$\lim_{\min(l,m) \rightarrow \infty} T_m^{(l,k)*}(\lambda) = -L'(\lambda) \quad \widehat{\mathbf{P}}\text{-п.н.} \quad (35)$$

Утверждение леммы вытекает теперь из (35) и леммы 4.

5. Доказательства теорем. Отметим сначала, что из обобщенного закона арксинуса и определения (6) событий $A_i(n)$, $i = 1, 2, 3, 4$, следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_1(n)) &= \mathbf{P}(\tau \leq t_1), & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_2(n)) &= \mathbf{P}(\tau \in [t_1, t_2]), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_3(n)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\tau(nt_2) \leq nt_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\tau(n) \leq nt_1) \\ &= \mathbf{P}\left(\tau \leq \frac{t_1}{t_2}\right) - \mathbf{P}(\tau \leq t_1), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_4(n)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\tau(nt_2) > nt_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\tau(n) \in [nt_1, nt_2]) \\ &= \mathbf{P}\left(\tau > \frac{t_1}{t_2}\right) - \mathbf{P}(\tau \in [t_1, t_2]). \end{aligned}$$

Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_i(n)) > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. Откуда вытекает, что для любого допустимого события $D(n)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(D(n) \mid A_i(n)) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(D(n); A_i(n)) = 0. \quad (36)$$

В этом пункте мы будем часто использовать этот факт без дополнительных пояснений.

Доказательство теоремы 2. Для $m, n \in \mathbf{N}$, $m < n$, положим

$$\alpha_n(m) := \frac{1 - f_{0,m}(0)}{1 - f_{0,n}(0)}.$$

Очевидно, что $\alpha_n(m) \geq 1$. Введем функцию

$$h^{(n)}(s) = h_{t_1, t_2}^{(n)}(s) := \frac{f_{0, nt_1}(a + sy_2) - f_{0, nt_1}(0)}{1 - f_{0, n}(0)}$$

(см. (10) и (11)). Несложно заметить, что $h^{(n)}(s)$ является производящей функцией (неотрицательной) меры на $\mathbf{N}_0$, с весом

$$h^{(n)}(1) = \frac{f_{0, n}(0) - f_{0, nt_1}(0)}{1 - f_{0, n}(0)} = \alpha_n(nt_1) - 1.$$

Пусть

$$\begin{aligned} T^{(n)}(\lambda) &= T_{t_1, t_2}^{(n)}(\lambda) := \frac{f_{0, nt_1}(a + e^{-\lambda \Theta_n(t_1, t_2)} y_1) - f_{0, nt_1}(0)}{1 - f_{0, nt_1}(0)} \\ &=: \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathcal{T}^{(n)}(dx) \end{aligned} \quad (37)$$

и

$$\begin{aligned} H^{(n)}(\lambda) &= H_{t_1, t_2}^{(n)}(\lambda) := h^{(n)}(e^{-\lambda \Theta_n(t_1, t_2)}) \\ &=: \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathcal{H}_{t_1, t_2}^{(n)}(dx) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathcal{H}^{(n)}(dx). \end{aligned}$$

Легко видеть, что $\mathcal{T}^{(n)}$ и $\mathcal{H}^{(n)}$ являются положительными мерами такими, что

$$H^{(n)}(0) = \int_0^\infty \mathcal{H}^{(n)}(dx) = \alpha_n(nt_1) - 1, \quad T^{(n)}(0) = \int_0^\infty \mathcal{T}^{(n)}(dx) = 1. \quad (38)$$

Пусть

$$d(\mathcal{M}^{(n)}, \mathcal{T}^{(n)}) := \frac{1}{2} \int_0^\infty |\mathcal{M}^{(n)}(dx) - \mathcal{T}^{(n)}(dx)|$$

— расстояние по вариации между мерами $\mathcal{M}^{(n)}$ и $\mathcal{T}^{(n)}$. Учитывая (12), несложно понять, что

$$M_{t_1, t_2}^{(n)}(\lambda) = m^{(n)}(e^{-\lambda \Theta_n(t_1, t_2)}) = \alpha_n(nt_1) T^{(n)}(\lambda) - H^{(n)}(\lambda). \quad (39)$$

Следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(d(\mathcal{M}^{(n)}, \mathcal{T}^{(n)}) > \varepsilon \mid A_1(n)) = 0 \quad (40)$$

и

$$T^{(n)}(\lambda) \xrightarrow{w_{A_1}(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} L(\lambda). \quad (41)$$

Из (38) и (39) получаем

$$\begin{aligned} 2d(\mathcal{M}^{(n)}, \mathcal{T}^{(n)}) &= \int_0^\infty |(\alpha_n(nt_1) - 1) \mathcal{T}^{(n)}(dx) - \mathcal{H}^{(n)}(dx)| \\ &\leq (\alpha_n(nt_1) - 1) \int_0^\infty \mathcal{T}^{(n)}(dx) + \int_0^\infty \mathcal{H}^{(n)}(dx) \\ &\leq 2(\alpha_n(nt_1) - 1). \end{aligned} \quad (42)$$

Согласно следствию 3 работы [10], для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|\alpha_n(nt_1) - 1| > \varepsilon \mid A_1(n)) = 0.$$

Объединяя это соотношение с (42), приходим к (40).

Согласно определению сходимости $\xrightarrow{w_{A_1}(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})}$, для доказательства (41) нужно показать, что для любых неслучайных непрерывных функций $J, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ с компактными носителями

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[g(\mathcal{T}^{(n)}[J]) \mid A_1(n)] = \hat{\mathbf{E}}[g(\mathcal{L}[J])]. \quad (43)$$

Несложно проверить, используя (30) и (37), что для $l > 0$

$$\mathbf{E}[g(\mathcal{T}^{(n)}[J]) \mid \tau(n) = l < nt_1] = \mathbf{E}[g(\mathcal{T}_{nt_1-l}^{(l, nt_2-l)}[J]) \mid \mathcal{A}_{l, n-l}],$$

где $\mathcal{T}_m^{(l, k)}$ — мера с преобразованием Лапласа $T_m^{(l, k)}(\lambda)$, определенным равенством (30), и $\mathcal{A}_{l, n-l} = \{\Gamma^- > l, \gamma^+ > n - l\}$ (см. (3)). Согласно лемме 5, $\mathcal{T}_m^{(l, nt_2-l)}[J] \rightarrow \mathcal{L}[J]$ $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. при $\min(l, m) \rightarrow \infty$, $m < nt_2 - l$. Отсюда и из леммы 3 работы [10] вытекает, что для любых неслучайных функций $J, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ с компактными носителями

$$\begin{aligned} & \lim_{\min(l, nt_1-l) \rightarrow \infty} \mathbf{E}[g(\mathcal{T}^{(n)}[J]) \mid \tau(n) = l < nt_1] \\ &= \lim_{\min(l, nt_1-l) \rightarrow \infty} \mathbf{E}[g(\mathcal{T}_{nt_1-l}^{(l, nt_2-l)}[J]) \mid \mathcal{A}_{l, n-l}] = \hat{\mathbf{E}}[g(\mathcal{L}[J])]. \end{aligned} \quad (44)$$

Для завершения доказательства (43) осталось использовать при $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ формулу полной вероятности

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[g(\mathcal{T}^{(n)}[J]); A_1(n)] &= \sum_{0 \leq l/t_1 \leq n\varepsilon} \mathbf{E}[g(\mathcal{T}_{nt_1-l}^{(l, nt_2-l)}[J]) \mid \mathcal{A}_{l, n-l}] \mathbf{P}(\tau(n) = l) \\ &+ \sum_{n\varepsilon < l/t_1 < n(1-\varepsilon)} \mathbf{E}[g(\mathcal{T}_{nt_1-l}^{(l, nt_2-l)}[J]) \mid \mathcal{A}_{l, n-l}] \mathbf{P}(\tau(n) = l) \\ &+ \sum_{n(1-\varepsilon) \leq l/t_1 \leq n} \mathbf{E}[g(\mathcal{T}_{nt_1-l}^{(l, nt_2-l)}[J]) \mid \mathcal{A}_{l, n-l}] \mathbf{P}(\tau(n) = l), \end{aligned} \quad (45)$$

устремить n к бесконечности, заметить, что первая и третья суммы пренебрежимо малы в силу ограниченности функции g и обобщенного закона арксинуса (см. (7)), согласно которому

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\tau(n) \in [0, nt_1\varepsilon] \cup [nt_1(1-\varepsilon), nt_1]) = 0,$$

а затем оценить вторую сумму, опираясь на (44).

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Введем функции

$$\begin{aligned} T^{(n)*}(\lambda) &= T_{t_1, t_2}^{(n)*}(\lambda) := \frac{f'_{0, nt_1}(1 - (1 - e^{-\lambda \Theta_n(t_1, t_2)})(1 - f_{nt_1, nt_2}(0)))}{e^{S_{nt_1}}}, \\ W^{(n)*}(\lambda) &= W_{t_1, t_2}^{(n)*}(\lambda) := T^{(n)*}(\lambda) e^{-\lambda \Theta_n(t_1, t_2)} =: \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathcal{W}^{(n)*}(dx). \end{aligned}$$

Легко видеть, что функция $T^{(n)*}(\lambda)$ и определенная в (37) функция $T^{(n)}(\lambda)$ являются аналитическими в области $\operatorname{Re} \lambda > 0$ и

$$T^{(n)*}(\lambda) = -\frac{d}{d\lambda} T^{(n)}(\lambda).$$

По лемме 6 для доказательства теоремы достаточно установить, что (см. теорему 1)

$$W_{t_1, t_2}^{(n)*}(\lambda) \xrightarrow{w_{A_3(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})}} W(\lambda), \quad \lambda > 0.$$

Таким образом, нужно показать, что для любых неслучайных непрерывных функций $J, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ с компактными носителями

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[g(\mathscr{W}^{(n)*}[J]) \mid A_3(n)] = \hat{\mathbf{E}}[g(\mathscr{W}[J])]. \quad (46)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[g(\mathscr{W}^{(n)*}[J]); A_3(n)] &= \mathbf{E}[g(\mathscr{W}^{(n)*}[J]); \tau(nt_2) \leq \tau(nt_1)] \\ &\quad - \mathbf{E}[g(\mathscr{W}^{(n)*}[J]); \tau(n) \leq nt_1]. \end{aligned} \quad (47)$$

Докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[g(\mathscr{W}^{(n)*}[J]); \tau(n) \leq nt_1] = \hat{\mathbf{E}}[g(\mathscr{W}[J])]\mathbf{P}(\tau \leq t_1). \quad (48)$$

Действительно, несложно проверить, что

$$\mathbf{E}[g(\mathscr{W}^{(n)*}[J]); \tau(n) = l < nt_1] = \mathbf{E}[g(\mathscr{W}^{(l, nt_1-l, nt_2-l)*}[J]) \mid \mathscr{A}_{l, n-l}],$$

где

$$T_{nt_1-l}^{(l, nt_2-l)*}(\lambda) e^{-\lambda \Theta(l, nt_1-l, nt_2-l)} =: \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathscr{W}^{(l, nt_1-l, nt_2-l)*}(dx).$$

Согласно лемме 6, $\mathscr{W}^{(l, m, k)*}[J] \rightarrow \mathscr{W}[J]$ $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. при $\min(l, m) \rightarrow \infty$, $m < k$. Отсюда и из леммы 3 в [10] следует, что для любых неслучайных непрерывных функций $J, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ с компактными носителями

$$\begin{aligned} &\lim_{\min(l, nt_1-l) \rightarrow \infty} \mathbf{E}[g(\mathscr{W}^{(n)*}[J]) \mid \tau(n) = l < nt_1] \\ &= \lim_{\min(l, nt_1-l) \rightarrow \infty} \mathbf{E}[g(\mathscr{W}^{(l, m, nt_2-l)*}[J]) \mid \mathscr{A}_{l, n-l}] = \hat{\mathbf{E}}[g(\mathscr{W}[J])]. \end{aligned} \quad (49)$$

При помощи (49) несложно прийти к (48), применяя рассуждения, использованные при выводе (43) из соотношения (44). Используя аналогичные соображения, можно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[g(\mathscr{W}^{(n)*}[J]); \tau(nt_2) \leq nt_1] = \hat{\mathbf{E}}[g(\mathscr{W}[J])]\mathbf{P}\left(\tau \leq \frac{t_1}{t_2}\right). \quad (50)$$

Теперь соотношения (47)–(50), свойство (36) и разложение $\mathbf{E}[g(\mathscr{W}^{(n)*}[J]); A_3(n)]$ на три слагаемых, аналогичное (45), влекут (46).

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. В силу леммы 3 достаточно убедиться в том, что при $n \rightarrow \infty$

$$m^{(n)*}(s) \xrightarrow{w_{A_i}(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} s, \quad i = 2, 4. \quad (51)$$

Пусть $\delta_1(\{1\}) = 1$, $\delta_1(\{k\}) = 0$ при $k \neq 1$, $k \in \mathbf{N}_0$, — вероятностная мера на $\mathbf{N}_0$ с единичным атомом в точке 1. Оценим расстояние по вариации $d(\delta_1, \mu^{(n)*})$ между мерой δ_1 и мерой $\mu^{(n)*}$, введенной в (17). Заметим, что для доказательства (51) достаточно проверить, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(d(\delta_1, \mu^{(n)*}) > \varepsilon \mid A_i(n)) = 0, \quad i = 2, 4,$$

или, ввиду представления $\{\tau(nt_2) > nt_1\} = A_2(n) \cup A_4(n)$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(d(\delta_1, \mu^{(n)*}) > \varepsilon \mid \tau(nt_2) > nt_1) = 0. \quad (52)$$

Ясно, что

$$d(\delta_1, \mu^{(n)*}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |\mu^{(n)*}(k) - \delta_1(k)| = 1 - \mu^{(n)*}(1). \quad (53)$$

Из соотношения (17), определяющего меру $m^{(n)*}(s)$, следует, что

$$\mu^{(n)*}(1) = \frac{f'_{0,nt_1}(f_{nt_1,nt_2}(0))}{e^{S_{nt_1}}}.$$

Ввиду неравенств $e^{S_{nt_1}} - f'_{0,nt_1}(s) \leq f''_{0,nt_1}(1)(1-s)$ и $1 - f_{0,nt_2}(0) \leq e^{S_{\tau(nt_2)}}$ имеем

$$\begin{aligned} 1 - \mu^{(n)*}(1) &\leq \frac{f''_{0,nt_1}(1)(1 - f_{nt_1,nt_2}(0))}{e^{S_{nt_1}}} \\ &= 2b_{nt_1}e^{S_{nt_1}}(1 - f_{nt_1,nt_2}(0)) \\ &= 2b_{nt_1}(1 - f_{0,nt_2}(0))\sigma_{nt_2}(nt_1) \leq \sigma_{nt_2}(nt_1)e^{S_{\tau(nt_2)}}b_{nt_1}, \end{aligned} \quad (54)$$

где случайная величина b_r та же, что и в (23). По лемме 1

$$\{\sigma_{nt_2}(nt_1) \mid \tau(nt_2) > nt_1\} \xrightarrow{d} 1. \quad (55)$$

С другой стороны, соотношение (27) дает

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(e^{S_{\tau(nt_2)}}b_{nt_1} \mid \tau(nt_2) > nt_1) = 0. \quad (56)$$

Объединяя (53)–(56), получаем (52), что, как мы видели, влечет (51).

Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Athreya K. B., Karlin S.* On branching processes with random environments. I: Extinction probability. — *Ann. Math. Statist.*, 1971, v. 42, № 5, p. 1499–1520.
2. *Athreya K. B., Karlin S.* On branching processes with random environments. II: Limit theorems. — *Ann. Math. Statist.*, 1971, v. 42, № 6, p. 1843–1858.
3. *Athreya K. B., Ney P. E.* *Branching Processes.* New York–Heidelberg: Springer-Verlag, 1972, 287 p.
4. *Afanasyev V. I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A.* Criticality for branching processes in random environment. — *Ann. Probab.*, 2005, v. 33, № 2, p. 645–673.
5. *Borovkov K. A., Vatutin V. A.* Reduced critical branching processes in random environment. — *Stochastic Process. Appl.*, 1997, v. 71, № 2, p. 225–240.
6. *Ватутин В. А.* Редуцированные ветвящиеся процессы в случайной среде. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, т. 47, в. 1, с. 21–38.
7. *Vatutin V. A., Dyakonova E. E.* Reduced branching processes in random environment. — *Mathematics and Computer Science. II: Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities.* Ed. by B. Chauvin et al. Basel: Birkhäuser, 2002, p. 455–467.
8. *Vatutin V. A., Dyakonova E. E.* Yaglom type limit theorem for branching processes in random environment. — *Mathematics and Computer Science. III: Algorithms, Trees, Combinatorics, and Probabilities.* Ed. by M. Drmota et al. Basel: Birkhäuser, 2004, p. 375–385.
9. *Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е.* Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона в случайной среде. I: предельные теоремы. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, т. 48, в. 2, с. 274–300.
10. *Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е.* Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона в случайной среде. II: конечномерные распределения. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, т. 49, в. 2, с. 231–268.
11. *Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е.* Ветвящиеся процессы в случайной среде и бутылочные горлышки в эволюции популяций. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, т. 51, в. 1, с. 22–46.
12. *Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е.* Предельные теоремы для редуцированных ветвящихся процессов в случайной среде. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, т. 52, в. 2, с. 271–300.
13. *Doney R. A.* Spitzer's condition and the ladder variables in random walks. — *Probab. Theory Related Fields*, 1995, v. 101, № 4, p. 577–580.
14. *Зубков А. М.* Предельные распределения расстояния до ближайшего общего предка. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1975, т. 20, в. 3, с. 614–623.
15. *Снуцер Ф.* *Принципы случайного блуждания.* М.: Мир, 1969, 472 с.
16. *Fleischmann K., Vatutin V. A.* Reduced subcritical Galton–Watson processes in a random environment. — *Adv. Appl. Probab.*, 1999, v. 31, № 1, p. 88–111.
17. *Fleischmann K., Prehn U.* Ein Grenzwertsatz für subkritische Verzweigungsprozesse mit endlich vielen Typen von Teilchen. — *Math. Nachr.*, 1974, v. 64, p. 357–362.
18. *Fleischmann K., Siegmund-Schultze R.* The structure of reduced critical Galton–Watson processes. — *Math. Nachr.*, 1977, v. 79, p. 233–241.

Поступила в редакцию
23.IV.2007