Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Широков, О каналах с конечной χ -пропускной способностью, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 4, 732–750

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2462>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 06:19:46

© 2008 г.

ШИРОКОВ М. Е.*

О КАНАЛАХ С КОНЕЧНОЙ χ -ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТЬЮ¹⁾

В статье рассматриваются основные свойства бесконечномерных квантовых каналов, обладающих конечной χ -пропускной способностью. Получены достаточные условия существования оптимальной меры для таких каналов. Рассмотрены примеры каналов, не имеющих оптимальной меры.

Ключевые слова и фразы: квантовое состояние, квантовый канал, квантовая энтропия, χ -пропускная способность.

1. Введение. Квантовая теория информации — это быстро развивающаяся в последние годы научная дисциплина, исследующая информационные аспекты квантовомеханических систем, математическим аппаратом которой является теория операторов в гильбертовом пространстве [3].

Одним из основных понятий квантовой теории информации является понятие квантового канала как преобразования состояний квантовой системы. С математической точки зрения квантовые состояния — это ядерные положительные операторы с единичным следом, а квантовый канал — это произвольное линейное, вполне положительное и сохраняющее след отображение банаховой алгебры ядерных операторов на гильбертовом пространстве, соответствующем входной квантовой системе, в банахову алгебру ядерных операторов на гильбертовом пространстве, соответствующем выходной квантовой системе. Важной характеристикой квантового канала является χ -пропускная способность²⁾. Для канала между конечномерными квантовыми системами χ -пропускная способность всегда конечна и не превосходит максимума выходной энтропии этого канала, которая является непрерывной ограниченной функцией на

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, Россия; e-mail: msh@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке научной программы отделения математики РАН «Современные проблемы теоретической математики» и РФФИ (грант № 06-01-00164-а).

²⁾ Эта величина, называемая в зарубежной литературе *the Holevo capacity*, тесно связана с пропускной способностью для передачи классической информации по квантовому каналу связи [3].

компактном пространстве входных состояний. Для канала между бесконечномерными квантовыми системами выходная энтропия, как правило, не является ограниченной функцией, что может приводить к бесконечным значениям χ -пропускной способности этого канала. Это обстоятельство приводит к необходимости введения ограничений на множество состояний входной системы, таких, например, как ограничения на среднюю энергию входного ансамбля, которые являются физически мотивированными и обеспечивают конечность χ -пропускной способности [5], [6]. Существует, однако, нетривиальный класс бесконечномерных квантовых каналов, характеризующихся конечностью χ -пропускной способности при отсутствии ограничений. Выходная энтропия таких каналов может быть ограниченной и даже непрерывной, но может принимать и бесконечные значения. Изучению именно этого класса каналов посвящена данная статья.

Из результатов работ [10], [11] следуют некоторые общие свойства каналов с конечной χ -пропускной способностью, такие как относительная компактность выходного множества состояний и существование единственного выходного оптимального среднего состояния (теорема 1). Показано (следствие 1), что любой канал с конечной χ -пропускной способностью можно равномерно приблизить последовательностью каналов с конечномерным выходным пространством таким образом, что соответствующие последовательности χ -пропускных способностей и выходных оптимальных средних сходятся к χ -пропускной способности и выходному оптимальному среднему этого канала³⁾.

Класс каналов с конечной χ -пропускной способностью содержит каналы с непрерывной выходной энтропией, названные СЕ-каналами. Эти каналы наследуют некоторые аналитические свойства конечномерных каналов, проявляя при этом и свойства, характерные для бесконечномерных каналов. Поэтому класс СЕ-каналов можно рассматривать как промежуточный и использовать технические преимущества работы с этими каналами для исследования бесконечномерных каналов и систем общего вида. Например, канал этого класса был использован в [2] при изучении свойств бесконечномерных каналов, разрушающих сцепленность, и множества несцепленных состояний.

В [6] введено понятие оптимальной меры (обобщенного ансамбля) для бесконечномерных каналов с ограничениями и получено достаточное условие ее существования. В данной статье рассмотрены специальные условия существования оптимальной меры для бесконечномерного канала с конечной χ -пропускной способностью (теорема 2, следствие 2) и построены примеры каналов с ограниченной (и даже непрерывной) вы-

³⁾ Последнее утверждение не очевидно, поскольку χ -пропускная способность не является непрерывной функцией канала в топологии равномерной сходимости [17].

ходной энтропией, не имеющих оптимальной меры (предложение 3, В) и пример 2).

Завершается статья рассмотрением одного класса бесконечномерных каналов, для которых найдена χ -пропускная способность и получено простое условие непрерывности выходной энтропии (предложение 4). СЕ-каналы этого класса проявляют специфические свойства бесконечномерных каналов такие, как отсутствие входных оптимальных средних состояний и оптимальной меры, разрывность χ -пропускной способности как функции канала (пример 2).

2. Предварительные сведения. Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ — алгебра всех ограниченных операторов в $\mathcal{H}$, $\mathfrak{I}(\mathcal{H})$ — банахово пространство всех ядерных операторов со следовой нормой $\|\cdot\|_1$. *Состоянием* далее называется положительный ядерный оператор ρ в $\mathcal{H}$ с единичным следом: $\rho \geq 0$, $\text{Tr } \rho = 1$. Алгебра $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ обычно называется алгеброй наблюдаемых квантовой системы, тогда состояние задает функционал математического ожидания $A \mapsto \text{Tr } \rho A$; $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, т.е. нормальное состояние в смысле теории операторных алгебр [1]. Множество всех состояний $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ — выпуклое замкнутое подмножество $\mathfrak{I}(\mathcal{H})$, которое является полным сепарабельным метрическим пространством с метрикой, определяемой следовой нормой.

Пусть A и B — положительные операторы из $\mathfrak{I}(\mathcal{H})$. Энтропия фон Неймана оператора A и относительная энтропия операторов A и B определяются соответственно выражениями

$$H(A) = - \sum_i \langle i | A \log A | i \rangle,$$

$$H(A \| B) = \sum_i \langle i | (A \log A - A \log B + B - A) | i \rangle,$$

в которых $\{|i\rangle\}$ — базис из собственных векторов оператора A (подробнее см. в [14], [20]). Энтропия и относительная энтропия являются полунепрерывными снизу функциями своих аргументов со значениями в $[0, +\infty]$, первая из которых вогнута, а вторая выпукла по совокупности аргументов [14], [20].

Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}'$ — пара гильбертовых пространств. Канал Φ — это линейное, положительное, сохраняющее след отображение $\mathfrak{I}(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{I}(\mathcal{H}')$ такое, что двойственное отображение $\Phi^*: \mathfrak{B}(\mathcal{H}') \mapsto \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ (которое существует, поскольку Φ ограничено) является вполне положительным [4]. В частности, канал отображает *входные* состояния из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ в *выходные* состояния из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}')$.

Для произвольного множества $\mathcal{A}$ обозначим $\text{co}(\mathcal{A})$ и $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$ его выпуклую оболочку и его выпуклое замыкание соответственно. Множество всех крайних точек множества $\mathcal{A}$ обозначим $\text{Extr}(\mathcal{A})$ [8].

Говоря о непрерывности какой-либо функции на некотором множестве состояний, мы будем иметь в виду непрерывность сужения этой функции на данное множество.

Конечный набор состояний $\{\rho_i\}$ с соответствующими вероятностями $\{\pi_i\}$, далее обозначаемый $\{\pi_i, \rho_i\}$, называется (конечным) ансамблем, а состояние $\bar{\rho} = \sum_i \pi_i \rho_i$ — средним этого ансамбля. В [6] введено понятие обобщенного ансамбля как произвольной вероятностной борелевской меры μ на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Средним обобщенного ансамбля — меры μ называется барицентр этой меры, определяемый интегралом Бохнера

$$\bar{\rho}(\mu) = \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} \rho \mu(d\rho).$$

Обычное понятие ансамбля соответствует мерам с конечным носителем.

Множество всех вероятностных мер на замкнутом множестве состояний $\mathcal{A}$, снабженное топологией слабой сходимости, обозначим $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, а его подмножество, состоящее из мер с конечным носителем, обозначим $\mathcal{P}^f(\mathcal{A})$ [19]. Будем использовать сокращения $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ и $\mathcal{P}^f = \mathcal{P}^f(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$.

Далее в статье произвольный ансамбль $\{\pi_i, \rho_i\}$ будем рассматривать как частный случай вероятностной меры.

Рассмотрим функционалы

$$\chi_{\Phi}(\mu) = \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} H(\Phi(\rho) \| \Phi(\bar{\rho}(\mu))) \mu(d\rho) \quad \text{и} \quad \hat{H}_{\Phi}(\mu) = \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} H(\Phi(\rho)) \mu(d\rho).$$

В [6] показано (предложение 1 и доказательство теоремы), что эти функционалы корректно определены и полунепрерывны снизу на $\mathcal{P}$, причем

$$\chi_{\Phi}(\mu) = H(\Phi(\bar{\rho}(\mu))) - \hat{H}_{\Phi}(\mu) \quad (1)$$

для любой меры μ такой, что $H(\Phi(\bar{\rho}(\mu))) < +\infty$.

Если $\mu = \{\pi_i, \rho_i\}$, то

$$\chi_{\Phi}(\{\pi_i, \rho_i\}) = \sum_i \pi_i H(\Phi(\rho_i) \| \Phi(\bar{\rho})) \quad \text{и} \quad \hat{H}_{\Phi}(\{\pi_i, \rho_i\}) = \sum_i \pi_i H(\Phi(\rho_i)).$$

В статье будет использоваться понятие H -сходимости последовательности состояний $\{\rho_n\}$ к состоянию ρ_0 , определяемой условием

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n \| \rho_0) = 0,$$

и понятие коэффициента убывания $d(\sigma)$ состояния σ , определенного как точная нижняя грань множества $\{\lambda > 0 \mid \text{Tr } \sigma^\lambda < +\infty\}$.

В [10] показано (предложение 2), что если $H\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n = \rho_0$, то $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n) = H(\rho_0)$ при условии $d(\rho_0) < 1$.

В [10], [11] рассмотрено понятие χ -емкости $\overline{C}(\mathcal{A})$ произвольного множества $\mathcal{A}$ квантовых состояний, определяемой выражением

$$\overline{C}(\mathcal{A}) = \sup_{\{\pi_i, \rho_i\} \in \mathcal{P}^f(\mathcal{A})} \sum_i \pi_i H(\rho_i \| \bar{\rho})$$

(точная верхняя грань в котором берется по множеству всех ансамблей состояний из $\mathcal{A}$), исследованы ее свойства и введено понятие оптимального среднего состояния $\Omega(\mathcal{A})$ множества $\mathcal{A}$ с конечной χ -емкостью. Множество состояний $\mathcal{A}$ с конечной χ -емкостью называется *регулярным*, если выполнено одно из двух следующих условий:

1) $H(\Omega(\mathcal{A})) < +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n) = H(\Omega(\mathcal{A}))$ для произвольной последовательности $\{\rho_n\}$ состояний из $\text{co}(\mathcal{A})$, H -сходящейся к состоянию $\Omega(\mathcal{A})$;

2) функция $\rho \mapsto H(\rho \| \Omega(\mathcal{A}))$ непрерывна на множестве $\overline{\mathcal{A}}$ (в топологии следовой нормы).

В некотором смысле, условия в данном определении суть минимальные требования непрерывности, обеспечивающие «хорошие» свойства χ -емкости (см. теорему 2 в [10] и теорему 1 в [11]). Простейшее достаточное условие регулярности множества $\mathcal{A}$ — неравенство $d(\Omega(\mathcal{A})) < 1$ (утверждение 5 теоремы 1 в [11]), однако это условие не является необходимым и существуют регулярные множества, у которых состояние $\Omega(\mathcal{A})$ имеет бесконечную энтропию.

Все обозначения, используемые в статье, согласуются с принятыми в [10], [11].

3. Общие свойства. Пусть $\Phi: \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{H}')$ — канал с конечной χ -пропускной способностью, определяемой выражением

$$\overline{C}(\Phi) = \sup_{\{\pi_i, \rho_i\} \in \mathcal{P}^f} \chi_\Phi(\{\pi_i, \rho_i\}) = \sup_{\{\pi_i, \rho_i\} \in \mathcal{P}^f} \sum_i \pi_i H(\Phi(\rho_i) \| \Phi(\bar{\rho})). \quad (2)$$

В [6] показано, что

$$\overline{C}(\Phi) = \sup_{\mu \in \mathcal{P}} \chi_\Phi(\mu) = \sup_{\mu \in \mathcal{P}} \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} H(\Phi(\rho) \| \Phi(\bar{\rho}(\mu))) \mu(d\rho). \quad (3)$$

В соответствии с [9] последовательность ансамблей $\{\{\pi_i^n, \rho_i^n\}\}_n$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi_\Phi(\{\pi_i^n, \rho_i^n\}) = \overline{C}(\Phi),$$

называется *аппроксимирующей последовательностью* для канала Φ , а любой частичный предел соответствующей последовательности средних состояний $\{\bar{\rho}_n = \sum_i \pi_i^n \rho_i^n\}$ называется *входным оптимальным средним состоянием* для канала Φ .

Поскольку для конечномерного канала входное множество состояний компактно, для такого канала всегда существует по крайней мере

одно входное оптимальное среднее, совпадающее со средним состоянием оптимального ансамбля [18]. Для бесконечномерного канала с конечной χ -пропускной способностью входное оптимальное среднее существует не всегда (пример 1), причем его наличие является необходимым, а при некоторых дополнительных требованиях и достаточным условием существования оптимальной меры для этого канала (теорема 2, следствие 2).

По определению χ -пропускная способность канала Φ совпадает с χ -емкостью выходного множества $\Phi(\mathcal{S}(\mathcal{H}))$ этого канала [10]. Поэтому теорема 1 из [10] и теорема 1 из [11] приводят к следующему наблюдению.

Теорема 1. Пусть $\Phi: \mathcal{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{H}')$ — канал с конечной χ -пропускной способностью.

1. Множество $\Phi(\mathcal{S}(\mathcal{H}))$ является относительно компактным подмножеством множества $\mathcal{S}(\mathcal{H}')$.

2. Существует единственное состояние $\Omega(\Phi)$ в $\mathcal{S}(\mathcal{H}')$ такое, что

$$H(\Phi(\rho) \parallel \Omega(\Phi)) \leq \overline{C}(\Phi) \quad \forall \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}).$$

Состояние $\Omega(\Phi)$ лежит в $\overline{\Phi(\mathcal{S}(\mathcal{H}))}$. Для любой аппроксимирующей последовательности ансамблей $\{\{\pi_i^n, \rho_i^n\}\}_n$ соответствующая последовательность $\{\Phi(\bar{\rho}_n)\}_n$ образов их средних состояний H -сходится к состоянию $\Omega(\Phi)$.

Если существует входное оптимальное среднее состояние ρ_* для канала Φ , то $\Phi(\rho_*) = \Omega(\Phi)$.

3. Для χ -пропускной способности канала Φ имеет место выражение⁴⁾

$$\overline{C}(\Phi) = \inf_{\sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H}')} \sup_{\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})} H(\Phi(\rho) \parallel \sigma) = \sup_{\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})} H(\Phi(\rho) \parallel \Omega(\Phi)).$$

В соответствии с [9] состояние $\Omega(\Phi)$ называется *выходным оптимальным средним состоянием* для канала Φ .

Ниже мы рассмотрим примеры каналов с конечной χ -пропускной способностью, не имеющих входных оптимальных средних состояний, для которых выходное оптимальное среднее состояние явно определяется и играет важную роль в изучении этих каналов.

Для конечномерного канала Φ состояние $\Omega(\Phi)$ — это образ среднего состояния любого оптимального ансамбля для этого канала и поэтому

$$\Omega(\Phi) \in \Phi(\mathcal{S}(\mathcal{H})) \quad \text{и} \quad \overline{C}(\Phi) \leq H(\Omega(\Phi)). \quad (4)$$

⁴⁾ В силу следствия 5 из [11] точную нижнюю грань в этом выражении можно брать по подмножеству множества $\Phi(\mathcal{S}(\mathcal{H}))$, состоящему из состояний, инвариантных относительно всех симметрий α пространства $\mathcal{S}(\mathcal{H}')$ таких, что $\alpha(\Phi(\mathcal{S}(\mathcal{H}))) \subseteq \Phi(\mathcal{S}(\mathcal{H}))$.

Для бесконечномерного канала с конечной χ -пропускной способностью данные соотношения в общем случае не имеют места (см. предложение 3, В)). Включение в (4) следует из существования по крайней мере одного входного оптимального среднего для канала Φ , а достаточное условие справедливости неравенства в (4) можно выразить в терминах характеристики спектра состояния $\Omega(\Phi)$ (см. предложение 2).

Простейшие бесконечномерные каналы с конечной χ -пропускной способностью — это каналы из бесконечномерной квантовой системы в конечномерную. Следуя [17], такие каналы будем называть IF-каналами. Из теоремы 1 следует, в частности, что каждый канал с конечной χ -пропускной способностью можно равномерно приблизить последовательностью IF-каналов.

Следствие 1. Канал $\Phi: \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{H}')$ имеет конечную χ -пропускную способность тогда и только тогда, когда существует последовательность IF-каналов $\{\Phi_n: \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{H}'_n), \mathcal{H}'_n \subseteq \mathcal{H}'\}$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})} \|\Phi_n(\rho) - \Phi(\rho)\|_1 = 0 \quad \text{и} \quad \sup_n \overline{C}(\Phi_n) < +\infty.$$

Последовательность $\{\Phi_n\}$ можно выбрать таким образом, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{C}(\Phi_n) = \overline{C}(\Phi) \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \Omega(\Phi_n) = \Omega(\Phi).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если указанная последовательность $\{\Phi_n\}$ существует, то из полунепрерывности снизу χ -пропускной способности как функции канала, установленной в [17], следует, что χ -пропускная способность канала Φ конечна.

Если χ -пропускная способность канала Φ конечна, то, в силу теоремы 1, множество $\Phi(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ относительно компактно. Пусть $\{P_n\}$ — последовательность проекторов конечного ранга в $\mathcal{H}'$, сильно сходящаяся к единичному оператору $I_{\mathcal{H}'}$. Из критерия компактности (см. приложение в [6]) следует, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})} \text{Tr } \Phi(\rho) P_n = 1$. Поэтому последовательность IF-каналов

$$\Phi_n(\rho) = P_n \Phi(\rho) P_n + (\text{Tr } (I_{\mathcal{H}'} - P_n) \Phi(\rho)) \tau_n$$

из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{S}(P_n(\mathcal{H}') \oplus \mathcal{H}''_n)$, где τ_n — чистое состояние, соответствующее произвольному единичному вектору из некоторого конечномерного подпространства $\mathcal{H}''_n \subseteq \mathcal{H}' \ominus P_n(\mathcal{H}')$, равномерно сходится к каналу Φ . Поскольку при каждом n канал Φ_n можно представить в виде композиции канала Φ и канала $\rho \mapsto P_n \rho P_n + (\text{Tr } (I_{\mathcal{H}'} - P_n) \rho) \tau_n$, из свойства монотонности относительной энтропии (см. [15], [20]) вытекает неравенство $\overline{C}(\Phi_n) \leq \overline{C}(\Phi)$ для всех n . С учетом этого неравенства предельные

выражения во второй части следствия доказываются с помощью леммы 1 из [11].

Следствие 1 показывает, что класс каналов с конечной χ -пропускной способностью достаточно близок к классу IF-каналов. Тем не менее, каналы этого класса проявляют многие специфические свойства бесконечномерных каналов (см. примеры 1 и 2).

Существуют бесконечномерные каналы с конечной χ -пропускной способностью, которые наиболее близки по своим аналитическим свойствам к конечномерным каналам.

О п р е д е л е н и е 1. Канал $\Phi: \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{H}')$ называется **СЕ-каналом**, если сужение квантовой энтропии на множество $\overline{\Phi(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))}$ является непрерывным (в топологии следовой нормы).

Используя результаты из [10], [11], можно получить различные достаточные условия СЕ-свойства (см. предложение 2). В частности, из [11, предложение 8] следует, что класс СЕ-каналов замкнут относительно тензорных произведений: *если $\Phi: \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{H}')$ и $\Psi: \mathfrak{S}(\mathcal{K}) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{K}')$ СЕ-каналы, то канал $\Phi \otimes \Psi: \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K}')$ также является СЕ-каналом.*

χ -пропускная способность канала Φ совпадает с точной верхней гранью χ -функции канала Φ , определяемой выражением

$$\begin{aligned} \chi_{\Phi}(\rho) &= \sup_{\{\pi_i, \rho_i\} \in \mathcal{P}_{\{\rho\}}^{\dagger}} \sum_i \pi_i H(\Phi(\rho_i) \| \Phi(\rho)) \\ &= \sup_{\mu \in \mathcal{P}_{\{\rho\}}} \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} H(\Phi(\sigma) \| \Phi(\rho)) \mu(d\sigma), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\mathcal{P}_{\{\rho\}}$ — множество всех вероятностных мер на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ с барицентром ρ (см. [6]).

В [9] показано, что выпуклое замыкание выходной энтропии канала Φ определяется выражением

$$\hat{H}_{\Phi}(\rho) = \inf_{\mu \in \mathcal{P}_{\{\rho\}}} \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} H(\Phi(\rho)) \mu(d\rho) \leq +\infty.$$

В отличие от χ -функции, в определении $\hat{H}$ -функции точная нижняя грань по всем мерам из $\mathcal{P}_{\{\rho\}}$, вообще говоря, не совпадает с точной нижней гранью по всем мерам из $\mathcal{P}_{\{\rho\}}$ с конечным носителем (лемма 2 в [9]).

χ -функция и $\hat{H}$ -функция произвольного канала — неотрицательные полунепрерывные снизу вогнутая и выпуклая функции соответственно [9]. Следующее предложение показывает, в частности, что свойства χ -функции и $\hat{H}$ -функции СЕ-канала близки к свойствам соответствующих функций конечномерного канала.

Предложение 1. Пусть Φ — канал с конечной χ -пропускной способностью. Тогда

$$\chi_{\Phi}(\rho) \leq \overline{C}(\Phi) - H(\Phi(\rho) \parallel \Omega(\Phi)) \quad \forall \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}).$$

Если Φ есть СЕ-канал, то функции χ_{Φ} и $\hat{H}_{\Phi}$ непрерывны и ограничены на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, причем для любого $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$

$$\chi_{\Phi}(\rho) = H(\Phi(\rho)) - \hat{H}_{\Phi}(\rho) \quad \text{и} \quad \hat{H}_{\Phi}(\rho) = \inf_{\{\pi_i, \rho_i\} \in \mathcal{P}_{\{\rho\}}^{\mathfrak{f}}} \sum_i \pi_i H(\Phi(\rho_i)).$$

Доказательство. Неравенство для χ -функции вытекает из предложения 3 в [9]. Утверждение о непрерывности и представления для χ -функции и для $\hat{H}$ -функции следуют из предложения 5 и теоремы 1 в [9].

Следующее предложение показывает особую роль выходного оптимального среднего состояния $\Omega(\Phi)$.

Предложение 2. Пусть Φ — канал с конечной χ -пропускной способностью.

Если $d(\Omega(\Phi)) < 1$, то $\sup_{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})} H(\Phi(\rho)) < +\infty$ и $\overline{C}(\Phi) \leq H(\Omega(\Phi))$.

Если $d(\Omega(\Phi)) = 0$, то Φ является СЕ-каналом.

Доказательство. Предположим, что $d(\Omega(\Phi)) < 1$. Из утверждения 5 теоремы 1 в [11] следует, что энтропия ограничена на множестве $\overline{\Phi(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))}$. В силу теоремы 1 для произвольной аппроксимирующей последовательности ансамблей $\{\{\pi_i^n, \rho_i^n\}\}_n$ соответствующая последовательность $\{\Phi(\bar{\rho}_n)\}_n$ образов средних состояний H -сходится к состоянию $\Omega(\Phi)$. В силу предложения 2 в [10] из условия $d(\Omega(\Phi)) < 1$ следует, что

$$\overline{C}(\Phi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \chi_{\Phi}(\{\pi_i^n, \rho_i^n\}) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} H(\Phi(\bar{\rho}_n)) = H(\Omega(\Phi)).$$

Предположим, что $d(\Omega(\Phi)) = 0$. Из утверждения 5 теоремы 1 в [11] следует, что энтропия непрерывна на множестве $\overline{\Phi(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))}$.

Утверждения данного предложения иллюстрируются в приведенном ниже примере 1, в котором рассмотрено семейство каналов с различными коэффициентами убывания выходного оптимального среднего состояния.

З а м е ч а н и е 1. Пусть $\hat{\mathfrak{S}}(\mathcal{H})$ — подмножество пространства $(\mathfrak{B}(\mathcal{H}))^*$, состоящее из положительных функционалов на $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ с единичной нормой. Известно, что $\hat{\mathfrak{S}}(\mathcal{H})$ компактно в $*$ -слабой топологии и что $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ является $*$ -слабо плотным подмножеством множества $\hat{\mathfrak{S}}(\mathcal{H})$ [1]. Предкомпактность множества значений произвольного канала $\Phi: \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{H}')$ с конечной χ -пропускной способностью, гарантируемая теоремой 1, обеспечивает существование у этого канала расширения на $\hat{\mathfrak{S}}(\mathcal{H})$, т.е. такого отображения $\hat{\Phi}: \hat{\mathfrak{S}}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{H}')$, непрерывного относительно $*$ -слабой топологии на множестве $\hat{\mathfrak{S}}(\mathcal{H})$ и топологии следовой нормы на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H}')$, что $\hat{\Phi}|_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} = \Phi$. Можно показать, что расширение канала не приводит к увеличению χ -пропускной

способности, но может приводить к уменьшению минимальной выходной энтропии.

4. Оптимальная мера. В соответствии с [6] мера μ_* из $\mathcal{P}(\text{Ext}(\mathfrak{S}(\mathcal{H})))$, на которой достигается точная верхняя грань в определении (3), называется *оптимальной мерой* (обобщенным оптимальным ансамблем) для канала Φ .

Понятие оптимальной меры является обобщением понятия оптимального ансамбля для конечномерного канала. В [18] показано, что каждый оптимальный ансамбль характеризуется свойством максимальной равноудаленности. В первой части следующей теоремы это свойство обобщается на случай бесконечномерных каналов.

Теорема 2. Пусть $\Phi: \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{H}')$ — канал с конечной χ -пропускной способностью.

Если существует оптимальная мера μ_* для канала Φ , то ее барицентр $\bar{\rho}(\mu_*)$ является входным оптимальным средним состоянием для канала Φ и имеет место следующее свойство максимальной равноудаленности:

$$H(\Phi(\rho) \parallel \Omega(\Phi)) = \bar{C}(\Phi) \quad \text{для } \mu_*\text{-почти всех } \rho \text{ из } \mathfrak{S}(\mathcal{H}).$$

Если существует входное оптимальное среднее состояние ρ_* для канала Φ и множество $\Phi(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ является регулярным⁵⁾, то существует оптимальная мера μ_* для канала Φ такая, что $\bar{\rho}(\mu_*) = \rho_*$.

Доказательство. Поскольку каждую вероятностную меру можно аппроксимировать слабо сходящейся последовательностью мер с конечным носителем, из полунепрерывности снизу функционала χ_Φ следует, что барицентр $\bar{\rho}(\mu_*)$ любой оптимальной меры μ_* для канала Φ является входным оптимальным средним состоянием для этого канала. Свойство максимальной равноудаленности следует из определения оптимальной меры и теоремы 1.

Предположим, что множество $\Phi(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ является регулярным и $\{\mu_n = \{\pi_i^n, \rho_i^n\}\}_n$ — аппроксимирующая последовательность ансамблей для канала Φ такая, что соответствующая последовательность $\{\bar{\rho}(\mu_n)\}_n$ сходится к состоянию ρ_* . В силу выпуклости и полунепрерывности снизу относительной энтропии можно считать, что каждый ансамбль в этой последовательности состоит из чистых состояний. Поскольку последовательность $\{\bar{\rho}(\mu_n)\}_n$ предкомпактна, последовательность $\{\mu_n\}_n$ слабо предкомпактна в силу предложения 2 в [6] и, следовательно, она содержит слабо сходящуюся подпоследовательность. Поэтому без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{\mu_n\}_n$

⁵⁾ См. определение в п. 2 (с. 736).

слабо сходится к некоторой мере μ_* , носитель которой, в силу теоремы 6.1 в [19], состоит из чистых состояний.

Для каждого n пусть $\nu_n = \mu_n \circ \Phi^{-1}$ — образ меры μ_n при отображении Φ , так что $\nu_n = \{\pi_i^n, \Phi(\rho_i^n)\}$. Нетрудно видеть, что $\{\nu_n\}_n$ — аппроксимирующая последовательность ансамблей для множества $\Phi(\mathcal{S}(\mathcal{H}))$ в терминологии [10]. Поскольку это множество регулярно по условию, рассуждения в доказательстве теоремы 2 в [10] показывают существование подпоследовательности мер $\{\nu_{n_k}\}_k$, слабо сходящейся к оптимальной мере ν_* для множества $\Phi(\mathcal{S}(\mathcal{H}))$. Но из слабой сходимости последовательности $\{\mu_{n_k}\}_k$ к мере μ_* следует слабая сходимость последовательности $\{\mu_{n_k} \circ \Phi^{-1}\}_k$ к мере $\mu_* \circ \Phi^{-1}$. Поэтому $\mu_* \circ \Phi^{-1} = \nu_*$, а значит, μ_* — оптимальная мера для канала Φ . Теорема 2 доказана.

Утверждение 5 теоремы 1 в [11] и теорема 2 приводят к следующему достаточному условию существования оптимальной меры.

Следствие 2. Если существует входное оптимальное среднее состояние для канала Φ и выполнено одно из следующих условий:

- 1) $d(\Omega(\Phi)) < 1$;
- 2) Φ есть СЕ-канал,

то существует оптимальная мера для канала Φ .

Следствие 2 может быть также использовано для доказательства отсутствия входных оптимальных средних состояний у таких каналов, для которых легко доказывается отсутствие оптимальной меры (см. пример 2 в п. 5).

З а м е ч а н и е 2. Условия в теореме 2 и в следствии 2 являются существенными, как показывают примеры каналов с конечной χ -пропускной способностью, для которых не существует оптимальных мер (предложение 3, В) и пример 2).

Для иллюстрации приведенных выше общих результатов рассмотрим следующее семейство каналов, зависящих от последовательности положительных чисел.

П р и м е р 1. Пусть $\{|n\rangle\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ — ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}'$ и $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность чисел из $(0, 1]$, сходящаяся к нулю. Рассмотрим множество $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1$, состоящее из чистых состояний

$$\sigma_k = (1 - q_{|k|})|0\rangle\langle 0| + q_{|k|}|k\rangle\langle k| + \text{sign}(k)\sqrt{(1 - q_{|k|})q_{|k|}}(|0\rangle\langle k| + |k\rangle\langle 0|),$$

индексируемых множеством $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Множество состояний $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1$ можно рассматривать как последовательность, сходящуюся к состоянию $|0\rangle\langle 0|$. Свойства этого множества исследованы в примере 1 подраздела 3.1 в [11].

Рассмотрим канал

$$\Phi_{\{q_n\}}(\rho) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \langle k|\rho|k\rangle \sigma_k,$$

где $\{|k\rangle\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ — некоторый ортонормированный базис в $\mathcal{H}$.

Канал $\Phi_{\{q_n\}}$ является каналом, разрушающим спеленность (см. [16], [2]), причем $\overline{\Phi_{\{q_n\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))} = \overline{\text{co}}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1)$ — компактное подмножество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Поскольку последовательность $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1$ состоит из чистых состояний, нетрудно видеть, что $\overline{C}(\Phi_{\{q_n\}}) = \sup_{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})} H(\Phi_{\{q_n\}}(\rho))$. Пусть $\lambda_{\{q_n\}}^*$ — точная нижняя грань множества $\{\lambda: \sum_n \exp(-\lambda/q_n) < +\infty\}$, если оно не пусто, и $\lambda_{\{q_n\}}^* = +\infty$ в противном случае. Пусть

$$F_{\{q_n\}}(\lambda) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{q_n} - 1 \right) \exp \left(-\frac{\lambda}{q_n} \right)$$

— убывающая функция на $[\lambda_{\{q_n\}}^*, +\infty)$ с множеством значений $(0, +\infty]$.

Предложение 3. *Справедливы следующие утверждения.*

A) Если $\lambda_{\{q_n\}}^* = 0$, то

- $\Phi_{\{q_n\}}$ является СЕ-каналом;
- существуют единственная оптимальная мера и единственное входное оптимальное среднее для канала $\Phi_{\{q_n\}}$;
- $\Omega(\Phi_{\{q_n\}}) \in \Phi_{\{q_n\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$, $d(\Omega(\Phi_{\{q_n\}})) = 0$ и $\overline{C}(\Phi_{\{q_n\}}) = H(\Omega(\Phi_{\{q_n\}}))$.

B) Если $0 < \lambda_{\{q_n\}}^* < +\infty$ и $F_{\{q_n\}}(\lambda_{\{q_n\}}^*) \geq 1$, то

- $\overline{C}(\Phi_{\{q_n\}}) < +\infty$, но $\Phi_{\{q_n\}}$ не является СЕ-каналом;
- существуют единственная оптимальная мера и единственное входное оптимальное среднее для канала $\Phi_{\{q_n\}}$;
- $\Omega(\Phi_{\{q_n\}}) \in \Phi_{\{q_n\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$; $0 < d(\Omega(\Phi_{\{q_n\}})) \leq 1$ и $\overline{C}(\Phi_{\{q_n\}}) = H(\Omega(\Phi_{\{q_n\}}))$.⁶⁾

B) Если $0 < \lambda_{\{q_n\}}^* < +\infty$ и $F_{\{q_n\}}(\lambda_{\{q_n\}}^*) < 1$, то

- $\overline{C}(\Phi_{\{q_n\}}) < +\infty$, но $\Phi_{\{q_n\}}$ не является СЕ-каналом;
- не существует ни оптимальной меры, ни входного оптимального среднего для канала $\Phi_{\{q_n\}}$;
- $\Omega(\Phi_{\{q_n\}}) \in \overline{\Phi_{\{q_n\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))} \setminus \Phi_{\{q_n\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$, $d(\Omega(\Phi_{\{q_n\}})) = 1$ и $\overline{C}(\Phi_{\{q_n\}}) > H(\Omega(\Phi_{\{q_n\}}))$.

Г) Если $\lambda_{\{q_n\}}^* = +\infty$, то $\overline{C}(\Phi_{\{q_n\}}) = +\infty$.

⁶⁾ В этом случае $d(\Omega(\Phi_{\{q_n\}})) = 1$ тогда и только тогда, когда $F_{\{q_n\}}(\lambda_{\{q_n\}}^*) = 1$.

В случаях А) и Б) χ -пропускная способность, единственная оптимальная мера, единственное входное и выходное оптимальные средние для канала $\Phi_{\{q_n\}}$ определяются соответственно выражениями:

$$\overline{C}(\Phi_{\{q_n\}}) = \lambda_{\{q_n\}}^1 - \log \pi_{\{q_n\}}^1, \quad \mu_* = \left\{ \frac{\pi_{\{q_n\}}^1}{2q_{|k|}} \exp \left(-\frac{\lambda_{\{q_n\}}^1}{q_{|k|}} \right), |k\rangle\langle k| \right\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}},$$

$$\bar{\rho}(\mu_*) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\pi_{\{q_n\}}^1}{2q_{|k|}} \exp \left(-\frac{\lambda_{\{q_n\}}^1}{q_{|k|}} \right) |k\rangle\langle k|,$$

$$\Omega(\Phi_{\{q_n\}}) = \pi_{\{q_n\}}^1 |0\rangle\langle 0| + \pi_{\{q_n\}}^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \exp \left(-\frac{\lambda_{\{q_n\}}^1}{q_n} \right) |n\rangle\langle n|,$$

где $\lambda_{\{q_n\}}^1$ — единственное решение уравнения $F_{\{q_n\}}(\lambda) = 1$ и

$$\pi_{\{q_n\}}^1 = \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \exp \left(-\frac{\lambda_{\{q_n\}}^1}{q_n} \right) \right)^{-1} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q_n} \exp \left(-\frac{\lambda_{\{q_n\}}^1}{q_n} \right) \right)^{-1} \in [0, 1].$$

В случае В) χ -пропускная способность и выходное оптимальное среднее для канала $\Phi_{\{q_n\}}$ определяются соответственно выражениями:

$$\overline{C}(\Phi_{\{q_n\}}) = \lambda_{\{q_n\}}^* - \log \pi_{\{q_n\}}^*,$$

$$\Omega(\Phi_{\{q_n\}}) = \pi_{\{q_n\}}^* |0\rangle\langle 0| + \pi_{\{q_n\}}^* \sum_{n=1}^{+\infty} \exp \left(-\frac{\lambda_{\{q_n\}}^*}{q_n} \right) |n\rangle\langle n|,$$

где

$$\pi_{\{q_n\}}^* = \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \exp \left(-\frac{\lambda_{\{q_n\}}^*}{q_n} \right) \right)^{-1} \in [0, 1].$$

Доказательство. Если $\lambda_{\{q_n\}}^* = +\infty$, то $\overline{C}(\Phi_{\{q_n\}}) = \overline{C}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1) = +\infty$ в силу предложения 4 в [11].

Пусть $\lambda_{\{q_n\}}^* < +\infty$. Без ограничения общности можно считать, что $q_{n+1} \leq q_n$ для всех n . Пусть

$$H = 0|0\rangle\langle 0| + \sum_{n=1}^{+\infty} q_n^{-1} |n\rangle\langle n| \quad (6)$$

— $\mathfrak{H}$ -оператор в $\mathcal{H}'$ такой, что $g(H) = \lambda_{\{q_n\}}^*$ (см. [10, § 3]). Нетрудно видеть, что $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1 \subseteq \mathcal{H}_{H,1}$ и поэтому из предложения 6 в [11] следует, что $\overline{C}(\Phi_{\{q_n\}}) = \overline{C}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1) \leq \overline{C}(\mathcal{H}_{H,1}) = \sup_{\rho \in \mathcal{H}_{H,1}} H(\rho) < +\infty$. Покажем, что $\overline{C}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1) = \overline{C}(\mathcal{H}_{H,1})$. В доказательстве предложения 1 в [10] (см. формулу (8)) построена последовательность $\{\rho_n\}$ состояний и показано, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n) = \sup_{\rho \in \mathcal{H}_{H,1}} H(\rho)$. Для $\mathfrak{H}$ -оператора H , определенного

формулой (6), состояния данной последовательности имеют вид

$$\rho_n = \left(1 + \sum_{k=1}^n \exp\left(-\frac{\lambda_n}{q_k}\right)\right)^{-1} \left(|0\rangle\langle 0| + \sum_{k=1}^n \exp\left(-\frac{\lambda_n}{q_k}\right) |k\rangle\langle k|\right) \quad (7)$$

для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$, где λ_n — единственное решение уравнения

$$1 + \sum_{k=1}^n \exp\left(-\frac{\lambda}{q_k}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{q_k} \exp\left(-\frac{\lambda}{q_k}\right). \quad (8)$$

Последовательность состояний, определенных формулой (7), лежит в $\overline{\text{co}}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1)$. Действительно, для данного n рассмотрим распределение вероятностей

$$\pi_k^n = \left(\sum_{j=1}^n \frac{2}{q_j} \exp\left(-\frac{\lambda_n}{q_j}\right)\right)^{-1} \frac{1}{q_{|k|}} \exp\left(-\frac{\lambda_n}{q_{|k|}}\right), \quad 0 < |k| \leq n.$$

Учитывая равенство (8) при $\lambda = \lambda_n$, нетрудно видеть, что $\sum_k \pi_k^n \sigma_k = \rho_n$ и, следовательно, $\rho_n \in \overline{\text{co}}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1)$. Поэтому из предложения 6 работы [11] и утверждения 3 теоремы 1 этой же работы следует, что

$$\overline{C}(\Phi_{\{q_n\}}) = \overline{C}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1) = \overline{C}(\mathcal{H}_{H,1}) = \lambda^* - \log \pi^* \quad (9)$$

и

$$\Omega(\Phi_{\{q_n\}}) = \Omega(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1) = \Omega(\mathcal{H}_{H,1}) = \pi^* |0\rangle\langle 0| + \pi^* \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\lambda^*}{q_n}\right) |n\rangle\langle n|, \quad (10)$$

где $\pi^* = (1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-\lambda^*/q_n))^{-1}$ и λ^* — единственное решение уравнения

$$1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\lambda}{q_k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{q_k} \exp\left(-\frac{\lambda}{q_k}\right), \quad (11)$$

если

$$h_*(H) = \frac{\text{Tr } H \exp(-g(H)H)}{\text{Tr } \exp(-g(H)H)} = \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} (1/q_k) \exp(-\lambda_{\{q_n\}}^*/q_k)}{1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \exp(-\lambda_{\{q_n\}}^*/q_k)} \geq h = 1, \quad (12)$$

и $\lambda^* = \lambda_{\{q_n\}}^*$ в противном случае. Нетрудно видеть, что (11) равносильно уравнению $F_{\{q_n\}}(\lambda) = 1$, а (12) — неравенству $F_{\{q_n\}}(\lambda_{\{q_n\}}^*) \geq 1$.

Утверждение о существовании и единственности оптимальной меры μ_* для канала $\Phi_{\{q_n\}}$ в случаях А) и Б), а также выражение для этой меры следуют из предложения 4 в [11] (с $\varepsilon = 1$). Барицентр меры μ_* — единственное входное оптимальное среднее для канала $\Phi_{\{q_n\}}$. Единственность этого среднего вытекает из единственности оптимальной меры, поскольку предложение 6 в [11] с учетом (10) гарантирует регулярность

множества $\Phi_{\{q_n\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H})) \subseteq \mathcal{K}_{H,1}$ в случаях А) и Б), а значит, в силу теоремы 2, каждое входное оптимальное среднее является барицентром по крайней мере одной оптимальной меры.

В случаях А) и Б) состояние $\Omega(\Phi_{\{q_n\}})$ является образом барицентра оптимальной меры и, следовательно, лежит в $\Phi_{\{q_n\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$. Для доказательства отсутствия входных оптимальных средних для канала $\Phi_{\{q_n\}}$ в случае В) достаточно показать, что состояние $\Omega(\Phi_{\{q_n\}})$ не лежит в $\Phi_{\{q_n\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$.

Поскольку множество $\Phi_{\{q_n\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ является σ -выпуклой оболочкой множества $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1 = \{\sigma_k\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, предположение $\Omega(\Phi_{\{q_n\}}) \in \Phi_{\{q_n\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ означает существование распределения вероятностей $\{\pi_k\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ такого, что $\Omega(\Phi_{\{q_n\}}) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \pi_k \sigma_k$. Сравнивая данное разложение с выражением (10) для состояния $\Omega(\Phi_{\{q_n\}})$ в случае В), получаем

$$q_k(\pi_{-k} + \pi_k) = \frac{\exp(-\lambda_{\{q_n\}}^*/q_k)}{1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \exp(-\lambda_{\{q_n\}}^*/q_j)} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{q_k} \exp\left(-\frac{\lambda_{\{q_n\}}^*}{q_k}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\lambda_{\{q_n\}}^*}{q_k}\right).$$

Последнее равенство означает, что в неравенстве (15) в работе [10] для $\mathfrak{H}$ -оператора H , определенного формулой (6), на самом деле имеет место равенство. В [10] показано, что равенство в неравенстве (15) равносильно неравенству $h_*(H) \geq h = 1$, которое, в свою очередь, равносильно неравенству $F_{\{q_n\}}(\lambda_{\{q_n\}}^*) \geq 1$, противоречащему определению случая В).

Если $\lambda_{\{q_n\}}^* = g(H) = 0$, то из (10) следует $d(\Omega(\Phi_{\{q_n\}})) = 0$, а значит, в силу предложения 2, $\Phi_{\{q_n\}}$ является СЕ-каналом.

Предположим, что энтропия непрерывна на множестве $\overline{\text{co}}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1)$. Рассмотрим последовательность состояний

$$\rho_n = \left(1 - \sum_{k=1}^n q_k \pi_k\right) |0\rangle\langle 0| + \sum_{k=1}^n q_k \pi_k |k\rangle\langle k| = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \pi_k (\sigma_k + \sigma_{-k}),$$

где $\{\pi_k = q_k^{-1}(\sum_{k=1}^n q_k^{-1})^{-1}\}_{k=1}^n$ — распределение вероятностей. Нетрудно видеть, что эта последовательность лежит в $\text{co}(\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1)$ и сходится к чистому состоянию $|0\rangle\langle 0|$. В силу предположения о непрерывности энтропии $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(\rho_n) = 0$, откуда следует

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(q_k \pi_k (-\log(q_k \pi_k))) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n f\left(\sum_{k=1}^n q_k^{-1}\right) = 0, \quad (13)$$

где $f(x) = x^{-1} \log x$. Поскольку функция $f(x)$ убывает при больших x , из очевидного неравенства $\sum_{k=1}^n q_k^{-1} \leq n q_n^{-1}$ и (13) следует $\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu_n = 0$,

где $\nu_n = nf(nq_n^{-1}) = q_n \log(nq_n^{-1})$. Поэтому для произвольного $\lambda > 0$ имеем

$$\left(\frac{q_n}{n}\right)^{\lambda/\nu_n} = \exp\left(-\frac{\lambda}{q_n}\right),$$

откуда следует $\lambda_{\{q_n\}}^* = 0$. Предложение 3 доказано.

Наиболее интересный случай в приведенном выше предложении — случай В), в котором канал $\Phi_{\{q_n\}}$ проявляет существенно бесконечномерные свойства. Пример последовательности $\{q_n\}$, соответствующей этому случаю, рассмотрен в конце подраздела 3.1 в [11].

Пример 1 можно обобщить, если вместо множества $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^1$ рассмотреть множество $\mathcal{S}_{\{q_n\}}^\varepsilon$ при произвольном ε из $[0, 1]$ (см. [11]).

5. Об одном классе каналов. В этом пункте рассмотрен нетривиальный класс каналов, разрушающих сцепленность, которые обобщают пример из [2]. Для каналов этого класса χ -пропускная способность и минимальная выходная энтропия определяются явно, а также существует простое необходимое и достаточное условие непрерывности энтропии на замыкании выходного множества (СЕ-свойства).

Пусть G — компактная группа, $\{V_g\}$ — унитарное представление G в $\mathcal{H}'$, $M(dg)$ — положительная операторнозначная мера на G такая, что множество вероятностных мер $\{\text{Tr } \rho M(\cdot)\}_{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})}$ слабо плотно во множестве всех вероятностных мер на G .

Для произвольного состояния σ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}')$ рассмотрим канал

$$\Phi_\sigma(\rho) = \int_G V_g \sigma V_g^* \text{Tr } \rho M(dg).$$

Пусть $\omega(G, V_g, \sigma) = \int_G V_g \sigma V_g^* \mu_H(dg)$, где μ_H — мера Хаара на G . Из предположения слабой плотности множества $\{\text{Tr } \rho M(\cdot)\}_{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})}$ во множестве всех вероятностных мер на G следует, что $\overline{\Phi_\sigma(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))} = \overline{\text{co}}\{V_g \sigma V_g^*\}_{g \in G}$. Поэтому, используя предложение 10 в [11], нетрудно показать справедливость следующего утверждения.

Предложение 4. χ -пропускная способность канала Φ_σ определяется выражением

$$\overline{C}(\Phi_\sigma) = H(\sigma \| \omega(G, V_g, \sigma)).$$

Если $\overline{C}(\Phi_\sigma) < +\infty$, то $\Omega(\Phi_\sigma) = \omega(G, V_g, \sigma)$ и $H_{\min}(\Phi_\sigma) = H(\sigma)$.

Канал Φ_σ является СЕ-каналом тогда и только тогда, когда

$$H(\omega(G, V_g, \sigma)) < +\infty.$$

В этом случае $\overline{C}(\Phi_\sigma) = H(\omega(G, V_g, \sigma)) - H(\sigma) = H(\Omega(\Phi_\sigma)) - H_{\min}(\Phi_\sigma)$.

Если канал Φ_σ является СЕ-каналом, то, в силу следствия 2, достаточным условием существования оптимальной меры является наличие

по крайней мере одного входного оптимального среднего. Однако именно это условие может быть не выполнено, как показывает следующий пример.

Пример 2. Пусть $G = \mathbf{T}$ — одномерная группа вращений (тор), представленная в виде полуинтервала $[0, 2\pi)$. В этом случае мера Хара — это нормированная мера Лебега на $[0, 2\pi)$. Пусть $\{V_g\}_{g \in G}$ — группа сдвигов в $\mathcal{H}' = \mathcal{L}_2(\mathbf{T})$ и $M(dg)$ — спектральная мера оператора умножения на независимую переменную в $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(\mathbf{T})$. Нетрудно видеть, что предположение о слабой плотности в этом случае выполнено, а значит, все утверждения предложения 4 имеют место для соответствующего канала Φ_σ при произвольном состоянии σ из $\mathfrak{S}(\mathcal{L}_2(\mathbf{T}))$. Предположим, что $\sigma = |\varphi\rangle\langle\varphi|$, где φ — произвольная функция из $\mathcal{L}_2(\mathbf{T})$ с единичной нормой. Тогда $\omega(G, V_g, |\varphi\rangle\langle\varphi|) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} |\varphi_x\rangle\langle\varphi_x| dx$, где $\varphi_x(t) = \varphi(t - x)$. Этот канал был первоначально использован в [2] как пример канала, разрушающего сцепленность, который не имеет канонического представления с чисто атомической положительной операторнозначной мерой и, следовательно, не имеет представления Крауса с операторами ранга 1.⁷⁾ В настоящей статье этот канал рассматривается как пример СЕ-канала, который демонстрирует свойства, характерные для бесконечномерных каналов.

Используя предложение 4, нетрудно получить (см. также [2]), что

$$\overline{C}(\Phi_{|\varphi\rangle\langle\varphi|}) = H(\omega(\mathbf{T}, V_g, |\varphi\rangle\langle\varphi|)) = - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\varphi_k|^2 \log |\varphi_k|^2, \quad (14)$$

где $\{\varphi_k = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} \varphi(x) dx\}_{k \in \mathbf{Z}}$ — множество коэффициентов Фурье функции φ , и что из конечности ряда (14) следует, что $\Phi_{|\varphi\rangle\langle\varphi|}$ есть СЕ-канал и

$$\Omega(\Phi_{|\varphi\rangle\langle\varphi|}) = \omega(\mathbf{T}, V_g, |\varphi\rangle\langle\varphi|) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\varphi_k|^2 |\tau_k\rangle\langle\tau_k|,$$

где $\{\tau_k(x) = \exp(ikx)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ — тригонометрический базис в $\mathcal{L}_2(\mathbf{T})$. Интересно отметить, что свойства канала $\Phi_{|\varphi\rangle\langle\varphi|}$ определяются скоростью убывания коэффициентов Фурье функции φ .

Предположим, что для некоторой функции φ ряд (14) конечен и, следовательно, $\Phi_{|\varphi\rangle\langle\varphi|}$ — СЕ-канал. В силу предложения 4 $H_{\min}(\Phi_{|\varphi\rangle\langle\varphi|}) = 0$, несмотря на то, что множество $\Phi_{|\varphi\rangle\langle\varphi|}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ не содержит чистых состояний. В силу предложения 1 функции $\chi_{\Phi_{|\varphi\rangle\langle\varphi|}}$ и $\hat{H}_{\Phi_{|\varphi\rangle\langle\varphi|}}$ ограничены и непрерывны на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Тем не менее не существует ни оптимальной меры, ни входного оптимального среднего состояния для канала $\Phi_{|\varphi\rangle\langle\varphi|}$

⁷⁾ Любой конечномерный канал, разрушающий сцепленность, имеет представление Крауса с операторами ранга 1 [16].

(поскольку в противном случае следствие 2 приводит к существованию оптимальной меры). Непрерывные функции $\chi_{\Phi_{|\varphi\rangle\langle\varphi|}}$ и $\hat{H}_{\Phi_{|\varphi\rangle\langle\varphi|}}$ не достигают соответственно точной верхней грани $\overline{C}(\Phi_{|\varphi\rangle\langle\varphi|}) < +\infty$ и точной нижней грани $H_{\min}(\Phi_{|\varphi\rangle\langle\varphi|}) = 0$ на некомпактном множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

Семейство каналов $\{\Phi_{|\varphi\rangle\langle\varphi|}\}_{\varphi \in \mathcal{L}_2(\mathbf{T})}$ можно использовать для построения еще одного примера, показывающего, что χ -пропускная способность не является непрерывной функцией канала в бесконечномерном случае (см. [17]).

Нетрудно видеть, что для произвольной последовательности $\{|\varphi_n\rangle\}$ единичных векторов из $\mathcal{L}_2(\mathbf{T})$, сходящейся к вектору $|\varphi_*\rangle$ из $\mathcal{L}_2(\mathbf{T})$, последовательность $\sup_{\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})} \|\Phi_{|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|}(\rho) - \Phi_{|\varphi_*\rangle\langle\varphi_*|}(\rho)\|_1$ сходится к нулю. Это значит, что $\varphi \mapsto \Phi_{|\varphi\rangle\langle\varphi|}$ — непрерывное отображение из $\mathcal{L}_2(\mathbf{T})$ во множество всех каналов с топологией равномерной сходимости.

Пусть $\{\varphi_n\}$ — последовательность функций из $\mathcal{L}_2(\mathbf{T})$ с коэффициентами Фурье

$$(\varphi_n)_k = \begin{cases} \sqrt{1 - q_n}, & k = 0, \\ \sqrt{q_n/n}, & 0 < k \leq n, \\ 0 & \text{для других } k, \end{cases}$$

где $\{q_n\}$ — последовательность чисел из $(0, 1)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n \log n = C > 0.$$

Ясно, что последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится в $\mathcal{L}_2(\mathbf{T})$ к функции $\varphi_*(x) \equiv 1$. В силу вышесказанного последовательность каналов $\{\Phi_{|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|}\}$ равномерно сходится к каналу $\Phi_{|\varphi_*\rangle\langle\varphi_*|}$, у которого $\Phi_{|\varphi_*\rangle\langle\varphi_*|}(\rho) = |\varphi_*\rangle\langle\varphi_*|$ для всех ρ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и, следовательно, $\overline{C}(\Phi_{|\varphi_*\rangle\langle\varphi_*|}) = 0$. В силу (14) имеем

$$\overline{C}(\Phi_{|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|}) = h_2(q_n) + q_n \log n \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

и, следовательно, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{C}(\Phi_{|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|}) = C > 0$.

Автор благодарен А. С. Холево за помощь в процессе работы над данной статьей, а также рецензенту, сделавшему ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М: Мир, 1982, 511 с.
2. Вернер Р. Ф., Холево А. С., Широков М. Е. О понятии сцепленности в гильбертовых пространствах. — Успехи матем. наук, 2005, т. 60, № 2, с. 153–154.
3. Холево А. С. Введение в квантовую теорию информации. М.: МЦНМО, 2002, 126 с.

4. Холево А. С. Статистическая структура квантовой теории. М.-Ижевск: ИКИ, 2003, 191 с.
5. Холево А. С. Классическая пропускная способность квантовых каналов с ограничениями. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 2, с. 359–374.
6. Холево А. С., Широков М. Е. Непрерывные ансамбли и классическая пропускная способность квантовых каналов бесконечной размерности. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 1, с. 98–114.
7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989, 623 с.
8. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974, 479 с.
9. Широков М. Е. О свойствах квантовых каналов, связанных с классической пропускной способностью. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 2, с. 301–335.
10. Широков М. Е. Энтропийные характеристики подмножеств состояний. I. — Изв. РАН, 2006, т. 70, № 6, с. 193–222.
11. Широков М. Е. Энтропийные характеристики подмножеств состояний. II. — Изв. РАН, 2006, т. 71, № 1, с. 187–224.
12. Alfsen E. M. Compact Convex Sets and Boundary Integrals. New York–Heidelberg: Springer-Verlag, 1971, 210 p.
13. Dell'Antonio G. F. On the limits of sequences of normal states. — Comm. Pure Appl. Math., 1967, v. 20, p. 413–429.
14. Lindblad G. Expectations and entropy inequalities for finite quantum systems. — Comm. Math. Phys., 1974, v. 39, № 2, p. 111–119.
15. Lindblad G. Completely positive maps and entropy inequalities. — Comm. Math. Phys., 1975, v. 40, № 2, p. 147–151.
16. Horodecki M., Shor P. W., Ruskai M. B. Entanglement breaking channels. — Rev. Math. Phys., 2003, v. 15, № 6, p. 629–641; arxiv: quant-ph/0302031.
17. Shirokov M. E. The Holevo capacity of infinite dimensional channels and the additivity problem. — Comm. Math. Phys., 2006, v. 262, № 1, p. 137–159; arxiv: quant-ph/0408009.
18. Schumacher B., Westmoreland M. Optimal signal ensembles. — Phys. Rev. A, 2001, v. 63, 022308; arxiv: quant-ph/9912122.
19. Parthasarathy K. Probability Measures on Metric Spaces. New York–London: Academic Press, 1967, 276 p.
20. Wehrl A. General properties of entropy. — Rev. Modern Phys., 1978, v. 50, № 2, p. 221–260.

Поступила в редакцию
5.X.2006

Исправленный вариант
15.VI.2008