Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Ширяев, Об условно-экстремальных задачах скорейшего обнаружения непредсказуемых моментов у наблюдаемого броуновского движения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 4, 751–768

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2463>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 12:20:27

© 2008 г.

ШИРЯЕВ А. Н.*

ОБ УСЛОВНО-ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ СКОРЕЙШЕГО ОБНАРУЖЕНИЯ НЕПРЕДСКАЗУЕМЫХ МОМЕНТОВ У НАБЛЮДАЕМОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ¹⁾

Для броуновского движения $B = (B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ рассматриваются непредсказуемые моменты

$$\theta = \inf \left\{ t \leq 1: B_t = \max_{0 \leq s \leq 1} B_s \right\}, \quad g = \sup \{ t \leq 1: B_t = 0 \}.$$

Основные результаты работы относятся к решению следующих условно-экстремальных задач: в классах марковских моментов

$$\mathfrak{M}_\alpha^B(\theta) = \{ \tau \leq 1: \mathbf{P} \{ \tau < \theta \} \leq \alpha \},$$

$$\mathfrak{M}_\alpha^B(g) = \{ \sigma \leq 1: \mathbf{P} \{ \sigma < g \} \leq \alpha \},$$

где $0 < \alpha < 1$, описать структуру оптимальных моментов $\tau_\alpha^*(\theta)$ и $\sigma_\alpha^*(g)$, для которых

$$\mathbf{E} [\tau_\alpha^*(\theta) - \theta]^+ = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_\alpha^B(\theta)} \mathbf{E} (\tau - \theta)^+,$$

$$\mathbf{E} [\sigma_\alpha^*(g) - g]^+ = \inf_{\sigma \in \mathfrak{M}_\alpha^B(g)} \mathbf{E} (\sigma - g)^+.$$

Рассматриваются также вопросы структуры некоторых специальных моментов в классах $\mathfrak{M}_\alpha^B(\theta^\mu)$ и $\mathfrak{M}_\alpha^B(g^\mu)$ для случая броуновского движения со сносом $B^\mu = (B_t^\mu)_{0 \leq t \leq 1}$, где $B_t^\mu = \mu t + B_t$.

Ключевые слова и фразы: условно-экстремальные задачи, непредсказуемый момент, скорейшее обнаружение, броуновское движение.

1. Введение. Постановка задачи

1.1. Пусть $B = (B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ — стандартное броуновское движение, заданное на некотором фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq 1}, \mathbf{P})$. Предполагается, что величины $B_t = B_t(\omega)$

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, Россия; e-mail: albertsh@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 08-01-00740, 08-01-91205-ЯФ) и Университета Манчестера (School of Mathematics).

являются $\mathcal{F}_t$ -измеримыми. Через $\mathcal{M}$ обозначается класс марковских моментов $\tau = \tau(\omega)$ таких, что $0 \leq \tau(\omega) \leq 1$. Через $\mathcal{M}^B$ обозначаем те марковские моменты, которые порождаются броуновской фильтрацией $(\mathcal{F}_t^B)_{t \leq 1}$, где $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, s \leq t)$.

Основные результаты работы связаны с оцениванием «без упреждения» следующих двух непредсказуемых моментов: θ — момент, когда броуновское движение достигает своего максимального значения:

$$\theta = \inf \left\{ t \leq 1: B_t = \max_{0 \leq s \leq 1} B_s \right\};$$

и g — момент последнего нуля броуновского движения:

$$g = \sup \{ t \leq 1: B_t = 0 \}.$$

Как обычно, $\inf \emptyset = 1$, $\sup \emptyset = 0$.

Оцениванию «без упреждения» момента θ посвящены работы [1]–[5].

В [1] была предложена следующая постановка задачи обнаружения момента θ : в качестве оценки «без упреждения» рассматривались моменты остановки τ из класса $\mathcal{M}^B$ и качество таких оценок характеризовалось величиной $\mathbf{E}|B_\theta - B_\tau|^2$. Было показано, что если

$$V^* = \inf_{\tau \in \mathcal{M}^B} \mathbf{E}|B_\theta - B_\tau|^2, \quad (1)$$

то оптимальный момент существует и в качестве такого момента можно взять

$$\tau^* = \inf \{ t \leq 1: S_t - B_t \geq z^* \sqrt{1-t} \}, \quad (2)$$

где $S_t = \max_{u \leq t} B_u$ — текущий максимум и $z^* = 1.12 \dots$ — единственный корень уравнения

$$4\Phi(z) - 2z\varphi(z) - 3 = 0, \quad (3)$$

в котором $\varphi(z) = (2\pi)^{-1/2} e^{-z^2/2}$, $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \varphi(u) du$. В этом случае

$$V^* = 2\Phi(z^*) - 1. \quad (4)$$

(Заметим, что расширение в (1) класса $\mathcal{M}^B$ до $\mathcal{M}$ не приведет к уменьшению величины V^* , поскольку $\inf_{\tau \in \mathcal{M}} \mathbf{E}|B_\theta - B_\tau|^2 = \inf_{\tau \in \mathcal{M}^B} \mathbf{E}|B_\theta - B_\tau|^2$.)

Эти результаты были обобщены в работе [2] на случай критерия

$$V^*(q) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}^B} \mathbf{E}|B_\theta - B_\tau|^q, \quad q > 1, \quad (5)$$

для которого оптимальным является момент

$$\tau^*(q) = \inf \{ t \leq 1: S_t - B_t \geq z^*(q) \sqrt{1-t} \},$$

где $z^*(q)$ — корень некоторого трансцендентного уравнения, выражаемый через функции Куммера.

1.2. В [3] было предложено измерять качество моментов τ не близостью B_τ к B_θ (как в (1), (5)), а непосредственно близостью τ к θ , например, величиной $\mathbf{E}|\tau - \theta|$ или, более общо, величиной

$$\mathbf{E}[G_1((\theta - \tau)^+) + G_2((\tau - \theta)^+)] \quad (6)$$

с некоторыми функциями «риска» $G_1 = G_1(t)$, $G_2 = G_2(t)$, $t \geq 0$.

В случае критерия $\mathbf{E}|\tau - \theta|$ в работе [4] найден аналог тождества Вальда: для всякого $\tau \in \mathfrak{M}^B$

$$\mathbf{E}|\tau - \theta| + \frac{1}{2} = \mathbf{E}|B_\tau - B_\theta|^2. \quad (7)$$

Из этого замечательного соотношения следует, что и для задачи (1), и для задачи

$$U^*(\theta) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}^B} \mathbf{E}|\tau - \theta| \quad (8)$$

оптимальным является один и тот же момент τ^* , определенный формулой (2).

Среди критериев вида (6) одним из естественных является указанный в [3] критерий

$$K^*(c, \theta) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}^B} [\mathbf{P}\{\tau < \theta\} + c \mathbf{E}(\tau - \theta)^+], \quad (9)$$

где $\mathbf{P}\{\tau < \theta\}$ есть вероятность преждевременной «тревоги» о достижении наблюдаемым процессом максимума, $\mathbf{E}(\tau - \theta)^+$ — среднее время запаздывания для момента θ и c — некоторая положительная постоянная.

Критерий (9) широко использовался в работах автора по скорейшему обнаружению момента θ изменения сноса у наблюдаемого броуновского движения (см., например, [6]).

В рассматриваемом сейчас случае θ — это момент, когда наблюдаемое броуновское движение B принимает максимальное значение. Как было отмечено в [3], этот момент можно рассматривать как «внутренний» параметр броуновского движения, определяющий тот момент, когда происходит изменение тенденции поведения этого процесса («подъем к максимуму» с последующим «падением от максимума»).

1.3. Наш основной интерес, относящийся к обнаружению момента θ , будет связан с отысканием момента τ_α из класса

$$\mathfrak{M}_\alpha^B(\theta) = \{\tau \in \mathfrak{M}^B: \mathbf{P}\{\tau < \theta\} \leq \alpha\}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (10)$$

для которого

$$\mathbf{E}(\tau_\alpha - \theta)^+ = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_\alpha^B(\theta)} \mathbf{E}(\tau - \theta)^+. \quad (11)$$

В случае момента g критерии вида $\mathbf{E} |B_g - B_\sigma|^2$ не представляют интереса (в отличие от критерия $\mathbf{E} |B_\theta - B_\tau|^2$), поскольку $B_g = 0$, а величина $\inf_{\sigma \in \mathcal{M}^B} \mathbf{E} |B_g - B_\sigma|^2$ равна нулю и достигается на $\sigma = 0$. Однако критерии $\inf_{\sigma \in \mathcal{M}_\alpha^B(g)} \mathbf{E} |\sigma - g|$ и $\inf_{\sigma \in \mathcal{M}_\alpha^B(g)} \mathbf{E} (\sigma - g)^+$ столь же интересны, как и соответствующие критерии для момента θ , что видно из приводимых далее результатов.

З а м е ч а н и е 1. С точки зрения технического анализа финансовых данных [3], оценивание (предсказание) момента θ представляет определенный интерес, поскольку в этот момент процесс B , интерпретируемый как процесс цен некоторой (идеализированной) акции, принимает максимальное значение и, следовательно, в этот момент акцию целесообразно продать.

Момент g представляет интерес, например, в игре двух «симметричных» игроков, поскольку на интервале $(g, 1]$ один из игроков постоянно будет в выигрыше.

2. Основные результаты в условно-экстремальных задачах для броуновского движения

Теорема 1. Пусть $0 < \alpha < 1$. В классе $\mathcal{M}_\alpha^B(\theta)$ оптимальным является момент

$$\tau_\alpha^*(\theta) = \inf\{t \leq 1: S_t - B_t \geq z_\alpha \sqrt{1-t}\}, \quad (12)$$

где z_α — корень уравнения

$$1 - \frac{\alpha}{2} = \Phi(z). \quad (13)$$

Теорема 2. Пусть $0 < \alpha < 1$. В классе $\mathcal{M}_\alpha^B(g)$ оптимальным является момент

$$\sigma_\alpha^*(g) = \inf\{t \leq 1: |B_t| \geq z_\alpha \sqrt{1-t}\}, \quad (14)$$

где z_α — тот же самый корень уравнения (13).

Доказательство теорем 1 и 2 будем проводить в несколько этапов.

(а) Для броуновского движения оба момента θ и g имеют одно и то же (априорное) арксинус-распределение:

$$\mathbf{P}\{\theta \leq t\} = \mathbf{P}\{g \leq t\} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (15)$$

(Это, в частности, будет видно и из приводимого ниже доказательства формул (12)–(14).)

Рассмотрим для момента θ апостериорную вероятность $\pi_t = \mathbf{P}(\theta \leq t | \mathcal{F}_t^B)$. Как отмечено в [3],

$$\pi_t = 2\Phi\left(\frac{S_t - B_t}{\sqrt{1-t}}\right) - 1, \quad (16)$$

что легко следует из таких рассуждений.

Имеем

$$\begin{aligned} \pi_t &= \mathbf{P}(\theta \leq t | \mathcal{F}_t^B) = \mathbf{P}\left(\max_{u \leq t} B_u \geq \max_{t < u \leq 1} B_u \mid \mathcal{F}_t^B\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\max_{u \leq t} B_u - B_t \geq \max_{t < u \leq 1} (B_u - B_t) \mid \mathcal{F}_t^B\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Так как величины $\max_{u \leq t} B_u - B_t$ являются $\mathcal{F}_t^B$ -измеримыми, а приращения $B_u - B_t$, $t \leq u \leq 1$, не зависят от $\mathcal{F}_t^B$ и $\text{Law}(B_u - B_t, t \leq u \leq 1) = \text{Law}(B_u, 0 \leq u \leq 1-t)$, то из (17) находим

$$\pi_t = \mathbf{P}\left\{\max_{0 \leq s \leq 1-t} B_s \leq b\right\}\Big|_{b=S_t-B_t}. \quad (18)$$

Отсюда, используя известный результат (Л. Башелье, П. Леви; см. [10])

$$\text{Law}\left(\max_{0 \leq s \leq 1-t} B_s\right) = \text{Law}(|B_{1-t}|) \quad (19)$$

и формулу

$$\mathbf{P}\{|B_{1-t}| \leq x\} = 2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1-t}}\right) - 1, \quad (20)$$

получаем искомое равенство (16).

Рассмотрим теперь апостериорную вероятность

$$\pi_t = \mathbf{P}(g \leq t | \mathcal{F}_t^B) \quad (21)$$

для момента g .

Покажем, что в этом случае

$$\pi_t = 2\Phi\left(\frac{|B_t|}{\sqrt{1-t}}\right) - 1. \quad (22)$$

Действительно, из определения $g = \sup\{t \leq 1: B_t = 0\}$ следует, что

$$\begin{aligned} \pi_t &= \mathbf{P}(g \leq t | \mathcal{F}_t^B) = \mathbf{P}\left(\left\{\inf_{t < u \leq 1} B_u > 0\right\} \cup \left\{\sup_{t < u \leq 1} B_u < 0\right\} \mid \mathcal{F}_t^B\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\left\{\inf_{t < u \leq 1} (B_u - B_t) + B_t > 0\right\} \cup \left\{\sup_{t < u \leq 1} (B_u - B_t) + B_t < 0\right\} \mid \mathcal{F}_t^B\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\left\{\inf_{0 \leq s \leq 1-t} B_s > -b\right\} \cup \left\{\sup_{0 \leq s \leq 1-t} B_s < -b\right\}\right)\Big|_{b=B_t}. \end{aligned} \quad (23)$$

Воспользовавшись свойствами (19) и (20), находим

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P} \left(\left\{ \inf_{0 < s \leq 1-t} B_s > -b \right\} \cup \left\{ \sup_{0 < s \leq 1-t} B_s < -b \right\} \right) \\
 &= I(b > 0) \mathbf{P} \left\{ \inf_{0 < s \leq 1-t} B_s > -b \right\} + I(b < 0) \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 < s \leq 1-t} B_s < -b \right\} \\
 &= I(b > 0) \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 < s \leq 1-t} (-B_s) < b \right\} + I(b < 0) \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 < s \leq 1-t} B_s < -b \right\} \\
 &= I(b > 0) \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 < s \leq 1-t} B_s < b \right\} + I(b < 0) \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 < s \leq 1-t} B_s < -b \right\} \\
 &= I(b > 0) \mathbf{P} \{|B_{1-t}| < b\} + I(b < 0) \mathbf{P} \{|B_{1-t}| < -b\} \\
 &= \mathbf{P} \{|B_{1-t}| < |b|\} = 2\Phi \left(\frac{|b|}{\sqrt{1-t}} \right) - 1,
 \end{aligned}$$

что вместе с (23) дает требуемый результат (22).

Сопоставляя (16) и (22) и учитывая свойство

$$\text{Law}(S_t - B_t, t \leq 1) = \text{Law}(|B_t|, t \leq 1), \quad (24)$$

видим, что

$$\mathbf{P} \{\theta \leq t\} = \mathbf{E} \pi_t = 2 \mathbf{E} \Phi \left(\frac{S_t - B_t}{\sqrt{1-t}} \right) - 1 = 2 \mathbf{E} \Phi \left(\frac{|B_t|}{\sqrt{1-t}} \right) - 1 = \mathbf{P} \{g \leq t\}. \quad (25)$$

Простой подсчет, основанный на свойствах нормального распределения, показывает, что

$$\mathbf{E} \Phi \left(\frac{|B_t|}{\sqrt{1-t}} \right) = 1 - \frac{1}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{1-t}{t}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P} \{\theta \leq t\} &= 2 \left[1 - \frac{1}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{1-t}{t}} \right] - 1 = 1 - \frac{2}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{1-t}{t}} \\
 &= 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{t} = 1 - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{t} \right) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t}.
 \end{aligned}$$

Тем самым, обращение к условным вероятностям $\mathbf{P}(\theta \leq t | \mathcal{F}_t^B)$ и $\mathbf{P}(g \leq t | \mathcal{F}_t^B)$ дает простое и наглядное доказательство закона арксинуса для вероятностей $\mathbf{P} \{\theta \leq t\}$ и $\mathbf{P} \{g \leq t\}$.

З а м е ч а н и е 2. Тот факт, что вероятности $\mathbf{P} \{\theta \leq t\}$ и $\mathbf{P} \{g \leq t\}$ совпадают, можно вывести также из того свойства, что

$$\text{Law} \left(\max_{0 \leq s \leq t} B_s, t \leq 1 \right) = \text{Law}(L_t, t \leq 1), \quad (26)$$

где L_t — локальное время броуновского движения на интервале $[0, t]$.

Действительно,

$$\mathbf{P}\{\theta \leq t\} = \mathbf{P}\left\{\max_{0 \leq s \leq t} B_s = \max_{0 \leq s \leq 1} B_s\right\} \stackrel{(26)}{=} \mathbf{P}\{L_t = L_1\} = \mathbf{P}\{g \leq t\},$$

где последнее равенство следует из того, что после момента g процесс B не принимает нулевых значений и, значит, локальное время (в нуле) после момента g остается неизменным, т.е. $L_t = L_g$ на множестве $\{t > g\}$.

З а м е ч а н и е 3. Оба свойства (24) и (26) являются следствиями «двумерной» теоремы Леви (см., например, [10]), утверждающей, что

$$\text{Law}(S - B, S) = \text{Law}(|B|, L). \quad (27)$$

(b) Обратимся к формуле (9). В [3] было отмечено, что

$$\mathbf{P}\{\tau < \theta\} = \mathbf{E}(1 - \pi_\tau) \quad \text{и} \quad \mathbf{E}(\tau - \theta)^+ = \mathbf{E} \int_0^\tau \pi_s ds. \quad (28)$$

Формула (28) следует из того, что $\mathbf{P}\{\tau < \theta\} = \mathbf{E}\mathbf{P}(\tau < \theta | \mathcal{F}_\tau^B) = \mathbf{E}(1 - \pi_\tau)$, где второе равенство выполнено, поскольку условная вероятность $\mathbf{P}(\theta \leq \tau | \mathcal{F}_\tau^B)$ равна π_τ (для доказательства последнего свойства надо принять во внимание, что $\mathbf{P}(\theta \leq t | \mathcal{F}_t^B) = \pi_t$, $t \geq 0$, и затем воспользоваться аргументами аппроксимации моментов τ дискретными моментами — точно так же, как это проделано при доказательстве свойства (ii) в [7, гл. III, теорема 3.4]).

Чтобы доказать свойство (28), достаточно заметить, что в силу включения $\{s \leq \tau\} \in \mathcal{F}_s^B$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\tau - \theta)^+ &= \mathbf{E} \int_0^1 I(\theta \leq s \leq \tau) ds = \mathbf{E} \int_0^1 \mathbf{E}[I(\theta \leq s)I(s \leq \tau) | \mathcal{F}_s^B] ds \\ &= \mathbf{E} \int_0^1 I(s \leq \tau) \mathbf{E}[I(\theta \leq s) | \mathcal{F}_s^B] ds = \mathbf{E} \int_0^\tau \pi_s ds. \end{aligned}$$

Таким образом, для всякого $\tau \in \mathfrak{M}^B$

$$\mathbf{P}\{\tau < \theta\} + c \mathbf{E}(\tau - \theta)^+ = (1 - \pi_\tau) + c \int_0^\tau \pi_s ds. \quad (29)$$

З а м е ч а н и е 4. Аналогичным образом (ср. с [1], [3]) устанавливается, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|\tau - \theta| &= \mathbf{E}(\theta - \tau)^+ + \mathbf{E}(\tau - \theta)^+ = \mathbf{E}\left[\theta + \int_0^\tau (\pi_s - 1) ds\right] + \mathbf{E} \int_0^\tau \pi_s ds \\ &= \mathbf{E}\theta + \mathbf{E} \int_0^\tau (2\pi_s - 1) ds. \end{aligned}$$

Тем самым,

$$\mathbf{E}|\tau - \theta| = \frac{1}{2} + \mathbf{E} \int_0^\tau (2\pi_s - 1) ds, \quad \text{где} \quad \pi_s = 2\Phi\left(\frac{S_s - B_s}{\sqrt{1-s}}\right) - 1. \quad (30)$$

В [4] (см. формулы (2.8) и (2.6)) показано, что $\mathbf{E}|B_\tau - B_\theta|^2 = 1 + \mathbf{E} \int_0^\tau (2\pi_s - 1) ds$, что вместе с (30) дает доказательство упомянутого выше аналога тождества Вальда (см. (7)).

Аналогичным образом показывается, что

$$\mathbf{E}|\sigma - g| = \frac{1}{2} + \mathbf{E} \int_0^\sigma (2\pi_s - 1) ds, \quad \text{где } \pi_s = 2\Phi\left(\frac{|B_s|}{\sqrt{1-s}}\right) - 1. \quad (31)$$

(с) Чтобы решить условно-экстремальную « θ -задачу» (11), воспользуемся методом множителей Лагранжа; рассмотрим критерий

$$\begin{aligned} K^*(c, \theta) &= \inf_{\tau \in \mathcal{M}^B} [\mathbf{P}\{\tau < \theta\} + c \mathbf{E}(\tau - \theta)^+] = \inf_{\tau \in \mathcal{M}^B} \mathbf{E}[(1 - \pi_\tau) + c \int_0^\tau \pi_t dt] \\ &= \inf_{\tau \in \mathcal{M}^B} \mathbf{E}\left[\left(1 - F\left(\frac{S_\tau - B_\tau}{\sqrt{1-\tau}}\right)\right) + c \int_0^\tau F\left(\frac{S_t - B_t}{\sqrt{1-t}}\right) dt\right], \end{aligned} \quad (32-\theta)$$

где $F(x) = 2\Phi(x) - 1$.

В случае « g -задачи» (11) (с заменой θ на g) надо рассматривать критерий

$$K^*(c, g) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}^B} \mathbf{E}\left[\left(1 - F\left(\frac{|B_\tau|}{\sqrt{1-\tau}}\right)\right) + c \int_0^\tau F\left(\frac{|B_t|}{\sqrt{1-t}}\right) dt\right]. \quad (32-g)$$

На самом деле $K^*(c, \theta) = K^*(c, g)$. Действительно, процессы $S - B = (S_t - B_t)_{t \leq 1}$ и $|B| = (|B_t|)_{t \leq 1}$ являются строго марковскими процессами относительно естественных фильтраций $(\mathcal{F}_t^{S-B})_{t \leq 1}$ и $(\mathcal{F}_t^{|B|})_{t \leq 1}$ соответственно. Из общей теории оптимальных правил остановки [5], [6] следует, что при взятии инфимума в (32- θ) и (32- g) достаточно оперировать лишь с моментами первого попадания процессов $S - B$ и $|B|$ в некоторые множества (остановки) в фазовых пространствах этих процессов. Учитывая равенство $\text{Law}(S - B) = \text{Law}(|B|)$ и структуру минимизируемых функционалов в (32- θ) и (32- g), видим, что $K^*(c, \theta) = K^*(c, g)$.

В [1] для критерия $V^* = \inf_{\tau \in \mathcal{M}^B} \mathbf{E}|B_\theta - B_\tau|^2$ было показано, что

$$V^* = \inf_{\tau \in \mathcal{M}^B} \mathbf{E} \int_0^\tau F\left(\frac{|B_u|}{\sqrt{1-u}}\right) du, \quad \text{где } F(x) = 4\Phi(x) - 3. \quad (33)$$

Сопоставление (33) с (32- g) показывает, что для решения задачи (32- g) (а значит, и задачи (32- θ)) естественно применить ту же самую технику — основанную на (детерминированной) замене времени, — что была предложена в [1] для решения задачи (33). Вкратце суть этой техники в применении к задаче (32- g) состоит в следующем.

Введем процесс $Y = (Y_t)_{0 \leq t \leq 1}$ с

$$Y_t = \frac{B_t}{\sqrt{1-t}} \quad (34)$$

и будем наряду со «старым» временем $t \in [0, 1]$ рассматривать «новое» время $s \in [0, \infty)$, связывая t и s формулой $t = \hat{T}(s)$, где

$$\hat{T}(s) = 1 - e^{-2s}. \quad (35)$$

Положим $\hat{Y}_s = Y_{\hat{T}(s)}$, $s \in [0, \infty)$. Из (34) и (35) видим, что

$$\hat{Y}_s = e^s B_{1-e^{-2s}}. \quad (36)$$

Процесс $Y = (Y_t)_{0 \leq t < 1}$ (в «старом» времени t) получается из процесса $\hat{Y} = (\hat{Y}_s)_{0 \leq s < 1}$ (в «новом» времени s) с помощью замены $s = T(t)$, где

$$T(t) = \ln \frac{1}{\sqrt{1-t}}, \quad (37)$$

по формуле

$$Y_t = \hat{Y}_{T(t)}, \quad (38)$$

что видно непосредственно из (36).

Применяя к $(e^s B_{1-e^{-2s}})_{s \geq 0}$ формулу Ито, находим, что

$$d\hat{Y}_s = \hat{Y}_s ds + \sqrt{2} d\hat{\beta}_s, \quad (39)$$

где процесс

$$\hat{\beta}_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\hat{T}(s)} \frac{1}{\sqrt{1-u}} dB_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{1-\hat{T}(u)}} dB_{\hat{T}(u)}$$

(как непрерывный локальный мартингал с квадратической характеристикой $\langle \hat{\beta} \rangle_s = s$) есть стандартное броуновское движение [10].

С учетом введенных обозначений видим, что

$$F\left(\frac{|B_t|}{\sqrt{1-t}}\right) = F(|Y_t|) = F(|Y_{\hat{T}(s)}|) = F(|\hat{Y}_s|)$$

и, аналогично,

$$\begin{aligned} \int_0^t F\left(\frac{|B_u|}{\sqrt{1-u}}\right) du &= \int_0^t F(|Y_u|) du = \int_0^{\hat{T}(s)} F(|Y_u|) du \\ &= \int_0^{\hat{T}(s)} F(|\hat{Y}_{T(u)}|) du = \int_0^s F(|\hat{Y}_v|) d\hat{T}(v), \end{aligned}$$

где $d\hat{T}(v) = d(1 - e^{-2v}) = 2e^{-2v} dv$.

Тем самым, полагая $Z_s = \hat{Y}_s$, находим, что

$$\left(1 - F\left(\frac{|B_t|}{\sqrt{1-t}}\right)\right) + c \int_0^t F\left(\frac{|B_u|}{\sqrt{1-u}}\right) du = (1 - F(|Z_s|)) + 2c \int_0^s F(|Z_v|) e^{-2v} dv,$$

и, значит, из (32-g) находим, что

$$K^*(c, g) = \inf_{\sigma} \mathbf{E} \left[(1 - F(|Z_{\sigma}|)) + 2c \int_0^{\sigma} e^{-2v} F(|Z_v|) dv \right], \quad (40)$$

где инфимум берется по классу моментов остановки σ (относительно фильтрации $(\mathcal{F}_s^Z)_{s \geq 0}$), связанных (в силу того, что $t = 1 - e^{-2s}$) с соответствующим τ соотношением $\tau = 1 - e^{-2\sigma}$.

(d) Следуя общей теории оптимальных правил остановки [6], [5] для марковских процессов, будем рассматривать процесс $Z = (Z_s)_{s \geq 0}$ с дифференциалом $dZ_s = Z_s ds + \sqrt{2} d\beta_s$ и произвольным начальным условием $Z_0 = z \in \mathbf{R}$.

Зафиксировав $c > 0$, положим

$$V_z^* = \inf_{\sigma} \mathbf{E}_z \left[(1 - F(|Z_{\sigma}|)) + 2c \int_0^{\sigma} e^{-2v} F(|Z_v|) dv \right], \quad (41)$$

где $\mathbf{E}_z$ есть усреднение по распределению $\mathbf{P}_z$ процесса $Z = (Z_s)_{s \geq 0}$ с $Z_0 = z$.

В отличие от (1), (5), (9), задача (41) имеет стандартную форму задач об оптимальной остановке для марковских процессов, каким является процесс $Z = (Z_s)_{s \geq 0}$. Поэтому можно воспользоваться методами решения, основанными на решении соответствующей задачи Стефана со свободными границами.

Имея это в виду, представим V_z^* в виде

$$V_z^* = 1 + 2cW^*(z), \quad (42)$$

где

$$W^*(z) = \inf_{\sigma} \mathbf{E}_z \left[-\frac{F(|Z_{\sigma}|)}{2c} + \int_0^{\sigma} e^{-2v} F(|Z_v|) dv \right]. \quad (43)$$

Заметим, что в (43) процесс $(Z_t)_{t \geq 0}$ входит в выражение под знаком математического ожидания только через $(|Z_t|)_{t \geq 0}$. Поэтому из общей теории оптимальных правил остановки заключаем, что оптимальный момент σ^* (если он существует) должен иметь следующий вид:

$$\sigma^* = \inf \{s \geq 0: |Z_s| \geq z^*\}, \quad (44)$$

где $z^* = z^*(c)$ вместе в функцией $W^*(z)$, которая предполагается принадлежащей классу C^2 , определяются из решения задачи Стефана:

$$(L_z - 2)W^*(z) = -F(|z|), \quad |z| < z^*, \quad (45)$$

$$W^*(\pm z^*) = -\frac{F(\pm z^*)}{2c}, \quad (46)$$

$$(W^*)'(\pm z^*) = -\frac{F'(\pm z^*)}{2c}, \quad (47)$$

где $L_z = z\partial/\partial z + \partial^2/\partial z^2$ — инфинитезимальный оператор процесса $(Z_t)_{t \geq 0}$.

З а м е ч а н и е 5. То, что решение задачи (45)–(47) действительно является решением задачи об оптимальной остановке (43), устанавливается с помощью стандартного приема, основанного на «проверочных теоремах» (см. подробнее соответствующее доказательство в [1] для задачи (33).

Отметим также, что условие (46) принято называть условием *непрерывного склеивания*, а (47) — условием *гладкого склеивания*.

Уравнение (45) есть уравнение вида

$$W''(z) + zW'(z) - 2W(z) = -F(|z|), \quad \text{где } F(z) = 2\Phi(z) - 1. \quad (48)$$

Из соображений симметрии функция $W(z)$ должна быть четной функцией. Поэтому к дополнительным условиям (46) и (47) естественно добавить условие $(W^*)'(0) = 0$. При этом допущении достаточно требовать, чтобы условия (46) и (47) выполнялись лишь в точке z^* .

Общее решение уравнения (48) при $z \geq 0$ дается, как нетрудно видеть, формулой (ср. с [1])

$$W(z) = c_1(1 + z^2) + c_2[z\varphi(z) + (1 + z^2)\Phi(z)] + \Phi(z) - \frac{1}{2}, \quad (49)$$

где c_1 и c_2 — константы.

Два условия (46) и (47) в (неизвестной пока) точке z^* дают соотношения

$$W(z^*) = -\frac{2\Phi(z^*) - 1}{2c}, \quad W'(z^*) = -\frac{\varphi(z^*)}{c}. \quad (50)$$

Вместе с условием $W'(0) = 0$ эти два условия однозначно определяют константы c_1 , c_2 и порог z^* .

Из (49) и условия $W'(0) = 0$ находим, что $c_2 = -1/2$. Второе условие в (50) дает

$$c_1 = \frac{1}{2} \Phi(z^*) - \frac{\varphi(z^*)}{2cz^*}. \quad (51)$$

Наконец, из первого условия (50) находим, что $z^* = z^*(c)$ определяется как корень уравнения

$$(1 + c) \left[\Phi(z^*) - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} \varphi(z^*) \left(\frac{1}{z^*} + z^* + z^*c \right), \quad (52)$$

решение которого единственно.

Подставляя c_1 , определенное по формуле (51), и $c_2 = -1/2$ в (49), получаем, что

$$W(z) = \left[\frac{1}{2} \Phi(z^*) - \frac{\varphi(z^*)}{2cz^*} \right] (1 + z^2) - \frac{1}{2} [z\varphi(z) + (1 + z^2)\Phi(z)] + \Phi(z) - \frac{1}{2}. \quad (53)$$

В частности, при $z = 0$

$$W(0) = \frac{1}{2} \Phi(z^*) - \frac{\varphi(z^*)}{2cz^*} - \frac{1}{4}. \quad (54)$$

Итак, можно сформулировать следующий результат: *решение $(W^*(z), z^*)$ задачи Стефана (45)–(47) задается формулами (53), (52), значение $V_0^* = 1 + 2cW^*(0)$ определяется формулой*

$$V_0^* = 1 - \frac{c}{2} + c\Phi(z^*) - \frac{\varphi(z^*)}{z^*} \quad (55)$$

и

$$K^*(c, \theta) = K^*(c, g) = V_0^*. \quad (56)$$

(е) Перейдем непосредственно к доказательству теорем. Как мы видели, для всякого $c > 0$ в задаче (41) оптимальным является момент

$$\sigma^*(c) = \inf\{s \geq 0: |Z_s| \geq z^*(c)\}, \quad (57)$$

где $z^*(c)$ определяется из уравнения (52). Возвращаясь от «нового» времени s к «старому» времени t , находим, что момент

$$\tau^*(c, \theta) = \inf\{t \leq 1: S_t - B_t \geq z^*(c)\sqrt{1-t}\} \quad (58)$$

является оптимальным в задаче (32- θ), а момент

$$\sigma^*(c, g) = \inf\{t \leq 1: |B_t| \geq z^*(c)\sqrt{1-t}\} \quad (59)$$

оптимален в задаче (32- g).

Обратимся теперь к условно-экстремальным задачам в классах $\mathcal{M}_\alpha^B(\theta)$ и $\mathcal{M}_\alpha^B(g)$, где $0 < \alpha < 1$.

Для момента $\tau^*(c, \theta)$ в силу (16) и (58) вероятность ложной тревоги определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\tau^*(c, \theta) < \theta\} &= \mathbf{E}(1 - \pi_{\tau^*(c, \theta)}) \\ &= \mathbf{E}\left[2\left(1 - \Phi\left(\frac{S_{\tau^*(c, \theta)} - B_{\tau^*(c, \theta)}}{\sqrt{1 - \tau^*(c, \theta)}}\right)\right)\right] = 2[1 - \Phi(z^*(c))]. \end{aligned}$$

Поэтому если потребовать выполнения равенства $\mathbf{P}\{\tau^*(c, \theta) < \theta\} = \alpha$, то $z^*(c)$ должно совпадать с корнем z_α уравнения $2[1 - \Phi(z_\alpha)] = \alpha$. Поскольку $z^*(c)$ зависит от c непрерывно (это следует из (52)), то существует такое $c(\alpha)$, что $z^*(c(\alpha)) = z_\alpha$.

Таким образом, если $\tau \in \mathcal{M}_\alpha^B(\theta)$, то из доказанной оптимальности момента $\tau^*(c(\alpha), \theta)$ вытекает, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\tau < \theta\} + c(\alpha) \mathbf{E}(\tau - \theta)^+ \\ \geq \mathbf{P}\{\tau^*(c(\alpha), \theta) < \theta\} + c(\alpha) \mathbf{E}(\tau^*(c(\alpha), \theta) - \theta)^+. \end{aligned} \quad (60)$$

Поскольку для $\tau \in \mathcal{M}_\alpha^B(\theta)$ выполнено неравенство $\mathbf{P}\{\tau < \theta\} \leq \alpha$, а вероятность ложной тревоги для момента $\tau^*(c(\alpha), \theta)$ в точности равна α (т.е. $\mathbf{P}\{\tau^*(c(\alpha), \theta) < \theta\} = \alpha$), то из (60) находим, что

$$c(\alpha) \mathbf{E}(\tau - \theta)^+ \geq c(\alpha) \mathbf{E}(\tau^*(c(\alpha), \theta) - \theta)^+. \quad (61)$$

Для $0 < \alpha < 1$ величина $z_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$ такова, что найденное из соотношения $z^*(c(\alpha)) = z_\alpha$ значение $c(\alpha)$ положительно. Следовательно, из (61) получаем, что $\mathbf{E}(\tau - \theta)^+ \geq \mathbf{E}(\tau^*(c(\alpha), \theta) - \theta)^+$, т.е. момент $\tau_\alpha^*(\theta) = \tau^*(c(\alpha), \theta)$, задаваемый формулой (12), является оптимальным в классе $\mathcal{M}_\alpha^B(\theta)$ (в задаче (11)).

Точно так же показывается, что момент $\sigma_\alpha^*(g) = \sigma^*(c(\alpha), \theta)$, задаваемый формулой (14), является оптимальным в классе $\mathcal{M}_\alpha^B(g)$ (в задаче отыскания $\inf_{\sigma \in \mathcal{M}_\alpha^B(g)} \mathbf{E}(\sigma - g)^+$). Теоремы 1 и 2 доказаны.

Обозначая $b_\alpha(t) = z_\alpha \sqrt{1 - t}$, где z_α — корень уравнения $1 - \alpha/2 = \Phi(z)$, находим, что

$$\tau_\alpha^*(\theta) = \inf\{t \leq 1: S_t - B_t \geq b_\alpha(t)\}, \quad (62)$$

$$\sigma_\alpha^*(g) = \inf\{t \leq 1: |B_t| \geq b_\alpha(t)\}. \quad (63)$$

На рис. 1 (Е. Бурнаев) представлены графики функций $b_\alpha(t)$, $0 \leq t \leq 1$, при некоторых значениях параметра α ($\alpha = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$).

Рис. 1. Границы $b_\alpha(t)$ при $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\alpha = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ (пунктиром) и оптимальный момент $\tau_\alpha^*(\theta) = \inf\{t \leq 1: S_t - B_t \geq b_\alpha(t)\}$ (оптимальный момент $\sigma_\alpha^*(g)$ определяется как $\inf\{t \leq 1: |B_t| \geq b_\alpha(t)\}$)

З а м е ч а н и е 6. Ясно, что в классах $\mathcal{M}_0^B(\theta)$ и $\mathcal{M}_0^B(g)$ (т.е. при $\alpha = 0$) оптимальными являются моменты $\tau \equiv 1$ и $\sigma \equiv 1$. Это формально следует из (62), (63) и того факта, что решением уравнения (13) в этом случае является $z_\alpha = \infty$.

Если же $\alpha = 1$, то опять же ясно, что в классах $\mathcal{M}_1^B(\theta)$ и $\mathcal{M}_1^B(g)$ оптимальными являются моменты $\tau \equiv 0$ и $\sigma \equiv 0$. Это также формально

следует из (62), (63) и того, что $z_\alpha = 0$ при $\alpha = 1$ и, значит, $b_1(t) = z_1\sqrt{1-t} \equiv 0$.

Остановимся несколько подробнее на (безусловных) критериях

$$U^*(\theta) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}^B} \mathbf{E} |\tau - \theta|, \quad (64)$$

$$U^*(g) = \inf_{\sigma \in \mathcal{M}^B} \mathbf{E} |\sigma - g|. \quad (65)$$

Из приведенных рассуждений (см. (30), (31)) следует, что

$$\begin{aligned} U^*(\theta) &= \inf_{\tau \in \mathcal{M}^B} \left[\frac{1}{2} + \mathbf{E} \int_0^\tau (2\pi_s - 1) ds \right] \\ &= \frac{1}{2} + \inf_{\tau \in \mathcal{M}^B} \mathbf{E} \int_0^\tau \left[4\Phi\left(\frac{S_s - B_s}{\sqrt{1-s}}\right) - 3 \right] ds, \end{aligned} \quad (66)$$

$$U^*(g) = \frac{1}{2} + \inf_{\sigma \in \mathcal{M}^B} \mathbf{E} \int_0^\sigma \left[4\Phi\left(\frac{|B_s|}{\sqrt{1-s}}\right) - 3 \right] ds. \quad (67)$$

Те же самые рассуждения, что и в случае критериев (32- θ) и (32- g), показывают, что решение задачи (66) сводится к решению задачи (67), и наоборот.

Тем самым, как и при доказательстве теорем 1 и 2, получаем следующий результат (ср. с [1], [4]).

Теорема 3. *В (безусловных) экстремальных задачах (64) и (65) оптимальными являются моменты*

$$\begin{aligned} \tau^*(\theta) &= \inf\{t \leq 1: S_t - B_t \geq z^*\sqrt{1-t}\}, \\ \sigma^*(g) &= \inf\{t \leq 1: |B_t| \geq z^*\sqrt{1-t}\}, \end{aligned}$$

где z^* есть единственный корень уравнения (3).

3. Об условно-экстремальных задачах для броуновского движения со сносом

3.1. В случае броуновского движения со сносом ($B^\mu = (B_t^\mu)_{t \leq 1}$, где $B_t^\mu = \mu t + B_t$) решение условно-экстремальной задачи (10)–(11) (где момент θ заменяется на θ^μ — момент достижения максимума процессом B^μ : $\theta^\mu = \inf\{t \leq 1: B_t^\mu = \max_{0 \leq s \leq 1} B_s^\mu\}$) и аналогичной задачи для момента $g^\mu = \sup\{t \leq 1: B_t^\mu = 0\}$ наталкивается на значительные трудности, связанные с тем, что не удается получить решения задачи (9) (и аналогичной задачи для g), столь же простого, как в случае $\mu = 0$.

Для безусловного критерия $\inf_{\tau \in \mathcal{M}^B} \mathbf{E} |\tau - \theta^\mu|$ в работе [8] было показано, что существует непрерывная неубывающая функция $b^\mu(t)$, $0 \leq t \leq 1$, с $b^\mu(1) = 0$ такая, что момент

$$\tau^\mu = \inf\{t \leq 1: S_t^\mu - B_t^\mu \geq b^\mu(t)\}, \quad (68)$$

где $S_t^\mu = \max_{s \leq t} B_s^\mu$, является оптимальным в классе $\mathfrak{M}^B$. Относительно этой функции $b^\mu(t)$ известно, что она удовлетворяет некоторому интегральному уравнению Вольтерра второго рода, отыскание решения которого представляется весьма трудной задачей.

Для случая критерия

$$K^*(c, \theta^\mu) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}^B} (\mathbf{P} \{ \tau < \theta^\mu \} + c \mathbf{E} (\tau - \theta^\mu)^+), \quad (69)$$

привлекаемого («метод множителей Лагранжа») для решения условно-экстремальной задачи, оптимальный момент, по-видимому, имеет ту же структуру, что и момент τ^μ в (68).

Имея в виду эти обстоятельства, мы будем интересоваться нахождением *по крайней мере* какого-то момента, скажем, τ_α^μ , для которого можно гарантировать, что он принадлежит классу

$$\mathfrak{M}_\alpha^B(\theta^\mu) = \{ \tau \in \mathfrak{M}^B: \mathbf{P} \{ \tau < \theta^\mu \} \leq \alpha \}.$$

Идея построения такого момента заключается в следующем. Как и в случае $\mu = 0$, рассмотренном в п. (е) предыдущего раздела,

$$K^*(c, \theta^\mu) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}^B} \mathbf{E} \left[(1 - \pi_\tau) + c \int_0^\tau \pi_t dt \right], \quad (70)$$

где

$$\pi_t = \mathbf{P} (\theta \leq t | \mathcal{F}_t^{B^\mu}) = \mathbf{P} \left\{ \max_{0 \leq s \leq 1-t} B_s^\mu \leq b \right\} \Big|_{b=S_t^\mu - B_t^\mu}.$$

Известно (см., например, [9]), что

$$\mathbf{P} \left\{ \max_{0 \leq s \leq 1-t} B_s^\mu \leq b \right\} = \Phi \left(\frac{b - \mu(1-t)}{\sqrt{1-t}} \right) - e^{2\mu b} \Phi \left(\frac{-b - \mu(1-t)}{\sqrt{1-t}} \right). \quad (71)$$

Поэтому

$$\pi_t = \Phi \left(\frac{(S_t^\mu - B_t^\mu) - \mu(1-t)}{\sqrt{1-t}} \right) - e^{2\mu(S_t^\mu - B_t^\mu)} \Phi \left(\frac{-(S_t^\mu - B_t^\mu) - \mu(1-t)}{\sqrt{1-t}} \right). \quad (72)$$

Будем, следуя (68), искать требуемый момент τ_α^μ в виде

$$\tau_\alpha^\mu = \inf \{ t \leq 1: S_t^\mu - B_t^\mu \geq b(t) \}, \quad (73)$$

где функция $b(t) = b_\alpha^\mu(t)$, $0 \leq t \leq 1$, для заданных $0 < \alpha < 1$ и $\mu \in \mathbf{R}$ удовлетворяет следующему соотношению: при всех $0 \leq t < 1$

$$\Phi \left(\frac{b(t) - \mu(1-t)}{\sqrt{1-t}} \right) - e^{2\mu b(t)} \Phi \left(\frac{-b(t) - \mu(1-t)}{\sqrt{1-t}} \right) = 1 - \alpha, \quad (74)$$

что равносильно выполнению при всех $0 \leq t < 1$ равенства

$$\mathbf{P} \left\{ \max_{0 \leq s < 1-t} B_s^\mu \leq b(t) \right\} = 1 - \alpha. \quad (75)$$

Отсюда видно, что при увеличении t величины $b(t)$ должны убывать. При этом $\lim_{t \uparrow 1} b(t) = 0$, поскольку если $\lim_{t \uparrow 1} b(t) = c > 0$, то при t , близких к единице, левая часть соотношения (74) также будет близка к единице, что противоречит выполнению равенства (74) для всех $0 \leq t < 1$.

В случае $t = 0$ величина $b(0)$ определяется как (единственный) корень уравнения $\Phi(x - \mu) - e^{2\mu x} \Phi(-x - \mu) = 1 - \alpha$, $x > 0$.

Теорема 4. Пусть $0 < \alpha < 1$ и $\mu \in \mathbf{R}$. Момент остановки τ_α^μ , определяемый формулой (73) с функцией $b(t) = b_\alpha^\mu(t)$, $0 \leq t < 1$, удовлетворяющей функциональному соотношению (76), принадлежит классу $\mathcal{M}_\alpha^B(\theta^\mu)$, при этом вероятность ложной тревоги $\mathbf{P}\{\tau_\alpha^\mu < \theta^\mu\}$ в точности равна α :

$$\mathbf{P}\{\tau_\alpha^\mu < \theta^\mu\} = \alpha. \quad (76)$$

Доказательство следует из того, что, с одной стороны, $\mathbf{P}\{\tau_\alpha^\mu < \theta^\mu\} = \mathbf{E}(1 - \pi_{\tau_\alpha^\mu}^\mu)$, а с другой стороны, $\pi_{\tau_\alpha^\mu}^\mu = 1 - \alpha$ с вероятностью единица (см. (73) и (75)).

Понятно, что для построенного момента τ_α^μ выполнено неравенство $\inf_{\tau \in \mathcal{M}_\alpha^B(\theta^\mu)} \mathbf{E}(\tau - \theta^\mu)^+ \leq \mathbf{E}(\tau_\alpha^\mu - \theta^\mu)^+$, которое может быть использовано (после подсчета $\mathbf{E}(\tau_\alpha^\mu - \theta^\mu)^+$) для получения оценки сверху риска $\inf_{\tau \in \mathcal{M}_\alpha^B(\theta^\mu)} \mathbf{E}(\tau - \theta^\mu)^+$.

Графики на рис. 2 (Е. Бурнаев) показывают поведение функции $b(t) = b_\alpha^\mu(t)$, $0 \leq t \leq 1$, при разных значениях параметров α и μ .

Рис. 2. Границы $b_\alpha^\mu(t)$ при $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\mu = -2, -1, 0, 1, 2$. (При увеличении μ граница $b_\alpha^\mu(t)$ поднимается вверх; $\tau_\alpha^\mu = \inf\{t \leq 1: S_t^\mu - B_t^\mu \geq b_\alpha^\mu(t)\} \in \mathcal{M}_\alpha^B(\theta^\mu)$.)

3.2. В случае $\mu = 0$ момент $\sigma_\alpha^*(g)$, являющийся оптимальным в классе $\mathcal{M}_\alpha^B(g)$, может быть записан в виде

$$\sigma_\alpha^*(g) = \inf\{t \leq 1: B_t \geq \bar{b}(t) \text{ или } B_t \leq \underline{b}(t)\},$$

где $\bar{b}(t) = -\underline{b}(t) = z_\alpha \sqrt{1-t}$. Таким образом, в случае $\mu = 0$ границы $\bar{b}(t)$ и $\underline{b}(t)$ симметричны. Если же $\mu \neq 0$, то по аналогии с (73) требуемый

момент σ_α^μ из класса $\mathfrak{M}_\alpha^B(g^\mu) = \{\sigma \leq 1: \mathbf{P}\{\sigma < g^\mu\} \leq \alpha\}$, где $g^\mu = \sup\{t \leq 1: B_t^\mu = 0\}$, естественно искать в виде

$$\sigma_\alpha^\mu = \inf\{t \leq 1: B_t^\mu \geq \bar{b}(t) \text{ или } B_t^\mu \leq -\underline{b}(t)\}, \quad (77)$$

где $\bar{b}(t) = \bar{b}_\alpha^\mu(t)$, $\underline{b}(t) = \underline{b}_\alpha^\mu(t)$, $0 \leq t < 1$.

Поскольку на множестве $\{B_t^\mu = b\}$ апостериорная вероятность $\pi_t = \mathbf{P}(g \leq t | \mathcal{F}_t^{B^\mu})$ имеет вид

$$\pi_t = I(b > 0) \mathbf{P}\left\{\sup_{s \leq t} (-B_s^\mu) < b\right\} + I(b < 0) \mathbf{P}\left\{\sup_{s \leq t} B_s^\mu < -b\right\},$$

то на этом множестве в силу (71)

$$\begin{aligned} \pi_t &= I(b > 0) \mathbf{P}\left\{\sup_{s \leq t} (B_s - \mu s) < b\right\} + I(b < 0) \mathbf{P}\left\{\sup_{s \leq t} (B_s + \mu s) < -b\right\} \\ &= I(b > 0) \left\{ \Phi\left(\frac{b + \mu(1-t)}{\sqrt{1-t}}\right) - e^{2\mu b} \Phi\left(\frac{-b - \mu(1-t)}{\sqrt{1-t}}\right) \right\} \\ &\quad + I(b < 0) \left\{ \Phi\left(\frac{-b - \mu(1-t)}{\sqrt{1-t}}\right) - e^{-2\mu b} \Phi\left(\frac{b - \mu(1-t)}{\sqrt{1-t}}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (78)$$

Определим искомые границы $\bar{b}(t)$ и $\underline{b}(t)$ как решения функциональных уравнений

$$\Phi\left(\frac{\bar{b}(t) + \mu(1-t)}{\sqrt{1-t}}\right) - e^{2\mu \bar{b}(t)} \Phi\left(\frac{-\bar{b}(t) - \mu(1-t)}{\sqrt{1-t}}\right) = 1 - \alpha, \quad (79)$$

$$\Phi\left(\frac{-\underline{b}(t) - \mu(1-t)}{\sqrt{1-t}}\right) - e^{-2\mu \underline{b}(t)} \Phi\left(\frac{\underline{b}(t) - \mu(1-t)}{\sqrt{1-t}}\right) = 1 - \alpha. \quad (80)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\sigma_\alpha^\mu < \theta\} &= \mathbf{E}(1 - \pi_{\sigma_\alpha^\mu}) = \mathbf{E}\left[1 - \pi_{\sigma_\alpha^\mu} I(B_{\sigma_\alpha^\mu} > 0) - \pi_{\sigma_\alpha^\mu} I(B_{\sigma_\alpha^\mu} < 0)\right] \\ &= \mathbf{E}\left[1 - (1 - \alpha) I(B_{\sigma_\alpha^\mu} > 0) - (1 - \alpha) I(B_{\sigma_\alpha^\mu} < 0)\right] = \alpha. \end{aligned}$$

Тем самым, имеет место следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $0 < \alpha < 1$ и $\mu \in \mathbf{R}$. Момент остановки σ_α^μ , определяемый формулой (77) с функциями $\bar{b}(t) = \bar{b}_\alpha^\mu(t)$ и $\underline{b}(t) = \underline{b}_\alpha^\mu(t)$, удовлетворяющими функциональным соотношениям (79) и (80), принадлежит классу $\mathfrak{M}_\alpha^B(g^\mu)$, при этом вероятность ложной тревоги $\mathbf{P}\{\sigma_\alpha^\mu < g^\mu\}$ в точности равна α :

$$\mathbf{P}\{\sigma_\alpha^\mu < g^\mu\} = \alpha. \quad (81)$$

Графики, приводимые на рис. 3 (Е. Бурнаев), дают представление о поведении этих функций при разных значениях α и μ .

Рис. 3. Верхняя и нижняя границы $\bar{b}_\alpha^\mu(t)$ и $\underline{b}_\alpha^\mu(t)$ при $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\mu = -0.6, 0, 0.6$. (При увеличении μ верхняя граница $\bar{b}_\alpha^\mu(t)$ поднимается вверх, а нижняя граница $\underline{b}_\alpha^\mu(t)$ опускается вниз. При $\mu = 0$ выполнено равенство $\bar{b}_\alpha^0(t) = -\underline{b}_\alpha^0(t)$. Моменты $\sigma_\alpha^\mu = \inf\{t \leq 1: B_t^\mu \geq \bar{b}_\alpha^\mu(t) \text{ или } B_t^\mu \leq \underline{b}_\alpha^\mu(t)\}$ принадлежит классам $\mathcal{M}_\alpha^B(g^\mu)$.)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Graversen S. E., Peskir G., Shiryaev A. N. Stopping Brownian motion without anticipation as close as possible to its ultimate maximum. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 1, с. 125–136.
2. Pedersen J. L. Optimal prediction of the ultimate maximum of Brownian motion. — Stochastics Stochastics Rep., 2003, v. 75, № 4, p. 205–219.
3. Shiryaev A. N. Quickest detection problems in the technical analysis of the financial data. — Mathematical Finance — Bachelier congress 2000. Ed. by H. Geman et al. Berlin: Springer-Verlag, Springer Finance, 2002, p. 487–521.
4. Урусов М. А. Об одном свойстве момента достижения максимума броуновским движением и некоторых задачах оптимальной остановки. — Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 1, с. 184–190.
5. Peskir G., Shiryaev A. N. Optimal Stopping and Free-Boundary Problems. Basel: Birkhäuser, 2006, 500 p.
6. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1969.
7. Жакод Ж., Ширяев А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1, 2. М.: Наука, 1994, 544 с.; 368 с. (Теория вероятн. и матем. статист., т. 47, 48.)
8. du Toit J., Peskir G. Predicting the time of the ultimate maximum for Brownian motion with drift. — Proceedings of the Workshop on Mathematical Control Theory and Finance (Lisbon, 2007). Berlin: Springer-Verlag, 2008, p. 95–112.
9. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1: Факты, модели. Т. 2: Теория. М.: ФАЗИС, 1998, 1018 с.
10. Revuz D., Yor M. Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin: Springer-Verlag, 1999, 602 p. (Grundlehren Math. Wiss., v. 293.)

Поступила в редакцию
23.VII.2007