Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Колокольцов, Обобщенные случайные блуждания в непрерывном времени (STRW), субординация временами достижения и дробная динамика, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 4, 684–703

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2460>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 16:35:01

© 2008 г.

КОЛОКОЛЬЦОВ В. Н.*

ОБОБЩЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ В НЕПРЕРЫВНОМ ВРЕМЕНИ (STRW), СУБОРДИНАЦИЯ ВРЕМЕНАМИ ДОСТИЖЕНИЯ И ДРОБНАЯ ДИНАМИКА

Получены функциональные предельные теоремы для случайных блужданий в непрерывном времени, в общем случае зависящих и зависящих от позиции скачков и времен ожидания, причем предельная аномальная диффузия определяется дробно-дифференциальными по времени эволюционными уравнениями. Вероятностная интерпретация обобщенной дробно-дифференциальной динамики дана в терминах случайной замены времени (субординации) посредством процессов моментов достижения, соответствующих возрастающим процессам Леви или Феллера.

Ключевые слова и фразы: дробно-дифференциальные уравнения, дробно-устойчивые распределения, аномальная диффузия, предельные теоремы, случайные блуждания в непрерывном времени, субординация, процессы моментов достижения.

1. Введение. Пусть $(X_1, T_1), (X_2, T_2), \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных пар случайных величин, причем $X_i \in \mathbf{R}^d$, $T_i \in \mathbf{R}_+$ (размеры скачков и времена ожидания между ними) и распределение каждой пары (X_i, T_i) задается вероятностной мерой $\psi(dx dt)$ на $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+$. Положим

$$N_t = \max \left\{ n: \sum_{i=1}^n T_i \leq t \right\}.$$

Процесс

$$S_{N_t} = X_1 + X_2 + \dots + X_{N_t} \quad (1)$$

называется случайным блужданием в непрерывном времени (общепринятая английская аббревиатура STRW), порожденным ψ . Эти STRW были введены в [19] и нашли многочисленные применения в физике и экономике (см., например, [25], [15], [3], [13], [17] и имеющиеся там ссылки).

* Department of Statistics, University of Warwick, Coventry CV4 7AL UK; Московский экономический институт (МЭИ); e-mail: v.kolokoltsov@warwick.ac.uk

Особенно интересны те ситуации, когда T_i принадлежат области притяжения β -устойчивого распределения, $\beta \in (0, 1)$, а X_i принадлежат области притяжения α -устойчивого распределения, $\alpha \in (0, 2)$. Предельные распределения подходящим образом нормированных сумм S_{N_i} были описаны в [7] в случае независимых T_i и X_i (см. также [11]). В [5] была проанализирована скорость сходимости в более общей схеме с двойным массивом случайных величин, а в [15] соответствующий функциональный предел был определен и было доказано, что его динамика задается дробно-дифференциальными уравнениями. Основные случаи зависимых T_i и X_i были далее проанализированы в [2] в рамках теории операторно-устойчивых процессов (развитой в монографии [16]). В данной работе мы значительно расширяем теорию, допуская зависимость (T_n, X_n) от текущего состояния процесса, т.е. рассматривая пространственно неоднородную ситуацию. Применяемый метод отличен от методов работ [7], [11], [16]. Он основан на конечно-разностной аппроксимации марковских полугрупп с непрерывным временем и опирается на ранее полученные в [8] результаты автора о пространственно неоднородных обобщениях устойчивых процессов.

В [15] было замечено, что дробно-дифференциальная динамика возникает при субординации процессов Леви посредством моментов достижения устойчивых субординаторов Леви (т.е. посредством обращенных траекторий устойчивых субординаторов). Неявно эта идея присутствовала уже в [21]. В качестве основы для наших предельных теорем мы развиваем в настоящей работе общую теорию субординации марковских процессов моментами достижения, показывая, как естественно эта процедура приводит к (обобщенным) дробно-дифференциальным уравнениям. В частности, обращаясь критически к замечанию, сделанному в [15], что метод работы [21], восходящий к [19], «does not identify the limit process» (не позволяет определить предельный процесс), мы даем строгую вероятностную интерпретацию интуитивно ясных, но довольно формальных вычислений из [21].

Настоящая работа организована следующим образом. В следующем пункте мы демонстрируем наш подход к предельным теоремам для CTRW, доказав простые (но тем не менее, по-видимому, новые) предельные теоремы для зависящих от позиции (пространственно неоднородных) случайных блужданий с размерами скачков из областей притяжения устойчивых законов. В п. 3 эти результаты обобщаются на разномасштабные по двум направлениям случайные блуждания, необходимые для дальнейшего анализа CTRW. Пункт 4 (независимый от остального и имеющий независимый интерес) посвящен общей теории субординации моментами достижения. В п. 5, соединяя две части теории из пп. 3 и 4, мы доказываем наши основные результаты о CTRW.

Зафиксируем теперь некоторые (довольно стандартные) обозначе-

ния, используемые в работе. Для локально компактного пространства X обозначаем через $C(X)$ банахово пространство ограниченных непрерывных функций на X (снабженное равномерной нормой), а через $C_\infty(X)$ — его замкнутое подпространство, состоящее из функций, исчезающих на бесконечности. Через (f, μ) обозначается обычное спаривание $\int f(x) \mu(dx)$ между функциями и мерами. Под непрерывным семейством переходных вероятностей в X понимается, как обычно, семейство $p(x; dy)$ вероятностных мер на X , зависящее непрерывно от $x \in X$, причем это семейство считается снабженным слабой топологией: $\mu_n \rightarrow \mu$ при $n \rightarrow \infty$, если $(f, \mu_n) \rightarrow (f, \mu)$ при $n \rightarrow \infty$ для каждой $f \in C(X)$.

Для меры $\mu(dy)$ в $\mathbf{R}^d$ и положительного числа h будем обозначать через $\mu(dy/h)$ промасштабированную меру, определенную ее действием

$$\int g(z) \mu(dz/h) = \int g(hy) \mu(dy)$$

на функции $g \in C(\mathbf{R}^d)$.

Заглавные латинские буквы **E** и **P** зарезервированы для обозначения математического ожидания и вероятности. Функция $\delta(x)$ — это обычная точечная мера Дирака.

2. Предельные теоремы для пространственно неоднородных случайных блужданий. Для вектора $y \in \mathbf{R}^d$ будем обозначать через $\bar{y}$ его нормализацию: $\bar{y} = y/|y|$, где $|y|$ — обычная евклидова норма вектора y .

Выберем произвольное $\alpha \in (0, 2)$. Пусть $S: \mathbf{R}^d \times S^{d-1} \rightarrow \mathbf{R}_+$ — непрерывная неотрицательная функция, симметричная по второму аргументу, т.е. $S(x, y) = S(x, -y)$. Такая функция задает семейство α -устойчивых d -мерных симметричных случайных векторов (зависящих от $x \in \mathbf{R}^d$) посредством их характеристических функций ϕ_x таких, что

$$\ln \phi_x(p) = \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} \left(e^{i(p, \xi)} - 1 - \frac{i(p, \xi)}{1 + \xi^2} \right) \frac{d|\xi|}{|\xi|^{1+\alpha}} S(x, \bar{\xi}) d_S \bar{\xi}, \quad (2)$$

где d_S — лебегова мера на сфере S^{d-1} . Хорошо известно, что (2) можно переписать в виде

$$\ln \phi_x(p) = C_\alpha \int_{S^{d-1}} |(p, \bar{\xi})|^\alpha S(x, \bar{\xi}) d_S \bar{\xi}$$

с некоторой постоянной C_α .

З а м е ч а н и е 1. Нет видимых препятствий для обобщения излагаемой здесь теории на несимметричные устойчивые законы. Однако работа с симметричными законами существенно упрощает формулы.

Теорема 2.1. *Предположим, что*

$$C_1 \leq \int_{S^{d-1}} |(\bar{p}, s)|^\alpha S(x, s) d_S s \leq C_2$$

для всех p с некоторыми постоянными C_1, C_2 , а также что $S(x, s)$ имеет ограниченные производные по x до порядка $q \geq 3$ включительно (если $\alpha < 1$, то достаточно считать, что $q \geq 2$). Тогда псевдодифференциальный оператор

$$Lf(x) = \ln \phi_x \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) f(x) = \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} (f(x+y) - f(x)) \frac{d|y|}{|y|^{1+\alpha}} S(x, \bar{y}) d_S \bar{y} \quad (3)$$

порождает феллеровскую полугруппу T_t в $C_\infty(\mathbf{R}^d)$, причем пространство $C^{q-1}(\mathbf{R}^d) \cap C_\infty(\mathbf{R}^d)$ является инвариантной существенной областью ее генератора.

Этот результат доказан в [8] и [9].

З а м е ч а н и е 2. В [8] показано также, что полугруппа T_t имеет гладкую плотность переходной вероятности (функцию Грина).

Обозначим $Z_x(t)$ феллеровский процесс, построенный по полугруппе T_t . Мы займемся сейчас дискретными приближениями к T_t и $Z_x(t)$.

Начнем со следующего технического факта.

Предложение 2.1. Пусть $p(x; dy)$ — непрерывное семейство переходных вероятностей в $\mathbf{R}^d$ из нормальной области притяжения устойчивого закона вида (2). Точнее, предположим, что для произвольного открытого множества $\Omega \subset S^{d-1}$ с границей нулевой меры Лебега

$$\int_{|y|>n} \int_{\bar{y} \in \Omega} p(x; dy) \sim \frac{1}{\alpha n^\alpha} \int_\Omega S(x, s) d_S s, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4)$$

т.е. отношение двух частей этой формулы стремится к единице при $n \rightarrow \infty$ равномерно по x . Предположим также, что $p(x; \{0\}) = 0$ при всех x . Тогда

$$\min(1, |y|^2) p\left(x; \frac{dy}{h}\right) h^{-\alpha} \longrightarrow \min(1, |y|^2) \frac{d|y|}{|y|^{\alpha+1}} S(x, \bar{y}) d_S \bar{y}, \quad h \rightarrow 0, \quad (5)$$

где обе части являются конечными мерами в $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ и сходимость слабая, но равномерная по $x \in \mathbf{R}^d$. Если $\alpha < 1$, то и соотношение

$$\min(1, |y|) p\left(x; \frac{dy}{h}\right) h^{-\alpha} \longrightarrow \min(1, |y|) \frac{d|y|}{|y|^{\alpha+1}} \int_\Omega S(x, \bar{y}) d_S \bar{y}, \quad h \rightarrow 0,$$

в том же смысле выполнено.

З а м е ч а н и е 3. Так как предельная мера абсолютно непрерывна по отношению к лебеговой, то равномерная слабая сходимость означает просто, что меры всякого открытого множества с границей нулевой лебеговой меры сходятся равномерно по x .

Доказательство. Согласно (4),

$$\int_{|z|>A} \int_{\bar{z} \in \Omega} p\left(x; \frac{dz}{h}\right) h^{-\alpha} = \int_{|y|>A/h} \int_{\bar{y} \in \Omega} p(x; dy) h^{-\alpha} \sim \frac{1}{\alpha A^\alpha} \int_{\Omega} S(x, s) d_S s$$

при $h \rightarrow 0$. Значит,

$$\int_{A<|z|<B} \int_{\bar{z} \in \Omega} p\left(x; \frac{dz}{h}\right) h^{-\alpha} \longrightarrow \int_A^B \frac{d|z|}{|z|^{\alpha+1}} \int_{\Omega} S(x, s) d_S s.$$

Поэтому $p(x; dz/h)h^{-\alpha}$ слабо сходится к $|z|^{-(\alpha+1)} d|z| S(x, z/|z|) d_S(z/|z|)$ на всяком множестве, отделенном от нуля. Легко видеть, что (5) вытекает теперь из равномерной оценки

$$\int_{|y|<\varepsilon} \min(1, |y|^2) p\left(x; \frac{dy}{h}\right) h^{-\alpha} \leq C \varepsilon^{2-\alpha} \quad (6)$$

с некоторой постоянной C . Чтобы доказать (6), заметим, что выполнено неравенство $\int_{|y|>n} p(x; dy) \leq C n^{-\alpha}$, где постоянная C одна и та же для всех x и $n > 0$ (действительно, это выполнено для больших n согласно (4) и распространяется на все n , поскольку $p(x; dy)$ — это вероятностные меры и, значит, ограничены). Следовательно, для произвольного $\varepsilon < 1$ выполнено равенство

$$\int_{|y|<\varepsilon} \min(1, |y|^2) p\left(x; \frac{dy}{h}\right) h^{-\alpha} = \int_{|z|<\varepsilon/h} h^2 |z|^2 p\left(x; \frac{dy}{h}\right) h^{-\alpha}.$$

Представляя последний интеграл в виде счетной суммы интегралов по областям $\varepsilon/(2^{k+1}h) < y \leq \varepsilon/(2^k h)$, его можно оценить выражением

$$\sum_{k=0}^{\infty} h^2 \left(\frac{\varepsilon}{2^k h}\right)^2 h^{-\alpha} C h^{\alpha} \cdot 2^{\alpha(k+1)} \varepsilon^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} C \varepsilon^{2-\alpha} \cdot 2^{\alpha} \cdot 2^{-(2-\alpha)k}.$$

Это и влечет (6), ибо сумма в правой части сходится.

Указанное уточнение в случае $\alpha < 1$ получается аналогично.

Предложение 2.1 доказано.

Рассмотрим скачкообразный марковский процесс $Z^h(t)$, порожденный генератором

$$(L_h f)(x) = \frac{1}{h^\alpha} \int (f(x + hy) - f(x)) p(x; dy). \quad (7)$$

При каждом h оператор L_h ограничен в $C_\infty(\mathbf{R}^d)$ и, следовательно, однозначно определяет феллеровскую полугруппу. Вероятностная интерпретация процесса $Z^h(t)$ такова. Начавшись в точке x , процесс ждет случайное $h^{-\alpha}$ -экспоненциальное время τ (т.е. $\mathbf{P}\{\tau > t\} = \exp(-th^{-\alpha})$)

и затем переходит в $x + hY$, где Y распределено согласно $p(x; dy)$. Далее то же повторяется из точки $x + hY$ и т.д. В том случае, когда p не зависит от x , процесс

$$Z^h(t) = h(Y_1 + \dots + Y_{N_t})$$

является нормированным случайным блужданием, число скачков N_t которого — это пуассоновский процесс с параметром $h^{-\alpha}$, так что $\mathbf{E} N_t = th^{-\alpha}$. В частности, $n = N_t \sim th^{-\alpha}$ при малых h , так что $Z^h(1) \sim n^{-1/\alpha}(Y_1 + \dots + Y_n)$.

Теорема 2.2. *Полугруппа T_t^h , порожденная L_h , сходится к полугруппе T_t , порожденной L . В частности, соответствующие процессы сходятся в смысле конечномерных распределений.*

З а м е ч а н и е 4. Всюду в этой работе мы работаем исключительно со сходимостью полугрупп. Однако, согласно известным результатам (см., например, [6, теорема 19.25]), для феллеровских процессов такая сходимость эквивалентна сходимости распределений на траекториях в подходящем пространстве Скорохода.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (7),

$$(L_h f)(x) = \frac{1}{h^\alpha} \int (f(x+z) - f(x)) p\left(x; \frac{dz}{h}\right),$$

что ввиду предложения 2.1 сходится к $Lf(x)$ при $h \rightarrow 0$ равномерно по x для $f \in C_\infty(\mathbf{R}^d) \cap C^2(\mathbf{R}^d)$. Согласно известному результату (см., например, [14]), сходимость генераторов на существенной области определения предельного генератора влечет за собой сходимость полугрупп. Теорема 2.2 доказана.

Следующий результат касается приближений с неслучайным числом скачков. Зададим процесс $S_x^h(t) = S_x^h([t])$ (квадратная скобка обозначает целую часть числа) формулой

$$S_x^h(0) = x, \quad S_x^h(1) = x + hY_1, \quad \dots, \quad S_x^h(j) = S_x^h(j-1) + hY_j, \quad \dots,$$

где каждое Y_j распределено согласно $p(S_{j-1}; dy)$. Если $p(x; dy)$ не зависит от x , то

$$S_x^h(n) = x + h(Y_1 + \dots + Y_n)$$

— обычное случайное блуждание.

Мы сравним феллеровский процесс $Z_x(t)$ на произвольном фиксированном временном интервале $[0, t_0]$ с дискретными приближениями $S_x^h(t/\tau)$, где число скачков $n = t/\tau$ связано с масштабным параметром h соотношением $\tau = h^\alpha$.

Теорема 2.3. *При условиях теоремы 2.1 и предложения 2.1 $\mathbf{E} f(S_x^h(t/\tau))$ сходится к $T_t f(x)$ при $\tau = h^\alpha \rightarrow 0$ для каждой $f \in C_\infty(\mathbf{R}^d)$*

равномерно по $t \in [0, t_0]$. В частности, процессы $S_x^h(t/\tau)$ сходятся к $Z_x(t)$ в смысле конечномерных распределений.

Доказательство. Согласно теореме 2.1, достаточно доказать требуемую сходимостъ только для $f \in C^2(\mathbf{R}^d) \cap C_\infty(\mathbf{R}^d)$. Выберем такую функцию f . Обозначим $f_k(x) = \mathbf{E} f(S_x^h(k))$. Тогда, в силу марковского свойства, $f_k = R_h^k f$, где оператор R_h определяется формулой

$$R_h f(x) = \int f(x + hy) p(x; dy).$$

Ясно, что каждый R_h — сохраняющий положительность оператор сжатия на $C_\infty(\mathbf{R}^d)$. С другой стороны, рекуррентное уравнение $f_k = R_h f_{k-1}$ может быть записано в виде

$$\frac{f_k(x) - f_{k-1}(x)}{\tau} = h^{-\alpha} \int (f_{k-1}(x + hy) - f_{k-1}(x)) p(x; dy). \quad (8)$$

А это есть приближение в дискретном времени к уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Lf \quad (9)$$

на функциях f , принадлежащих $C^2(\mathbf{R}^d) \cap C_\infty(\mathbf{R}^d)$ (и дифференцируемых по t). Так как эта разностная схема устойчива (ибо решается оператором сжатия R_h^n), а решение уравнения (9) однозначно определено и сохраняет пространство $C^2(\mathbf{R}^d) \cap C_\infty(\mathbf{R}^d)$ (по теореме 2.1), то из стандартных (и легко доказываемых) общих фактов теории разностных схем (см. [22]) вытекает, что решения конечномерных аппроксимаций сходятся к решению уравнения (9). Теорема 2.3 доказана.

В том случае, когда p не зависит от x , теорема 2.3 превращается в известный факт о сходимости случайных блужданий с распределением скачков из области нормального притяжения устойчивого закона к соответствующему устойчивому процессу Леви.

3. Случайные блуждания с разным масштабом по разным направлениям. Для применения развитой теории к CTRW необходимо ее обобщение на случай разномасштабных блужданий, которое мы сейчас и обсудим.

Рассмотрим процесс в $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+$, заданный генератором

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(x, u) = & \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} (f(x + y, u) - f(x, u)) \frac{d|y|}{|y|^{1+\alpha}} S(x, u, \bar{y}) d_S \bar{y} \\ & + \int_0^\infty (f(x, u + v) - f(x, u)) \frac{1}{v^{1+\beta}} w(x, u) dv. \end{aligned} \quad (10)$$

Следующий результат (как и его доказательство) является непосредственным обобщением теоремы 2.1.

Теорема 3.1. Пусть

$$C_1 \leq \int_{S^{d-1}} |(\bar{p}, s)|^\alpha S(x, u, s) d_S s \leq C_2, \quad C_1 \leq w(x, u) \leq C_2$$

с некоторыми постоянными C_1, C_2 , а $S(x, u, s)$ и $w(x, u)$ имеют ограниченные производные по x и u до порядка $q \geq 3$ включительно. Тогда псевдодифференциальный оператор (10) порождает феллеровскую полугруппу $\mathcal{T}_t$ в $C_\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+)$ (непрерывные функции вплоть до границы), причем пространство $(C^{q-1} \cap C_\infty)(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+)$ является инвариантной существенной областью генератора, а значит, и феллеровский процесс $(Y, V)(t)$ в $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+$.

Получим теперь соответствующее обобщение теорем 2.2, 2.3.

Теорема 3.2. Пусть $p(x, u; dy dv)$ — непрерывное семейство переходных вероятностей в $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+$, симметричное по отношению к отражению $y \mapsto -y$ и такое, что $p(x, u; \{0\} \times \mathbf{R}_+) + p(x, u; \mathbf{R}^d \times \{0\}) = 0$. Допустим также, что проекции принадлежат областям нормального притяжения устойчивых законов, а точнее, что равномерно по (x, u)

$$\int_{|y|>n} \int_{\bar{y} \in \Omega} p(x, u; dy dv) \sim \frac{1}{\alpha n^\alpha} \int_{\Omega} S(x, u, s) d_S s, \quad n \rightarrow \infty, \quad (11)$$

$$\int_{v>n} \int_{|y|>A} p(x, u; dy dv) \sim \frac{1}{\beta n^\beta} w(x, u, A), \quad n \rightarrow \infty, \quad (12)$$

при каждом $A \geq 0$, где w — измеримая функция трех аргументов такая, что

$$w(x, u, 0) = w(x, u), \quad \lim_{A \rightarrow \infty} w(x, u, A) = 0 \quad (13)$$

(таким образом, $w(x, u, A)$ является мерой в $\mathbf{R}_+$ при всех x, u).

Рассмотрим скачкообразные процессы, порожденные

$$(\mathcal{L}_\tau f)(x, u) = \frac{1}{\tau} \int \left(f(x + \tau^{1/\alpha} y, u + \tau^{1/\beta} v) - f(x, u) \right) p(x, u; dy dv). \quad (14)$$

Тогда феллеровские полугруппы $\mathcal{T}_t^h$ в $C_\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+)$ этих процессов (которые являются феллеровскими процессами, поскольку $\mathcal{L}_h$ ограничены в $C_\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+)$ при каждом h) сходятся к полугруппе $\mathcal{T}_t$.

Доказательство. Как и в предложении 2.1, из (11), (12) следует, что равномерно по x, u при $h \rightarrow 0$

$$\min(1, |y|^2) \int_0^\infty p\left(x, u; \frac{dy dv}{h}\right) h^{-\alpha} \longrightarrow \min(1, |y|^2) \frac{d|y|}{|y|^{\alpha+1}} S(x, \bar{y}) d_S \bar{y}, \quad (15)$$

$$\min(1, v) \int_{|y|>A} p\left(x, u; \frac{dy dv}{h}\right) h^{-\beta} \longrightarrow \min(1, v) w(x, u, A) \frac{dv}{v^{\beta+1}}. \quad (16)$$

Далее, взяв $f \in (C^2 \cap C_\infty)(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+)$ и записав

$$\mathcal{L}_\tau f(x, u) = I + II,$$

где

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\tau} \int (f(x + \tau^{1/\alpha} y, u) - f(x, u)) p(x, u; dy dv) \\ &\quad + \frac{1}{\tau} \int (f(x, u + \tau^{1/\beta} v) - f(x, u)) p(x, u; dy dv), \\ II &= \frac{1}{\tau} \int \left[(f(x + \tau^{1/\alpha} y, u + \tau^{1/\beta} v) \right. \\ &\quad \left. - f(x + \tau^{1/\alpha} y, u)) - (f(x, u + \tau^{1/\beta} v) - f(x, u)) \right] p(x, u; dy dv), \end{aligned}$$

замечаем, что, как и при доказательстве теоремы 2.2, из соотношений (15) и (16) (последнее с $A = 0$) вытекает сходимость I к $\mathcal{L}f(x, u)$, равномерная по x, u . Поэтому для завершения доказательства надо лишь доказать сходимость II к нулю при $\tau \rightarrow 0$. Имеем

$$II = \int (g(x + \tau^{1/\alpha} y, u, v) - g(x, u, v)) p\left(x, u; \frac{dy dv}{\tau^{1/\beta}}\right) \frac{1}{\tau},$$

где $g(x, u, v) = f(x, u + v) - f(x, u)$.

Согласно свойствам f ,

$$\begin{aligned} |g(x, u, v)| &\leq C \min(1, v) \left(\max \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right| + \max |f| \right) \leq \tilde{C} \min(1, v), \\ \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, u, v) \right| &\leq C \min(1, v) \left(\max \left| \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x} \right| + \max \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \right) \leq \tilde{C} \min(1, v) \end{aligned}$$

с некоторыми постоянными C и $\tilde{C}$. Значит, в силу (16) и (13) для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое A , что

$$\int_{|y| > A} \left(g(x + \tau^{1/\alpha} y, u, v) - g(x, u, v) \right) p\left(x, u; \frac{dy dv}{\tau^{1/\beta}}\right) \frac{1}{\tau} < \varepsilon;$$

а с другой стороны, для произвольного A

$$\int_{|y| < A} \left(g(x + \tau^{1/\alpha} y, u, v) - g(x, u, v) \right) p\left(x, u; \frac{dy dv}{\tau^{1/\beta}}\right) \frac{1}{\tau} \leq \tau^{1/\alpha} A \kappa$$

с некоторой постоянной κ , так что II можно сделать сколь угодно малым выбором вначале большого A , а затем достаточно малого τ .

Определим теперь процесс $(Y, V)_{x,u}^\tau(t/\tau) = (Y, V)_{x,u}^\tau([t/\tau])$, где

$$\begin{aligned} (Y, V)_{x,u}^\tau(0) &= (x, u), \quad (Y, V)_{x,u}^\tau(1) = (x + \tau^{1/\alpha} Y_1, u + \tau^{1/\beta} V_1), \dots, \\ (Y, V)_{x,u}^\tau(j) &= (Y, V)_{x,u}^\tau(j-1) + (\tau^{1/\alpha} Y_j, \tau^{1/\beta} V_j), \dots, \end{aligned}$$

а каждая пара (Y_j, V_j) распределена согласно $p((Y, V)_{x,u}^\tau(j-1); dy dv)$. Если $p(x, u; dy dv)$ не зависит от x, u , то

$$(Y, V)_{x,u}^\tau(n) = (x, u) + \left(\tau^{1/\alpha}(Y_1 + \dots + Y_n), \tau^{1/\beta}(V_1 + \dots + V_n) \right).$$

Ввиду теоремы 3.2, следующий результат получается буквально так же, как и теорема 2.3.

Теорема 3.3. При условиях теорем 3.1 и 3.2 линейные сжатия $\mathbf{E} f((Y, V)_{x,u}^\tau(t/\tau))$ в $C_\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+)$ сходятся к полугруппе $\mathcal{T}_t f(x, u)$ процесса $(Y, V)(t)$ равномерно по $t \in [0, t_0]$ при $\tau \rightarrow 0$.

4. Субординация процессами моментов достижения и дробно-дифференциальная динамика. Пусть $X(u)$, $u \geq 0$, — субординатор Леви, т.е. непрерывный справа возрастающий процесс с независимыми одинаково распределенными приращениями (согласованный с некоторой полной непрерывной справа фильтрацией вероятностного пространства) с генератором

$$Af(x) = \int_0^\infty (f(x+y) - f(x)) \nu(dy) + a \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (17)$$

где $a \geq 0$, а ν — такая борелевская мера на $\{y > 0\}$, что

$$\int_0^\infty \min(1, y) \nu(dy) < \infty.$$

Рассмотрим процесс, полученный обращением (в смысле обратной функции) траекторий этого процесса, или, иначе говоря, процесс моментов достижения $Z(t)$, определенный как

$$Z_X(t) = Z(t) = \inf\{u: X(u) > t\} = \sup\{u: X(u) \leq t\} \quad (18)$$

и, разумеется, также являющийся возрастающим непрерывным справа процессом. Чтобы сделать дальнейший анализ более прозрачным (и избежать дополнительных усложнений самого общего случая), будем далее предполагать, что существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\beta \in (0, 1)$, что

$$\nu(dy) \geq y^{1+\beta} dy, \quad 0 < y < \varepsilon. \quad (19)$$

Для удобства ссылок в следующем утверждении мы приводим (без доказательства) элементарные известные свойства процесса $X(u)$.

Предложение 4.1. Пусть выполнено условие (19). Тогда:

(i) процесс $X(u)$ почти наверное возрастает в каждой точке, т.е. не является постоянным ни на каком конечном интервале времени;

(ii) распределение процесса $X(u)$ при $u > 0$ имеет плотность, скажем, $G(u, y)$, обращающуюся в нуль при $y < 0$, бесконечно дифференцируемую по обоим переменным и удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial u} = A^*G, \quad (20)$$

где A^* , двойственный оператор к A , имеет вид

$$A^*f(x) = \int_0^\infty (f(x-y) - f(x))\nu(dy) - a \frac{\partial f}{\partial x};$$

(iii) продолженная нулем на полупространство $\{u < 0\}$, локально интегрируемая функция $G(u, y)$ на $\mathbf{R}^2$ определяет обобщенную функцию, совпадающую с бесконечно гладкой функцией вне точки $(0, 0)$ и удовлетворяющую в смысле обобщенных функций (распределений) уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial u} = A^*G + \delta(u)\delta(y). \quad (21)$$

Следствие 1. Пусть выполнено условие (19). Тогда:

- (i) процесс $Z(t)$ почти наверно непрерывен и $Z(0) = 0$;
- (ii) распределение $Z(t)$ имеет непрерывно дифференцируемую плотность вероятности $Q(t, u)$ при $u > 0$:

$$Q(t, u) = -\frac{\partial}{\partial u} \int_{-\infty}^t G(u, y) dy. \quad (22)$$

Доказательство. Утверждение (i) вытекает из предложения 4.1 (i). Для доказательства (ii) замечаем, что

$$\mathbf{P}\{Z(t) \leq u\} = \mathbf{P}\{X(u) \geq t\} = \int_t^\infty G(u, y) dy = 1 - \int_0^t G(u, y) dy,$$

откуда в силу дифференцируемости G вытекает (22). Подчеркнем для ясности, что (22) определяет $Q(t, u)$ как гладкую функцию при всех t , коль скоро $u > 0$, и что $Q(t, u) = 0$ при $t \leq 0$ и $u > 0$.

Теорема 4.1. При условии (19) плотность Q удовлетворяет уравнению

$$A^*Q = \frac{\partial Q}{\partial u} \quad (23)$$

при $u > 0$, где A^* действует на переменную t , и граничному условию

$$\lim_{u \rightarrow 0+} Q(t, u) = -A^*\theta(t), \quad (24)$$

где $\theta(t)$ — индикаторная функция, равная единице (соответственно нулю) для положительных (соответственно отрицательных) значений t . Продолженная нулем в полупространство $\{u < 0\}$, функция Q

удовлетворяет в смысле обобщенных функций уравнению

$$A^*Q = \frac{\partial Q}{\partial u} + \delta(u)A^*\theta(t). \quad (25)$$

Кроме того, (поточечная) производная $\frac{\partial Q}{\partial t}$ также удовлетворяет уравнению (23) при $u > 0$ и удовлетворяет уравнению

$$A^*\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial Q}{\partial t} + \delta(u) \frac{d}{dt} A^*\theta(t) \quad (26)$$

в смысле распределений.

З а м е ч а н и е 5. В случае β -устойчивого субординатора $X(u)$ с генератором

$$Af(x) = -\frac{1}{\Gamma(-\beta)} \int_0^\infty (f(x+y) - f(x)) y^{-1-\beta} dy \quad (27)$$

имеем

$$A = -\frac{d^\beta}{d(-x)^\beta}, \quad A^* = -\frac{d^\beta}{dx^\beta} \quad (28)$$

(эти уравнения можно рассматривать как определения дробных производных; с мотивацией и эквивалентными представлениями можно ознакомиться по книгам [18] и [20]; краткий, но содержательный обзор приведен также в приложении к статье [21]), и в этом случае уравнение (25) принимает вид

$$\frac{d^\beta Q}{dt^\beta} + \frac{\partial Q}{\partial u} = \delta(u) \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}, \quad (29)$$

что совпадает с уравнением (B14) из [21]. Это замечание наводит на мысль называть операторы типа (17) обобщенными дробно-дифференциальными.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что в силу (22), (20) и благодаря коммутативности операторов интегрирования и A^* выполнены равенства

$$\begin{aligned} Q(t, u) &= - \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial u} G(u, y) dy = - \int_{-\infty}^t (A^*G(u, \cdot))(y) dy \\ &= -A^* \int_{-\infty}^t G(u, y) dy. \end{aligned}$$

Это влечет за собой (23) (достаточно продифференцировать по u и снова использовать (22)) и (24), ибо $G(0, y) = \delta(y)$.

Предположим теперь, что Q продолжена нулем в полупространство $\{u < 0\}$. Пусть ϕ — пробная функция в $\mathbf{R}^2$, бесконечно дифференцируемая и имеющая компактный носитель. Тогда в смысле обобщенных

функций

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{\partial}{\partial u} - A^* \right) Q, \phi \right) &= \left(Q, \left(-\frac{\partial}{\partial u} - A \right) \phi \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} du \int_{\mathbf{R}} dt Q(t, u) \left(-\frac{\partial}{\partial u} - A \right) \phi(t, u) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^{\infty} du \int_{\mathbf{R}} dt \phi(t, u) \left(\frac{\partial}{\partial u} - A^* \right) Q(t, u) + \int_{\mathbf{R}} \phi(t, \varepsilon) Q(t, \varepsilon) dt \right]. \end{aligned}$$

Первый член здесь обращается в нуль в силу (23). Следовательно, в силу (24),

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial u} - A^* \right) Q, \phi \right) = - \int_{\mathbf{R}} \phi(t, 0) A^* \theta(t) dt,$$

что влечет за собой (25). Требуемые свойства производной $\frac{\partial Q}{\partial t}$ вытекают подобным же образом из представления

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(t, u) = -\frac{\partial G}{\partial u}(u, t).$$

Например, при $u > 0$

$$A^* \frac{\partial Q}{\partial t}(t, u) = -\frac{\partial}{\partial u} A^* G(u, t) = -\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u} G(u, t) = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

З а м е ч а н и е 6. Подчеркнем, что обобщенная функция Q совпадает с бесконечно дифференцируемой функцией вне луча $\{t \geq 0, u = 0\}$, обращается в нуль на множестве $\{t < 0, u < 0\}$ и удовлетворяет граничному условию $\lim_{t \rightarrow 0+} Q(t, u) = \delta(u)$. Последнее справедливо, ибо для $t > 0$ и гладкой пробной функции ϕ

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} Q(t, u) \phi(u) du &= \int_0^{\infty} du \frac{\partial}{\partial u} \int_t^{\infty} G(u, y) dy \phi(u) \\ &= - \int_0^{\infty} du \phi'(u) \int_t^{\infty} G(u, y) dy, \end{aligned}$$

что при $t \rightarrow 0$ стремится к $-\int_0^{\infty} \phi'(u) du = \phi(0)$.

Теперь мы обратимся к анализу случайной замены времени t значением процесса $Z(t)$ в марковских процессах.

Теорема 4.2. При условиях теоремы 4.1 пусть $Y(t)$ — феллеровский процесс в $\mathbf{R}^d$, независимый от $Z(t)$ и с областью определения генератора L , содержащей пространство $(C_{\infty} \cap C^2)(\mathbf{R}^d)$. Обозначим переходные вероятности процесса $Y(t)$ через

$$T(t, x, dy) = \mathbf{P}\{Y_x(t) \in dy\} = \mathbf{P}_x\{Y(t) \in dy\}.$$

Тогда распределение субординированного процесса $Y(Z(t))$ при $t > 0$ определяется формулой

$$\mathbf{P}_x\{Y(Z(t)) \in dy\} = \int_0^\infty T(u, x, dy) Q(t, u) du, \quad (30)$$

средние $f(t, x) = \mathbf{E} f(Y_x(Z(t)))$ функции $f \in (C_\infty \cap C^2)(\mathbf{R}^d)$ удовлетворяют обобщенному дробно-дифференциальному эволюционному уравнению

$$A_t^* f(t, x) = -L_x f(t, x) + f(x) A^* \theta(t) \quad (31)$$

(где индекс указывает переменную, на которую действует оператор), а их производные по времени $h = \partial f / \partial t$ удовлетворяют при $t > 0$ уравнению

$$A_t^* h = -L_x h + f(x) \frac{d}{dt} A^* \theta(t). \quad (32)$$

Кроме того, если $Y(t)$ обладает гладкой плотностью переходных вероятностей, так что $T(t, x, dy) = T(t, x, y) dy$, и выполняются прямое и обратное уравнения Колмогорова

$$\frac{\partial T}{\partial t}(t, x, y) = L_x T(t, x, y) = L_y^* T(t, x, y), \quad (33)$$

то распределения процесса $Y(Z(t))$ имеют гладкую плотность

$$g(t, x, y) = \int_0^\infty T(u, x, y) Q(t, u) du, \quad (34)$$

удовлетворяющую прямому обобщенному дробно-дифференциальному уравнению

$$A_t^* g = -L_y^* g + \delta(x - y) A^* \theta(t) \quad (35)$$

и обратному обобщенному дробно-дифференциальному уравнению

$$A_t^* g = -L_x g + \delta(x - y) A^* \theta(t) \quad (36)$$

(где g продолжена нулем в область $\{t < 0\}$), а производная по времени $h = \partial g / \partial t$ удовлетворяет уравнению

$$A_t^* h = -L_y^* h + \delta(x - y) \frac{d}{dt} A^* \theta(t). \quad (37)$$

З а м е ч а н и е 7. В случае β -устойчивого субординатора $X(u)$ с генератором (27)–(28) правые части приведенных уравнений становятся настоящими дробными производными. В частности, если $Y(t)$ — симметричный α -устойчивый процесс, то уравнение (35) принимает вид

$$\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} g(t, y - x) = \frac{\partial^\alpha}{\partial |y|^\alpha} g(t, y - x) + \delta(y - x) \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1 - \beta)}, \quad (38)$$

полученный в [21] и [23]. Соответствующий частный случай уравнения (34) имеется в [15], а также и в [21], где он назван формулой разделения переменных. Из нашего общего подхода сразу видно, что такое разделение переменных связано с независимостью процесса $Y(t)$ и субординатора $X(u)$ (см. далее теорему 4.3, посвященную более общей ситуации).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для непрерывной ограниченной функции f при $t > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} f(Y_x(Z(t))) &= \int_0^\infty \mathbf{E}(f(Y_x(Z(t))) | Z(t) = u) Q(t, u) du \\ &= \int_0^\infty \mathbf{E} f(Y_x(u)) Q(t, u) du \end{aligned}$$

в силу независимости Z и Y . Это влечет (30) и (34).

Из теоремы 4.1 вытекает, что при $t > 0$

$$\begin{aligned} A_t^* g &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\infty T(u, x, y) A_t^* Q(t, u) du = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\infty T(u, x, y) \frac{\partial}{\partial u} Q(t, u) du \\ &= - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial u} T(u, x, y) Q(t, u) du + \delta(x - y) A^* \theta(t), \end{aligned}$$

где, согласно (33), первый член равен $-L_y^* g = L_x g$, из чего следуют (35) и (36). Разумеется, при $t < 0$ обе части уравнений (35) и (36) обращаются в нуль. Остальные уравнения получаются аналогично. Теорема 4.2 доказана.

Теперь мы обобщим теорию на случай феллеровских субординаторов $X(u)$, задаваемых генераторами типа

$$Af(x) = \int_0^\infty (f(x+y) - f(x)) \nu(x, dy) + a(x) \frac{\partial f}{\partial x} \quad (39)$$

с зависящими от позиции мерой Леви и сносом. Разумеется, нужно какое-то условие регулярности, чтобы, как и в случае субординаторов Леви, иметь гладкую переходную вероятность.

Предложение 4.2. Пусть выполнены следующие условия:

(i) ν имеет плотность $\nu(x, y)$ по отношению к мере Лебега и

$$C_1 \min(y^{-1-\beta_1}, y^{-1-\beta_2}) \leq \nu(x, y) \leq C_2 \max(y^{-1-\beta_1}, y^{-1-\beta_2}) \quad (40)$$

с некоторыми постоянными $C_1, C_2 > 0$ и $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$;

(ii) ν трижды непрерывно дифференцируема по x с производными, удовлетворяющими правой оценке (40);

(iii) $a(x)$ неотрицательна и имеет ограниченные производные до третьего порядка.

Тогда генератор (39) задает возрастающий феллеровский процесс, имеющий при $u > 0$ плотность переходной вероятности $G(u, y) =$

$\mathbf{P}\{X(u) \in dy\}$ (мы предполагаем, что $X(u)$ стартует в нуле), которая дважды непрерывно дифференцируема по u .

З а м е ч а н и е 8. Условие (40) выполняется для так называемых процессов устойчивого типа с зависящим от положения индексом устойчивости.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование требуемого феллеровского процесса доказано при более общих предположениях в [1]. Доказательство существования гладкой плотности приведено в [8] при слегка отличных предположениях, но, как легко видеть, приведенные там рассуждения непосредственно переносятся на данную ситуацию.

Ясно, что процесс моментов достижения, определенный формулой (18) с $X(u)$ из предложения 4.1, непрерывен и имеет дифференцируемую плотность $Q(t, u)$ при $t > 0$, заданную (22). Однако (23) более не выполняется, ибо оператор A и интегрирование теперь уже не коммутируют. В то же время уравнение (26) остается справедливым (как легко видеть из его доказательства). Отсюда непосредственно вытекает следующее частичное обобщение теоремы 4.2.

Предложение 4.3. Пусть $Y(t)$ — такой же феллеровский процесс в $\mathbf{R}^d$, как в теореме 4.3, но независимый процесс моментов достижения $Z(t)$ построен по процессу $X(u)$ при условиях предложения 4.2. Тогда распределения субординированного процесса $Y(Z(t))$ при $t > 0$ задаются формулой (30), а производная по времени $h = \partial f / \partial t$ средних $f(t, x) = \mathbf{E} f(Y_x(Z(t)))$ непрерывных ограниченных функций f удовлетворяет (37).

Наконец, мы обратимся к обобщению на случай моментов достижения, зависящих от субординируемого процесса.

Теорема 4.3. Пусть $(Y, V)(t)$ — случайный процесс в $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+$ такой, что: (а) компоненты $Y(t)$, $V(s)$ в разные моменты времени имеют совместную плотность вероятностей

$$\phi(s, u; y_0, v_0; y, v) = \mathbf{P}_{(y_0, v_0)}\{Y(s) \in dy, V(u) \in dv\}, \quad (41)$$

непрерывно дифференцируемую по u при $u, s > 0$, (b) компонента $V(t)$ возрастает и почти наверно не постоянна на любом конечном интервале. (Этим условиям удовлетворяет, например, процесс из теоремы 3.1.) Тогда:

(i) процесс моментов достижения $Z(t) = Z_V(t)$ (определенный формулой (18) с V вместо X) почти наверно непрерывен;

(ii) существует непрерывная совместная плотность вероятности пары $Y(s)$, $Z(t)$, задаваемая формулой

$$g_{Y(s), Z(t)}(y_0, 0; y, u) = \frac{\partial}{\partial u} \int_t^\infty \phi(s, u; y, v) dv, \quad (42)$$

(iii) распределение композиции $Y(Z(t))$ имеет плотность вероятности

$$\begin{aligned}\Phi_{Y(Z(t))}(y) &= \int_0^\infty g_{Y(s), Z(t)}(y_0, 0; y, s) ds \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial u} \int_t^\infty \phi(s, u; y_0, 0; y, v) dv \right) \Big|_{u=s} ds; \quad (43)\end{aligned}$$

(iv) в частности, если $(Y, V)(t)$ — феллеровский процесс с переходной плотностью вероятности $G_{YV}(u, y_0, v_0, y, v)$ и генератором вида $(L + A)f(y, v)$, где L действует на переменную y и не зависит от v (интерпретация: размер скачка не зависит от времени ожидания), а A действует на v (но может зависеть от y), то при $s \geq u$

$$\phi(s, u; y_0, v_0; y, v) = \int G_Y(s - u, z, y) G_{YV}(u, y_0, v_0; z, v) dz, \quad (44)$$

где G_Y означает переходную плотность компоненты Y , и

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_{Y(Z(t))}(y) = \int_0^\infty A^* G_{YV}(u, y_0, 0; y, t) du, \quad (45)$$

т.е. производная по времени от плотности субординированного процесса равна обобщенной дробной производной «временной компоненты V » проинтегрированной совместной плотности процесса (Y, V) ; производная $h = \frac{\partial}{\partial t} \Phi$ удовлетворяет вместо (37) более сложному уравнению

$$(A^* + L^*)h = \delta(y - y_0) A^* \delta(v) + [L^*, A^*] \int_0^\infty G_{YV}(u, y_0, 0; y, v) du. \quad (46)$$

Доказательство. Утверждения (i) и (ii) получаются непосредственным обобщением следствия 1 из предложения 4.1. Утверждение (iii) следует из определения условных и совместных вероятностей. Для доказательства (iv) заметим, что при $s \geq u$

$$\begin{aligned}\mathbf{E} f(Y_{y_0}(s), V_{(y_0, v_0)}(u)) &= \mathbf{E} \int G_Y(s - u, Y_{y_0}(u); y) f(y, V_{(y_0, v_0)}) dy \\ &= \int \int G_Y(s - u, z; y) f(y, v) G_{YV}(u, y_0, v_0; z, v) dy dz dv,\end{aligned}$$

что влечет за собой (44). Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \Phi_{Y(Z(t))}(y) &= - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial u} \int G_Y(s - u, z, y) G_{YV}(u, y_0, 0; z, t) dz \Big|_{u=s} ds \\ &= \int_0^\infty \int -(L_z G_Y(s - u, z, y)) G_{YV}(u, y_0, 0; z, t) dz \Big|_{u=s} ds \\ &\quad + \int_0^\infty \int G_Y(s - u, z, y) (A^* + L^*) G_{YV}(u, y_0, 0; z, t) dz \Big|_{u=s} ds,\end{aligned}$$

откуда вытекает (45), ибо L сокращается в силу сделанных предположений о генераторе. Наконец, (45) непосредственно влечет (46).

5. Предельные теоремы для пространственно неоднородных CTRW. Теперь все готово для нашего главного результата.

Теорема 5.1. *В предположениях теорем 3.1 и 3.2 пусть $Z^\tau(t)$, $Z(t)$ — процессы моментов достижения для $V^\tau(t/\tau)$ и $V(t)$ (определенные соответствующими формулами (18)). Тогда субординированные процессы $Y^\tau(Z^\tau(t)/\tau)$ сходятся к субординированному процессу $Y(Z(t))$ в смысле маргинальных распределений, т.е.*

$$\mathbf{E}_{x,0} f\left(Y^\tau\left(\frac{Z^\tau(t)}{\tau}\right)\right) \rightarrow \mathbf{E}_{x,0} f(Y(Z(t))), \quad \tau \rightarrow 0, \quad (47)$$

для произвольных $x \in \mathbf{R}^d$, $f \in C_\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+)$, равномерно по t из любого компактного интервала.

З а м е ч а н и е 9. 1. Распределение предельного процесса описано в теореме 4.3.

2. Мы доказываем сходимостъ только в наиболее слабой форме. Не кажется трудным усилить результат до сходимости распределений траекторий из пространства Скорохода, используя стандартные средства (компактность и т.д.) или теорию непрерывных композиций из [24].

3. Подобный результат может быть доказан для непрерывных по времени аппроксимаций из теоремы 3.2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как время по существу дискретно в $V^\tau(t/\tau)$, можно заключить, что $Z^\tau(t) = \max\{u: X(u) \leq t\}$ и что события $\{Z^\tau(t) \leq u\}$ и $\{V^\tau(u/\tau) \geq t\}$ совпадают, откуда вытекает, что сходимостъ конечномерных распределений $(Y^\tau(s/\tau), V^\tau(u/\tau))$ к конечномерным распределениям $(Y(s), V(u))$ (доказанная в теореме 3.3) эквивалентна соответствующей сходимости распределений $(Y^\tau(s/\tau), Z^\tau(t))$ к распределению процесса $(Y(s), Z(t))$.

Далее, поскольку $V(0) = 0$, функция $V(t)$ непрерывна, $V(u) \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow \infty$, а предельное распределение абсолютно непрерывно, то чтобы доказать (47), достаточно показать, что для достаточно больших $K > 0$ и всякого компакта A , имеющего границу нулевой меры Лебега, выполнено соотношение

$$\mathbf{P}_{x,0}\left\{Y^\tau\left(\frac{Z_K^\tau(t)}{\tau}\right) \in A\right\} \rightarrow \mathbf{P}_{x,0}\{Y(Z_K(t)) \in A\}, \quad \tau \rightarrow 0, \quad (48)$$

где $Z_K^\tau(t) = Z^\tau(t)$, если $K^{-1} \leq Z^\tau(t) \leq K$, и $Z_K^\tau(t) = 0$ в противном случае, и так же определено $Z_K(t)$.

Имеем:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{Y^\tau\left(\frac{Z_K^\tau(t)}{\tau}\right) \in A\right\} \\ &= \sum_{k=1/(K\tau)}^{K/\tau} \mathbf{P}\left\{V^\tau(k) \in A \& Z^\tau(t) \in (k\tau, (k+1)\tau)\right\}, \quad (49) \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}\{Y(Z_K(t)) \in A\} = \sum_{k=1/(K\tau)}^{K/\tau} \int_A dy \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} g_{Y(s), Z(t)}(y, s) ds. \quad (50)$$

Правую часть (50) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1/(K\tau)}^{K/\tau} \int_A dy \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} g_{Y(\tau k), Z(t)}(y, s) ds \\ &+ \sum_{k=1/(K\tau)}^{K/\tau} \int_A dy \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} (g_{Y(s), Z(t)} - g_{Y(\tau k), Z(t)})(y, s) ds. \quad (51) \end{aligned}$$

Вторая сумма стремится к 0 при $\tau \rightarrow 0$ в силу непрерывности функции (42), а разница между первой суммой и (49) стремится к нулю, поскольку распределения $(Y^\tau(s/\tau), Z^\tau(t))$ сходятся к распределениям $(Y(s), Z(t))$. Отсюда вытекает (48), завершая доказательство теоремы.

В том случае, когда S не зависит от u и w не зависит от x в (10), предельный процесс $(Y, V)(t)$ имеет независимые компоненты, так что средние субординированного предельного процесса удовлетворяют обобщенному дробно-дифференциальному уравнению из предложения 4.3, а если к тому же w постоянно, они удовлетворяют дробно-дифференциальному уравнению из теоремы 4.2. В частности, если $p(x, u, dy dv)$ не зависит от (x, u) и разлагается в произведение $p(dy)q(dv)$, причем предельный процесс $V(t)$ устойчивый, из теоремы 5.1 получаются основные результаты работы [15] (в слегка более слабой форме, ибо здесь мы работаем с симметричными устойчивыми законами, а не с операторно устойчивыми, как в [15]), так же как и, разумеется, соответствующие результаты из [7], [11] (надо взять $t = 1$ в (47)) об асимптотическом поведении нормализованных субординированных сумм (CTRW) (1).

Я благодарен В. Ю. Королеву, В. Е. Бенингу и В. В. Учайкину, вдохновившим меня красотой CTRW, Дж. Хаттон и Дж. Лэйну, организовавшим мою лекцию о CTRW на Грегингском статистическом семинаре весной 2007 года, М. М. Меершэрту, привлечшему мое внимание к важной работе [2], а также Х. А. Лопес-Мимбела за гостеприимство и полезные обсуждения в CIMAT (Мексика, Гуанахуато) летом 2007 года.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bass R. F. Uniqueness in law for pure jump Markov processes. — Probab. Theory Related Fields, 1988, v. 79, № 2, p. 271–287.
2. Becker-Kern P., Meerschaert M. M., Scheffler H.-P. Limit theorems for coupled continuous time random walks. — Ann. Probab., 2004, v. 32, № 1B, p. 730–756.
3. Бенинг В. Е., Королев В. Ю., Сухорукова Т. А., Гусаров Г. Г., Саенко В. В., Учайкин В. В. Дробно устойчивые распределения. — Стохастические модели структурной плазменной турбулентности. М.: МГУ, 2003, с. 291–360.
4. Bening V. E., Korolev V. Yu., Kolokoltsov V. N., Saenko V. V., Uchaikin V. V., Zolotarev V. M. Estimation of parameters of fractional stable distributions. — J. Math. Sci. (N.Y.), 2004, v. 123, № 1, p. 3722–3732.
5. Bening V. E., Korolev V. Yu., Kolokoltsov V. N. Limit theorems for continuous-time random walks in the double array limit scheme. — J. Math. Sci. (N.Y.), 2006, v. 138, № 1, p. 5348–5365.
6. Kallenberg O. Foundations of Modern Probability. New York: Springer-Verlag, 2002.
7. Kotulski M. Asymptotic distribution of continuous-time random walks: a probabilistic approach. — J. Statist. Phys., 1995, v. 81, № 3/4, p. 777–792.
8. Kolokoltsov V. N. Symmetric stable laws and stable-like jump-diffusions. — Proc. London Math. Soc., 2000, v. 80, № 3, p. 725–768.
9. Kolokoltsov V. N. Semiclassical analysis for diffusions and stochastic processes. — Lecture Notes in Math., 2000, v. 1724, p. 1–347.
10. Kolokoltsov V. N. Nonlinear Markov semigroups and interacting Lévy type processes. — J. Statist. Phys., 2007, v. 126, № 3, p. 585–642.
11. Kolokoltsov V. N., Korolev V. Yu., Uchaikin V. V. Fractional stable distributions. — J. Math. Sci. (N.Y.), 2001, v. 105, № 6, p. 2569–2576.
12. Королев В. Ю., Бенинг В. Е., Шоргин С. Я. Математические основы теории риска. М.: Физматлит, 2007, 542 с.
13. Korolev V. Yu. et al. Some methods of the analysis of time characteristics of catastrophes in non-homogeneous flows of extremal events. — Системы и средства информатики. Математические модели в информационных технологиях. М.: РАН, 2006, с. 5–23.
14. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: МГУ, 1965.
15. Meerschaert M. M., Scheffler H.-P. Limit theorems for continuous-time random walks with infinite mean waiting times. — J. Appl. Probab., 2004, v. 41, № 3, с. 623–638.
16. Meerschaert M. M., Scheffler H.-P. Limit Distributions for Sums of Independent Random Vectors. New York: Wiley, 2001, 484 p.
17. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamic approach. — Phys. Rep., 2000, v. 339, № 1, p. 1–77.
18. Miller K. S., Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. New York: Wiley, 1993, 366 p.
19. Montroll E. W., Weiss G. H. Random walks on lattices, II. — J. Math. Phys., 1965, v. 6, p. 167–181.
20. Saichev A. I., Woyczyński W. A. Distributions in the Physical and Engineering Sciences, v. 1. Boston: Birkhäuser, 1997, 336 p.
21. Saichev A. I., Zaslavsky G. M. Fractional kinetic equations: solutions and applications. — Chaos, 1977, v. 7, № 4, p. 753–764.
22. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989, 432 с.
23. Uchaikin V. V. Montroll-Weiss problem, fractional equations, and stable distributions. — Internat. J. Theoret. Phys., 2000, v. 39, № 8, p. 2087–2105.
24. Whitt W. Stochastic-Process Limits. New York: Springer, 2002, 602 p.
25. Zaslavsky G. M. Fractional kinetic equation for Hamiltonian chaos. — Phys. D, 1994, v. 76, № 1–3, p. 110–122.

Поступила в редакцию
30.XI.2007