Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Aurzada, И. А. Ибрагимов, М. А. Лифшиц,
Н. J. van Zanden, Малые отклонения гладких стационарных гауссовских процессов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 4, 788–798

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2466>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:25:05

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2008 г.

АУРЗАДА Ф.*, ИБРАГИМОВ И. А.[†],
ЛИФШИЦ М. А.[‡], ВАН ЗАНТЕН Х. Я.[§]МАЛЫЕ УКЛОНЕНИЯ ГЛАДКИХ
СТАЦИОНАРНЫХ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ¹⁾

В работе рассматриваются вероятности малых уклонений одного класса очень гладких стационарных гауссовских процессов, играющих важную роль в байесовской теории статистических выводов. Вычисления основаны на модифицированном энтропийном подходе Кэлбса, Ли и Линде и на классических результатах об энтропии классов аналитических функций. Мы пользуемся верхней оценкой вероятностей малых уклонений, предложенной Цирельсоном, и проясняем пределы ее точности.

Ключевые слова и фразы: гауссовские процессы, проблема малых шаров, малые уклонения, спектральная плотность, стационарные процессы.

1. Введение. Пусть $X(t)$ — центрированный стационарный гауссовский процесс, характеризуемый своей спектральной мерой $F(du)$. Рассмотрим ограничение X на интервал $[0, 1]$ и будем оценивать вероятности его малых уклонений относительно равномерной нормы $\|\cdot\|_\infty$ в терминах функции малых уклонений

$$\varphi(X, r) = -\ln \mathbf{P} \{ \|X\|_\infty \leq r \}, \quad r \rightarrow 0.$$

В книге [9] и обзоре [8] можно найти многочисленные результаты о малых уклонениях и примеры их применения, а [10] содержит полную библиографию по данному вопросу.

В этой заметке мы анализируем случай очень гладких процессов. А именно, рассмотрим семейство процессов X_ν , отвечающих абсолютно непрерывным спектральным мерам

$$F_\nu(du) = \exp\{-|u|^\nu\} du, \quad 0 < \nu < \infty,$$

* Technische Universität Berlin, Institut für Mathematik, Sekr. MA 7-5, Straße des 17. Juni 136, 10623 Berlin, Germany; e-mail: aurzada@math.tu-berlin.de

† С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, наб. Фонтанки, 27, 191023 С.-Петербург, Россия; e-mail: ibr32@pdmi.ras.ru

‡ С.-Петербургский государственный университет, математико-механическое отделение, Библиотечная пл., 2, 198504 Старый Петергоф, Россия; e-mail: lifts@mail.rcm.ru

§ Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Vrije Universiteit Amsterdam, De Boelelaan 1081 a, 1081 HV Amsterdam, Netherlands; e-mail: harry@cs.vu.nl

¹⁾ А. Аурзада поддержан DFG Research Center «Matheon — Mathematics for key technologies», Berlin; Х. ван Зантен поддержан the Netherlands Organisation for Scientific Research NWO.

и аналогичное семейство периодических процессов $\tilde{X}_\nu$, отвечающих дискретным спектральным мерам

$$\tilde{F}_\nu(du) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\{-|k|^\nu\} \delta_{2\pi k}, \quad 0 < \nu < \infty.$$

Наиболее интересны случаи $\nu = 1$ (показательный спектр) и $\nu = 2$ (нормальный спектр).

Для полноты изложения дополним первое семейство спектральной мерой

$$F_\infty(du) = \mathbf{1}_{[-1,1]} du.$$

Хотя свойства гладкости процессов X_ν , $\tilde{X}_\nu$ одинаковы, несколько неожиданно оказывается, что их малые отклонения иногда ведут себя по-разному.

Наша работа в значительной степени мотивирована недавней статьей ван дер Варта и ван Зантена [14], где упомянутые малые отклонения рассматривались в контексте байесовской статистики. Было показано, что они фактически определяют апостериорную скорость сходимости в непараметрических задачах оценивания. В частности, процесс X_2 , известный в байесовской литературе, а также в работах по автоматическому обучению (machine learning) как «квадратичный показательный процесс» (squared exponential process), является стандартным базовым элементом при построении априорных распределений параметров, имеющих функциональную природу, см., например, [13].

Прежде чем формулировать результаты, условимся об обозначениях. Будем писать $f(\cdot) \preceq g(\cdot)$ или $g(\cdot) \succeq f(\cdot)$, если $\limsup(f/g) < \infty$. Эквивалентность $f \approx g$ означает, что верно как $f \preceq g$, так и $g \preceq f$. Аналогично, $f(\cdot) \lesssim g(\cdot)$ или $g(\cdot) \gtrsim f(\cdot)$ означают, что $\limsup(f/g) \leq 1$. Наконец, сильная эквивалентность $f \sim g$ означает, что $\lim(f/g) = 1$.

В работе [14] с помощью вычисления энтропии в ядре распределения процесса было показано, что

$$\varphi(X_\nu, r) \preceq |\ln r|^2, \quad \nu \geq 1. \quad (1.1)$$

Мы предлагаем несколько более точные оценки. Наши основные результаты таковы.

Теорема 1.1. При $r \rightarrow 0$ справедливы соотношения

$$\varphi(X_\nu, r) \approx \frac{|\ln r|^2}{\ln |\ln r|}, \quad 1 < \nu \leq \infty, \quad (1.2)$$

и

$$\varphi(X_\nu, r) \approx |\ln r|^{1+1/\nu}, \quad 0 < \nu \leq 1. \quad (1.3)$$

Для периодических процессов асимптотика несколько иная.

Теорема 1.2. При $r \rightarrow 0$ справедливы соотношения

$$\varphi(\tilde{X}_\nu, r) \approx |\ln r|^{1+1/\nu}, \quad \nu > 0. \quad (1.4)$$

З а м е ч а н и е 1.1. Случай дискретного показательного спектра ($\nu = 1$) хорошо изучен для отклонений L_2 -норм, где в контексте изучения малых отклонений рядов взвешенных независимых одинаково распределенных случайных величин с коэффициентами, образующими геометрическую прогрессию, были получены оценки

$$\varphi(\tilde{X}_\nu, r) \sim C |\ln r|^2, \quad \nu = 1,$$

и даже более точные результаты, см. [2], [3] или [4]. Как обычно (но не всегда!), логарифмическое поведение малых отклонений одинаково для равномерной нормы и гильбертовой L_2 -нормы.

З а м е ч а н и е 1.2. Существенная разница между оценками (1.2) и (1.4) заключается в том, что в первом случае имеется зависимость от параметра ν , а во

втором ее нет. С этой точки зрения теорема 1.1 дает более неожиданный результат, чем теорема 1.2.

Как узнали авторы от А. И. Назарова, аналогичный феномен давно известен в теории интегральных операторов (см. [15]). Вообще говоря, чем глаже ядро симметричного интегрального оператора, тем быстрее убывают его собственные числа. Однако имеется своего рода барьер: собственные числа λ_k не могут убывать быстрее, чем $\ln \lambda_k \approx -k \ln k$. Так как поведение собственных чисел тесно связано с асимптотикой малых уклонений в L_2 -норме (речь идет о ковариационном операторе гауссовского процесса), граница для поведения собственных чисел превращается в границу для асимптотики малых уклонений.

З а м е ч а н и е 1.3. Отметим, что у нас нет каких-либо общих методов, связывающих малые уклонения процессов с непрерывным и дискретным спектром. По-видимому, дискретный спектр при том же порядке убывания на бесконечности дает большие вероятности малых уклонений.

Для приложений в байесовском непараметрическом оценивании полезно знать поведение малых уклонений «ускоренных» процессов. Для каждого $c \leq 1$ определим «ускоренный» процесс X_ν^c , полагая $X_\nu^c(t) = X_\nu(t/c)$.

Теорема 1.3. Для любого $c \leq 1$ при $r \rightarrow 0$ верно

$$\varphi(X_\nu^c, r) \asymp \frac{1}{c} \frac{|\ln r|^2}{\ln |\ln r|}, \quad \nu > 1, \quad (1.5)$$

$$\varphi(X_\nu^c, r) \asymp \frac{1}{c} |\ln r|^{1+1/\nu}, \quad 0 < \nu \leq 1. \quad (1.6)$$

2. Энтропия ядра и малые уклонения. В этом разделе речь пойдет об эффективном подходе к изучению гауссовских малых уклонений, основанном на оценках метрической энтропии ядра распределения процесса. Этот подход был предложен Кэлбсом и Ли в [6]. В литературе он практически всегда применяется к случаю степенного поведения энтропии и функции малых уклонений, в то время как нам потребуются работать с медленно меняющимися функциями. Поэтому для полноты изложения мы даем полные доказательства необходимых результатов.

Рассмотрим достаточно общую ситуацию. Пусть X — центрированный гауссовский вектор в сепарабельном банаховом пространстве $(E, \|\cdot\|)$. Тогда X порождает ядро $\mathcal{H}$, являющееся линейным подпространством E и обладающее внутренней структурой гильбертова пространства. Детальное описание ядра можно найти в [9]. Обозначим $\mathcal{H}_1$ единичный шар $\mathcal{H}$. Определим $N(r)$ как минимальное количество шаров радиуса r в норме $\|\cdot\|$, которое требуется, чтобы покрыть $\mathcal{H}_1$. Величина $H(r) := \ln N(r)$ называется метрической энтропией $\mathcal{H}_1$.

Мы по-прежнему изучаем функцию малых уклонений

$$\varphi(r) := \varphi(X, r) := -\ln \mathbf{P} \{\|X\| \leq r\}, \quad r \rightarrow 0.$$

Напомним основные неравенства из работы [6].

Лемма 2.1. Пусть $r > 0$ и $\lambda > 0$. Тогда

$$H\left(\frac{2r}{\lambda}\right) \leq \varphi(r) + \frac{\lambda^2}{2}, \quad H\left(\frac{r}{\lambda}\right) \geq \varphi(2r) + \ln \Phi(\lambda + \alpha_r),$$

где Φ — функция распределения стандартного нормального закона, а α_r определяется соотношением $-\ln \Phi(\alpha_r) = \varphi(r)$.

В случае медленно меняющейся энтропии мы выводим из первого неравенства следующую оценку.

Следствие 2.1. Пусть β — произвольное вещественное число, а $\gamma, C > 0$. Тогда

$$1) \varphi(r) \lesssim C |\ln r|^\gamma (\ln |\ln r|)^\beta \text{ влечет } H(r) \lesssim C |\ln r|^\gamma (\ln |\ln r|)^\beta;$$

2) $H(r) \gtrsim C |\ln r|^\gamma (\ln |\ln r|)^\beta$ влечет $\varphi(r) \gtrsim C |\ln r|^\gamma (\ln |\ln r|)^\beta$.

Соотношения будут по-прежнему справедливы, если $\lesssim$ и $\gtrsim$ заменить на $\leq$ и $\geq$.

Доказательство. Достаточно просто подставить $\lambda = 2$ в первое неравенство леммы 2.1.

При использовании второго неравенства рассуждения будут чуть более тонкими. Во-первых, напомним, что при $x \rightarrow -\infty$ верно $\ln \Phi(x) \sim -x^2/2$. Это позволяет упростить второе неравенство леммы 2.1.

Лемма 2.2. Пусть $\lambda = \lambda(r) > 0$ — такая функция, что $\lambda(r) \leq \sqrt{2\varphi(r)}$. Тогда при $r \rightarrow 0$ верно

$$H\left(\frac{r}{\lambda}\right) \gtrsim \varphi(2r) - \frac{1}{2} \left(\lambda - \sqrt{2\varphi(r)}\right)^2. \quad (2.1)$$

Для случая правильно меняющейся энтропии обычно выбирают $\lambda = -\alpha_r \sim \sqrt{2\varphi(r)}$, что оказывается разумно сделать и для медленно меняющейся энтропии. При этом получается следующий результат.

Следствие 2.2. Пусть β — любое вещественное число, а $\gamma, C > 0$. Тогда

1) $H(r) \lesssim C |\ln r|^\gamma (\ln |\ln r|)^\beta$ влечет $\varphi(r) \lesssim C |\ln r|^\gamma (\ln |\ln r|)^\beta$;

2) если существует такая константа $K > 0$, что $\varphi(r/2) \leq K\varphi(r)$ для всех $r \in (0, 1)$, то $\varphi(r) \gtrsim C |\ln r|^\gamma (\ln |\ln r|)^\beta$ влечет $H(r) \gtrsim C (1 + \ln K / (2 \ln 2))^{-\gamma} |\ln r|^\gamma \times (\ln |\ln r|)^\beta$.

Соотношения будут по-прежнему справедливы, если $\lesssim$ и $\gtrsim$ заменить на $\leq$ и $\geq$.

Доказательство. Пусть $\lambda := \sqrt{2\varphi(r)}$. Из предположения об H , соотношения (2.1) и того факта, что $r/\lambda \rightarrow 0$, следует

$$C |\ln r - \ln \sqrt{\varphi(r)}|^\gamma \left(\ln \left| \ln \frac{r}{\sqrt{\varphi(r)}} \right| \right)^\beta \gtrsim \varphi(2r). \quad (2.2)$$

Далее, из предположения об H следует $H(r) \leq r^{-\tau'}$ для любого $\tau' > 0$. Согласно предложению 2.4 работы [7] откуда следует, что

$$\varphi(r) \leq r^{-\tau}, \quad \text{для любого } \tau > 0. \quad (2.3)$$

Таким образом,

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{\varphi(r)}}{\varphi(2r)^{1/\gamma}} \leq \frac{\tau}{2} \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{|\ln r|}{\varphi(2r)^{1/\gamma}}.$$

Из (2.3) следует также, что $(\ln |\ln(r/\sqrt{\varphi(r)})|)^\beta$ в формуле (2.2) можно заменить на $(\ln |\ln r|)^\beta$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} &\leq \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{|\ln r - \ln \sqrt{\varphi(r)}|^\gamma}{\varphi(2r)} (\ln |\ln r|)^\beta \\ &= \liminf_{r \rightarrow 0} \left| \frac{|\ln r|}{\varphi(2r)^{1/\gamma}} + \frac{\ln \sqrt{\varphi(r)}}{\varphi(2r)^{1/\gamma}} \right|^\gamma (\ln |\ln r|)^\beta \\ &\leq \left(1 + \frac{\tau}{2} \right)^\gamma \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{|\ln r|^\gamma}{\varphi(2r)} (\ln |\ln r|)^\beta. \end{aligned}$$

Устремляя τ к 0, приходим к первому утверждению леммы.

Перейдем ко второму утверждению. Не ограничивая общности, можно предполагать, что $K \geq 1$. Во-первых, отметим, что из регулярности φ для всех $0 < r < 1$ следует, что $\varphi(r) \leq K' r^{-h}$, где $h = \ln K / \ln 2$ и $K' := \varphi(1)K$. Теперь из $\varphi(r) \gtrsim C |\ln r|^\gamma (\ln |\ln r|)^\beta$ в силу (2.1) получаем, что

$$H\left(\frac{r}{\lambda}\right) \gtrsim C |\ln r|^\gamma (\ln |\ln r|)^\beta.$$

Положим $r' := r/\lambda$. В силу предположения о φ получим, что $r' \geq r^{1+h/2}/\sqrt{2K'}$. Поэтому

$$H\left(\frac{r^{1+h/2}}{\sqrt{2K'}}\right) \geq H(r') = H\left(\frac{r}{\lambda}\right) \gtrsim C |\ln r|^\gamma (\ln |\ln r|)^\beta.$$

Другими словами,

$$H(r) \gtrsim C |\ln r|^{1/(1+h/2)\gamma} (\ln |\ln r|)^\beta = \frac{C}{(1 + \ln K/(2 \ln 2))^\gamma} |\ln r|^\gamma (\ln |\ln r|)^\beta.$$

Следствие 2.2 доказано.

З а м е ч а н и е 2.1. Отметим, что, как и в случае правильно меняющейся энтропии, для того чтобы вывести нижнюю оценку для H из нижней оценки для φ , необходимо иметь хотя бы минимальную информацию о регулярности φ . Если уже известно, что φ ведет себя как логарифмическая функция, то условие выполнено для любого $K > 1$ и можно получить сильную асимптотическую эквивалентность.

Частным случаем следствий 2.1 и 2.2 является следующее утверждение.

Следствие 2.3. Пусть β — любое вещественное число и $\gamma > 0$. Тогда

$$\varphi(r) \approx |\ln r|^\gamma (\ln |\ln r|)^\beta \iff H(r) \approx |\ln r|^\gamma (\ln |\ln r|)^\beta.$$

3. Энтропия ядер стационарных процессов. Пусть теперь X — комплексный центрированный стационарный гауссовский процесс со спектральной мерой F и непрерывными траекториями. Мы рассматриваем X как случайный элемент пространства $E = C[0, 1]$. Хорошо известно (см., например, [9]), что ядро $\mathcal{H}$ допускает следующее представление: $h \in \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(u) e^{-itu} F(du), \quad \ell \in L_2(\mathbf{R}, F), \quad (3.1)$$

при $0 \leq t \leq 1$. Норма в ядре вычисляется по формуле

$$\|h\|_{\mathcal{H}} = \inf \|\ell\|_{2,F},$$

причем нижняя грань берется по всем ℓ , удовлетворяющим (3.1). В частности, $h \in \mathcal{H}_1$ (здесь, как и ранее, $\mathcal{H}_1$ — единичный шар $\mathcal{H}$) тогда и только тогда, когда (3.1) выполняется с таким ℓ , что $\|\ell\|_{2,F} \leq 1$.

В рамках этой общей схемы мы перейдем к интересующим нас процессам и оценим энтропию.

3.1. Непрерывный спектр. Пусть теперь $F(du) = f_\nu(u) du$, где $f_\nu(u) = e^{-|u|^\nu}$, $\nu > 0$. Докажем следующее утверждение.

Предложение 3.1. Для любого $\nu > 1$ справедливо

$$H(\mathcal{H}_1, \varepsilon) \approx \frac{|\ln \varepsilon|^2}{\ln |\ln \varepsilon|}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Верхняя оценка.* Пусть $h \in \mathcal{H}_1$. Тогда имеет место представление (3.1) с некоторым ℓ , для которого

$$\|\ell\|_{L_2(\mathbf{R}, F)}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\ell(u)|^2 f_\nu(u) du \leq 1.$$

Очевидно, что функция h будет целой аналитической, если ее доопределить на всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$ тем же самым выражением (3.1). По неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} |h(z)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{|\operatorname{Im} z| |u|} |\ell(u)| f_\nu(u) du \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{2|\operatorname{Im} z| |u|} f_\nu(u) du \right)^{1/2} := M_\nu(2|\operatorname{Im} z|). \end{aligned}$$

Поскольку при $r \rightarrow \infty$

$$\ln M_\nu(r) = \frac{1}{2} \ln \int_{-\infty}^{\infty} e^{r|u|-|u|^\nu} du \sim \frac{(\nu-1)r^{\nu/(\nu-1)}}{2\nu^{\nu/(\nu-1)}},$$

мы получаем

$$|h(z)| \leq M_\nu(2|\operatorname{Im} z|) \leq C_1 \exp\{C_2|\operatorname{Im} z|^{\nu/(\nu-1)}\} \quad \forall h \in H_1, z \in \mathbb{C}, \quad (3.2)$$

для подходящих постоянных $C_1 = C_1(\nu)$, $C_2 = C_2(\nu)$. Из теоремы XX работы [5] известно, что энтропия класса целых аналитических функций $\mathcal{A}(C_1, C_2, \nu)$, определяемого даже более слабым условием

$$|h(z)| \leq C_1 \exp\{C_2|z|^{\nu/(\nu-1)}\} \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad (3.3)$$

удовлетворяет соотношению $H(\mathcal{A}(C_1, C_2, \nu), \varepsilon) \approx |\ln \varepsilon|^2 / \ln |\ln \varepsilon|$. Поскольку $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{A}(C_1, C_2, \nu)$, мы получаем

$$H(\mathcal{H}_1, \varepsilon) \leq \frac{|\ln \varepsilon|^2}{\ln |\ln \varepsilon|}.$$

Нижняя оценка. Здесь мы будем пользоваться только неравенством

$$f(u) \geq c_f, \quad |u| \leq 1, \quad (3.4)$$

при некотором $c_f > 0$, которое, конечно, верно для всех плотностей f_ν , $\nu > 0$.

Начнем с построения одной вспомогательной функции и изучения ее свойств. Возьмем любое $\gamma \in (0, 1)$ и определим последовательность $(a_k)_{k \geq 1}$ соотношением $a_k = ck^{-1-\gamma}$, причем нормировку выберем так, чтобы $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$. Положим

$$G(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(a_k z)}{a_k z}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Так как $|\sin(z)|/|z| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |z|^{j-1}/j! \leq e^{|z|}$, мы получаем

$$|G(z)| \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k |z|\right) = e^{|z|}. \quad (3.5)$$

Функция G быстро убывает на вещественной оси. Действительно, для любого большого $t \in \mathbb{R}$ выберем такое натуральное $\kappa = \kappa(t)$, что $a_\kappa |t| \sim 2$, т.е. $\kappa \sim (c|t|/2)^{1/(1+\gamma)}$. Тогда

$$|G(t)| \leq \prod_{k=1}^{\kappa} |a_k t|^{-1} \leq 2^{-\kappa} \leq \exp\left(-C_G |t|^{1/(1+\gamma)}\right) \quad (3.6)$$

для соответствующим образом выбранного $C_G > 0$. Наконец, отметим, что

$$\theta_G := \inf_{0 \leq t \leq 1} |G(t)| > 0, \quad (3.7)$$

так как наименьший нуль G расположен в точке $\pi/c > \pi > 1$.

Приступим теперь к оцениванию энтропии. Рассмотрим класс Ψ_K аналитических функций ψ на комплексной плоскости, удовлетворяющих условию

$$|\psi(z)| \leq K \exp\{|z|^{1/2}\}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.8)$$

И в этом случае теорема XX из [5] утверждает, что

$$H(\Psi_K, \varepsilon) \approx \frac{|\ln \varepsilon|^2}{\ln |\ln \varepsilon|}. \quad (3.9)$$

Далее, рассмотрим класс функций

$$B_K = \{b: b(z) = \psi(z)G(z), \psi \in \Psi_K, z \in \mathbb{C}\}.$$

В дальнейшем мы обозначаем одинаково функции из B_K и их сужения на $[0, 1]$; едва ли это может вызвать путаницу. Очевидно,

$$H(B_K, \varepsilon) \geq H(\Psi_K, \theta_G^{-1} \varepsilon) \geq \frac{|\ln \varepsilon|^2}{\ln |\ln \varepsilon|}. \quad (3.10)$$

Мы покажем теперь, что при правильном выборе параметра K справедливо соотношение $B_K \subset \mathcal{H}_1$. Пусть $b \in B_K$. Тогда в силу (3.8) и (3.5) мы имеем

$$|b(z)| \leq K \exp\{|z| + |z|^{1/2}\}.$$

Далее, согласно (3.8) и (3.6), верно

$$\|b\|_{L_2(\mathbf{R})}^2 \leq K^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{2|t|^{1/2} - 2C_G|t|^{1/(1+\gamma)}\} dt := K^2 C_{G,2}^2 < \infty.$$

Используя эти два свойства, получаем из классической теоремы Винера–Пэли (см. [12] или [1, гл. IV]), что преобразование Фурье

$$\widehat{b}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} b(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} \psi(t) G(t) dt$$

обращается в нуль вне $[-1, 1]$.

С другой стороны, можем записать

$$b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-iut} \widehat{b}(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-iut} \frac{\widehat{b}(u)}{f(u)} f(u) du =: \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut} \ell(u) f(u) du.$$

Остается проверить, что $\|\ell\|_{2,F} \leq 1$. Действительно, используя (3.4), мы получаем

$$\|\ell\|_{2,F}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{|\widehat{b}(u)|^2}{f(u)} du \leq \frac{1}{2\pi c_f} \|\widehat{b}\|_{L_2(\mathbf{R})}^2 = \frac{1}{2\pi c_f} \|b\|_{L_2(\mathbf{R})}^2 \leq \frac{K^2 C_{G,2}^2}{2\pi c_f} \leq 1,$$

если только K выбрано достаточно малым (в зависимости от c_f). Таким образом, $B_K \subset \mathcal{H}_1$ и из (3.10) следует

$$H(\mathcal{H}_1, \varepsilon) \geq H(B_K, \varepsilon) \geq \frac{|\ln \varepsilon|^2}{\ln |\ln \varepsilon|},$$

что и требовалось доказать. Предложение 3.1 доказано.

Для малых ν нам потребуется только следующая верхняя оценка.

Предложение 3.2. Для любого $\nu \leq 1$ справедливо

$$H(\mathcal{H}_1, \varepsilon) \leq |\ln \varepsilon|^{1+1/\nu}.$$

Доказательство. Идея проста: для $\nu = 1$ требуемый результат уже содержится в (1.1), а общий случай мы сведем к этому усечением спектральной меры. А именно, для каждого $\varepsilon > 0$ положим $v = (3|\ln \varepsilon|)^{1/\nu}$. Тогда, согласно (3.1), элементы $\mathcal{H}_1$ имеют вид

$$h(t) = \left(\int_{|u| \leq v} + \int_{|u| > v} \right) \ell(u) e^{-itu} F(du) := h_v(t) + h^v(t), \quad \|\ell\|_{2,F} \leq 1.$$

В силу выбора v имеем

$$|h^v(t)| \leq \|\ell\|_{2,F} \left(\int_{|u| > v} \exp(-|u|^\nu) du \right)^{1/2} \leq C \exp\left(-\frac{|v|^\nu}{2}\right) v^{(1-\nu)/2} \leq \varepsilon$$

для малых ε . Поэтому остается только оценить энтропию множества $\mathcal{H}_1^v := \{h_v; h \in \mathcal{H}_1\}$. Для этого потребуется следующая количественная версия асимптотического результата из [5], которую можно найти в [14, лемма 2.3].

Лемма 3.1. Пусть F — спектральная мера, и пусть положительное $\delta < 1$ удовлетворяет условию $I := \int e^{\delta|u|} F(du) \leq 1$. Тогда

$$H(\mathcal{H}_1, \varepsilon) \leq C \frac{|\ln \varepsilon|^2}{\delta},$$

где C — универсальная числовая константа.

Прежде всего, отметим, что если даже отбросить условие $I \leq 1$, то, нормируя процесс, мы приходим к оценке

$$H(\mathcal{H}_1, \varepsilon) \leq C \frac{|\ln(\varepsilon/\sqrt{I})|^2}{\delta}. \quad (3.11)$$

Применим эту оценку к усеченной спектральной мере $e^{-|u|^\nu} \mathbf{1}_{|u| \leq v} du$ и значению $\delta = \theta |\ln \varepsilon|^{1-1/\nu}$, причем параметр θ выберем достаточно малым: $\theta \leq 3^{-1/\nu}$. Отметим, что $\delta|u| \leq |u|^\nu$ при $|u| \leq v$. Поэтому

$$I = \int_{|u| \leq v} e^{\delta|u| - |u|^\nu} du \leq 2v \approx |\ln \varepsilon|^{1/\nu}.$$

Из (3.11) получаем $H(\mathcal{H}_1^\nu, \varepsilon) \leq |\ln \varepsilon|^2 / |\ln \varepsilon|^{1-1/\nu} = |\ln \varepsilon|^{1+1/\nu}$, что и требовалось доказать.

3.2. Дискретный спектр. Пусть теперь

$$F(du) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\{-|k|^\nu\} \delta_{2\pi k}, \quad \nu > 0.$$

Докажем следующее утверждение.

Предложение 3.3. Для любого $\nu > 0$ справедливо

$$H(\mathcal{H}_1, \varepsilon) \leq |\ln \varepsilon|^{1+1/\nu}.$$

Доказательство. Рассуждения аналогичны предыдущему случаю. Пусть $h \in \mathcal{H}_1$. Тогда представление (3.1) означает, что

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \ell_k e^{-ikt - |k|^\nu} \quad (3.12)$$

для некоторой последовательности $\ell = (\ell_k)$, для которой $\|\ell\|_{L_2(\mathbf{R}, F)}^2 = \sum_k |\ell_k|^2 \exp\{-k^\nu\} \leq 1$. Очевидно, что h является периодической целой аналитической функцией, определенной на $\mathbf{C}$ тем же выражением (3.12). Из неравенства Гёльдера получаем, что

$$|h(z)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{|\operatorname{Im} z| |k| - |k|^\nu} |\ell_k| \leq \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2|\operatorname{Im} z| |k| - |k|^\nu} \right)^{1/2} := \widetilde{M}_\nu(2|\operatorname{Im} z|).$$

Отсюда опять-таки следует

$$|h(z)| \leq C_1 \exp\{C_2 |\operatorname{Im} z|^{\nu/(\nu-1)}\} \quad \forall h \in H_1, z \in \mathbf{C}$$

для соответствующих констант $C_1 = C_1(\nu)$ и $C_2 = C_2(\nu)$. Из теоремы XXI работы [5] известно, что энтропия класса всех периодических целых аналитических функций $\mathcal{A}(C_1, C_2, \nu)$, удовлетворяющих такому условию, имеет порядок $H(\mathcal{A}(C_1, C_2, \nu), \varepsilon) \approx |\ln \varepsilon|^{1+1/\nu}$. Следовательно, $H(\mathcal{H}_1, \varepsilon) \leq |\ln \varepsilon|^{1+1/\nu}$. Предложение 3.3 доказано.

4. Доказательства основных результатов.

Доказательство теоремы 1.2. Нижняя оценка для вероятностей малых отклонений сразу следует из предложения 3.3 и следствия 2.2.

Для получения верхней оценки воспользуемся простой, но эффективной идеей Цирельсона, первоначально примененной для непрерывного спектра в [11]. Пусть l —

натуральное число. Рассмотрим вспомогательный центрированный стационарный гауссовский процесс $Y = Y_l(t)$ со спектральной мерой

$$F_Y(du) = \exp\{-l^\nu\} \sum_{|k| \leq l} \delta_{2\pi k},$$

которая мажорируется мерой $\tilde{F}_\nu$. При помощи стандартного рассуждения, основанного на неравенстве Андерсона, получаем $\mathbf{P}\{\|\tilde{X}_\nu\|_\infty \leq r\} \leq \mathbf{P}\{\|Y\|_\infty \leq r\}$ для всех $r > 0$. Ковариация Y при $t \neq 2\pi k$ имеет вид

$$\mathbf{E} Y(t)Y(0) = \exp\{-l^\nu\} \sum_{|k| \leq l} e^{itk} = \frac{4 \exp\{-l^\nu\}}{|e^{it} - 1|^2} \sin \frac{(2l+1)t}{2} \sin \frac{t}{2}, \quad (4.1)$$

а для дисперсии имеем выражение

$$\sigma^2 := \mathbf{E} |Y(t)|^2 = \exp\{-l^\nu\} (2l+1). \quad (4.2)$$

Определим шаг решетки $\Delta = 2\pi/(2l+1)$. Из (4.1) следует, что последовательность величин $(Y(k\Delta))_{k \in \mathbb{Z}}$ является гауссовской и некоррелированной, следовательно, она состоит из независимых величин, имеющих дисперсию (4.2). Для любого $r > 0$ получаем оценку

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\|Y\|_\infty \leq r\} &\leq \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq k \leq 1/\Delta} |Y(k\Delta)| \leq r\right\} \\ &\leq [\mathbf{P}\{\sigma|N| \leq r\}]^{1/\Delta} \leq \left(\sqrt{2/\pi} \frac{r}{\sigma}\right)^{1/\Delta} \leq \left(\frac{r}{\sigma}\right)^{(2l+1)/(2\pi)} \\ &= \left(\frac{r}{(2l+1) \exp\{-l^\nu\}}\right)^{(2l+1)/(2\pi)} \leq (r \exp\{l^\nu\})^{(2l+1)/(2\pi)}. \end{aligned}$$

Оптимизируя полученное выражение, положим

$$l \sim \left(\frac{|\ln r|}{\nu+1}\right)^{1/\nu},$$

откуда

$$\begin{aligned} \varphi(\tilde{X}_\nu, r) &\geq \varphi(Y, r) \geq -\frac{2l+1}{2\pi} \ln(r \exp\{l^\nu\}) \sim \frac{l}{\pi} (|\ln r| - l^\nu) \\ &\sim \frac{\nu l}{\pi(\nu+1)} |\ln r| = \frac{\nu}{\pi(\nu+1)} \frac{|\ln r|^{1+1/\nu}}{(\nu+1)^{1/\nu}} \\ &= \frac{\nu}{\pi(\nu+1)^{1+1/\nu}} |\ln r|^{1+1/\nu}, \end{aligned}$$

и мы приходим к нужной оценке. Теорема 1.2 доказана.

Доказательство теоремы 1.1. Для $\nu > 1$ нужный результат сразу следует из предложения 3.1 и следствия 2.3.

Для $\nu \leq 1$ необходимая верхняя оценка вытекает из предложения 3.2 и следствия 2.2.

Необходимая нижняя оценка

$$\varphi(X_\nu, r) \geq |\ln r|^{1+1/\nu} \quad (4.3)$$

верна для любого $\nu > 0$ и может быть получена описанным выше методом Цирельсона. В данном случае для любого положительного l следует рассмотреть вспомогательный центрированный стационарный гауссовский процесс $Y = Y_l(t)$ со спектральной плотностью

$$f_Y(u) = \exp\{-l^\nu\} \mathbf{1}_{|u| \leq l},$$

которая мажорируется плотностью f_ν . Определим шаг решетки $\Delta = 2\pi/l$. Снова легко видеть, что последовательность $(Y(k\Delta))_{k \in \mathbb{Z}}$ является гауссовской и некоррелированной, следовательно, она состоит из независимых величин, имеющих дисперсию

$$\sigma^2 := \mathbf{E} |Y(t)|^2 = 2l \exp\{-l^\nu\},$$

и заключительное вычисление, приводящее к (4.3), проходит точно так же, как и раньше. Теорема 1.1 доказана.

З а м е ч а н и е 4.1. Из теоремы 1.1 видно, что оценка (4.3) не является правильной по порядку при $\nu > 1$. Этот факт примечателен тем, что в изученных ранее случаях (например, для спектров со степенным убыванием плотности, см. [11]) оценка Цирельсона всегда давала правильный порядок.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.3. Мы докажем только (1.6), поскольку вывод формулы (1.5) идентичен. Из определения «ускоренного» процесса следует, что

$$\mathbf{P} \{ \|X_\nu^c\|_\infty \leq r \} = \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0, 1/c]} |X_\nu(t)| \leq r \right\}.$$

Пусть $\mathcal{H}_1^c$ — единичный шар ядра процесса X_ν , рассматриваемого как случайный элемент пространства $C[0, 1/c]$, т.е. класс функций на $[0, 1/c]$, имеющих вид

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(u) e^{-itu} dF_\nu(u), \quad \|\ell\|_{2, F_\nu} \leq 1.$$

Пусть n — наименьшее натуральное число, большее или равное $1/c$. Заметим, что если $h \in \mathcal{H}_1^c$, то для $k = 0, 1, \dots, n-1$ функция $t \mapsto h(k+t)$ на $[0, 1]$ принадлежит единичному шару $\mathcal{H}_1$ ядра процесса X_ν на $[0, 1]$. Следовательно, если $h_1, \dots, h_N$ является ε -сетью для $\mathcal{H}_1$, то функции вида

$$t \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} h_{j_k}(t-k) \mathbf{1}_{[k, k+1)}(t)$$

образуют ε -сеть для $\mathcal{H}_1^c$. Таких функций не более N^n штук. Сохраним только те из них, для которых найдется на равномерном расстоянии не более ε некоторый элемент множества $\mathcal{H}_1^c$. Указанные элементы будут образовывать 2ε -сеть для $\mathcal{H}_1^c$, лежащую в самом этом множестве. Получаем $N(\mathcal{H}_1^c, 2\varepsilon) \leq nN(\mathcal{H}_1, \varepsilon) \leq (2/c)N(\mathcal{H}_1, \varepsilon)$. Применяя теперь предложение 3.3 и следствие 2.2, приходим к (1.6). Теорема 1.3 доказана.

5. О возможных обобщениях. Было бы очень интересно распространить наши результаты на случай более общих классов гладких процессов. Поскольку оценка Цирельсона дает правильный порядок $\varphi(X, r) \approx r^{-2/\beta}$ для полиномиальных спектральных плотностей $f(u) \approx |u|^{-1-\beta}$, а также для спектральных мер F_ν , $0 < \nu \leq 1$, естественно предположить, что она будет давать правильный ответ и во всех промежуточных случаях. Наши методы, разумеется, дают некоторые вполне разумные оценки и для общего случая, но они должны быть по меньшей мере усовершенствованы, чтобы дать удовлетворительное решение вопроса. Например, в качестве теста можно использовать процессы Y_α со спектральными плотностями

$$f_\alpha(u) = \exp\{-(\ln_+ |u|)^\alpha\}, \quad \alpha > 1,$$

для которых наши методы дают

$$\begin{aligned} & |\ln r|^{(\alpha-1)/\alpha} \exp \left\{ (2|\ln r|)^{1/\alpha} \right\} \\ & \leq \varphi(Y_\alpha, r) \leq |\ln r| \exp \left\{ (2|\ln r|)^{1/\alpha} + \frac{5}{\alpha} |\ln r|^{2/\alpha-1} \right\}, \end{aligned}$$

что не так точно, как хотелось бы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965, 407 с.
2. Aurzada F. A short note on small deviations of sequences of i.i.d. random variables with exponentially decreasing weights. — *Statist. Probab. Lett.*, 2008, v. 78, p. 2300–2307.
3. Borovkov A. A., Ruzankin P. S. Small deviations of series of independent positive random variables with weights close to exponential. — *Siberian Adv. Math.*, 2008, v. 18, № 3, p. 163–175.
4. Dunker T., Lifshits M. A., Linde W. Small deviations probabilities of sums of independent random variables. — *High Dimensional Probability*. Basel: Birkhäuser, 1998, p. 59–74.
5. Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М. ϵ -энтропия и ϵ -емкость множеств в функциональных пространствах. — *Успехи матем. наук*, 1959, т. 14, № 2, с. 3–86.
6. Kuelbs J., Li W. V. Metric entropy and the small ball problem for Gaussian measures. — *J. Funct. Anal.*, 1993, v. 116, № 1, p. 133–157.
7. Li W. V., Linde W. Approximation, metric entropy and small ball estimates for Gaussian measures. — *Ann. Probab.*, 1999, v. 27, № 3, 1556–1578.
8. Li W. V., Shao Q.-M. Gaussian processes: inequalities, small ball probabilities and applications. — *Stochastic Processes: Theory and Methods*. Amsterdam: North-Holland, 2001, p. 533–597.
9. Лифшиц М. А. Гауссовские случайные функции. Киев: ТБиМС, 1995, 246 с.
10. Lifshits M. A. Bibliography on small deviation probabilities. <http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/smalldev/biblio.html>.
11. Лифшиц М. А., Цирельсон Б. С. Малые отклонения гауссовских полей. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1986, т. 31, в. 3, с. 632–633.
12. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964, 267 с.
13. Rasmussen C. E., Williams C. K. I. *Gaussian Processes for Machine Learning*. Cambridge: MIT Press, 2006, 248 p.
14. van der Vaart A., van Zanten J. H. Bayesian inference with rescaled Gaussian process priors. — *Electron. J. Statist.*, 2007, v. 1, p. 433–448.
15. Widom H. Asymptotic behavior of the eigenvalues of certain integral equations. II. — *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1964, v. 17, p. 215–229.

Поступила в редакцию
29.III.2008

© 2008 г.

МАЛЬШЕВ В. А.* , МАНИТА А. Д.*

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МИКРОМОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА¹⁾

Рассматривается марковский процесс с запретами для системы частиц с локальным взаимодействием в целочисленной полосе. Этот процесс моделирует обмен скоростями и обмен частица-дырка молекул жидкости. Показано, что профиль средних скоростей соответствует пове-

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы 1, 119992 Москва, Россия; e-mail: malyshev2@yahoo.com, e-mail: manita@mech.math.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 05-01-22001, 06-01-00662 и 08-01-90431).