Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Малышев, А. Д. Манита, Стохастическая микромодель течения Куэтта, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 4, 798–809

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2467>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 18:00:31

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965, 407 с.
2. Aurzada F. A short note on small deviations of sequences of i.i.d. random variables with exponentially decreasing weights. — *Statist. Probab. Lett.*, 2008, v. 78, p. 2300–2307.
3. Borovkov A. A., Ruzankin P. S. Small deviations of series of independent positive random variables with weights close to exponential. — *Siberian Adv. Math.*, 2008, v. 18, № 3, p. 163–175.
4. Dunker T., Lifshits M. A., Linde W. Small deviations probabilities of sums of independent random variables. — *High Dimensional Probability*. Basel: Birkhäuser, 1998, p. 59–74.
5. Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М. ϵ -энтропия и ϵ -емкость множеств в функциональных пространствах. — *Успехи матем. наук*, 1959, т. 14, № 2, с. 3–86.
6. Kuelbs J., Li W. V. Metric entropy and the small ball problem for Gaussian measures. — *J. Funct. Anal.*, 1993, v. 116, № 1, p. 133–157.
7. Li W. V., Linde W. Approximation, metric entropy and small ball estimates for Gaussian measures. — *Ann. Probab.*, 1999, v. 27, № 3, 1556–1578.
8. Li W. V., Shao Q.-M. Gaussian processes: inequalities, small ball probabilities and applications. — *Stochastic Processes: Theory and Methods*. Amsterdam: North-Holland, 2001, p. 533–597.
9. Лифшиц М. А. Гауссовские случайные функции. Киев: ТБиМС, 1995, 246 с.
10. Lifshits M. A. Bibliography on small deviation probabilities. <http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/smalldev/biblio.html>.
11. Лифшиц М. А., Цирельсон Б. С. Малые отклонения гауссовских полей. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1986, т. 31, в. 3, с. 632–633.
12. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964, 267 с.
13. Rasmussen C. E., Williams C. K. I. *Gaussian Processes for Machine Learning*. Cambridge: MIT Press, 2006, 248 p.
14. van der Vaart A., van Zanten J. H. Bayesian inference with rescaled Gaussian process priors. — *Electron. J. Statist.*, 2007, v. 1, p. 433–448.
15. Widom H. Asymptotic behavior of the eigenvalues of certain integral equations. II. — *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1964, v. 17, p. 215–229.

Поступила в редакцию
29.III.2008

© 2008 г.

МАЛЬШЕВ В. А.* , МАНИТА А. Д.*

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МИКРОМОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА¹⁾

Рассматривается марковский процесс с запретами для системы частиц с локальным взаимодействием в целочисленной полосе. Этот процесс моделирует обмен скоростями и обмен частица–дырка молекул жидкости. Показано, что профиль средних скоростей соответствует пове-

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы 1, 119992 Москва, Россия; e-mail: malyshev2@yahoo.com, e-mail: manita@mech.math.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 05-01-22001, 06-01-00662 и 08-01-90431).

дению, характерному для несжимаемой вязкой жидкости. По параметру случайного возмущения доказано существование фазового перехода между ламинарным и турбулентным профилем.

Ключевые слова и фразы: течение Куэтта, марковские процессы с локальным взаимодействием, скейлинг, гидродинамика.

1. Введение. С математической точки зрения, эта статья посвящена исследованию фазового перехода для одного многомерного марковского процесса с запретами. Но поскольку она возникла из конкретных физических задач, мы подробно обсуждаем и эти связи.

Изучать движение жидкости можно как с макроскопической, так и с микроскопической точки зрения. Хотя в первом случае (т.е. в механике сплошной среды) единой основой являются уравнения Навье–Стокса, тем не менее существует много различных обобщений, связанных с введением случайности в эти уравнения (см. обзор Дж. Марсдена и другие статьи в [1], историю вопроса можно найти в недавнем препринте [4]). Именно с помощью уравнений Навье–Стокса было рассмотрено необозримое количество конкретных теоретических и прикладных задач механики жидкостей, в том числе и течение Куэтта, которое является простейшей (но далеко не тривиальной, см. [5], [6]) моделью, доступной для изучения на математическом уровне.

Микроскопических же моделей для конкретных ситуаций в случае ненулевой вязкости крайне мало, несмотря на обилие решеточных моделей с бесконечным числом частиц (см. монографии [10], [3], [9]). В теоретической физике предпочтительным направлением является вывод уравнений Навье–Стокса следуя цепочке «гамильтонова микродинамика (например, твердых шариков) → цепочка уравнений ББГКИ → уравнение Больцмана → уравнения гидродинамики». Однако есть и прямые выводы уравнений Навье–Стокса из модельной случайной динамики частиц на решетке (см. [11]). В последние годы появились работы, где с уравнениями Навье–Стокса связывается некоторая система частиц так, что при определенном скейлинге динамика частиц сходится к этим уравнениям (см. [3], [13], [14]). Однако динамика частиц в этих работах не является локальной, а ближе к динамике среднего поля типа Маккина–Власова. Но самое главное — она берется не из собственно молекулярной динамики, а из методов компьютерного численного моделирования уравнений Навье–Стокса. Поэтому вывод уравнений Навье–Стокса из физически обоснованной динамики молекул остается открытым.

Основная проблема здесь — неясно, как лучше описывать движение молекул жидкости. Модель твердых шариков,двигающихся по законам классической механики, проста в формулировке, но чрезвычайно сложна в исследовании. Но самое главное, нет никакой уверенности в том, что она адекватна. Дело в том, что молекулы в жидкости расположены довольно близко друг от друга, и квантовые эффекты, повидимому, существенны. Если же работать в рамках классических моделей, то надо учитывать взаимодействие вращательных и колебательных степеней свободы соседних молекул, которые имеют случайные распределения.

С другой стороны, прежде чем пытаться вывести уравнения Навье–Стокса в полном объеме, естественно сначала рассмотреть частные случаи. В рассматриваемой ниже (локальной) модели течения Куэтта используется два процесса: обмен скоростями между молекулами и обмен координатами между молекулами и дырками (т.е. пустыми местами). Это соответствует интуитивной картине, представляемой в физической литературе. При этом можно надеяться, что существует определенная универсальность, т.е. независимость качественного поведения от вида модели.

С вероятностной точки зрения мы изучаем марковскую систему взаимодействующих частиц, динамика которой является смесью двух хорошо известных (см. [8]) процессов с запретами — симметричного и полностью асимметричного. Введение граничных условий, соответствующих прилипанию на границе, не влияет на моментную замкнутость процесса [12], что существенно облегчает исследование. Именно благодаря наличию моментной замкнутости удается избежать использования такой громоздкой техники, как анзац Бете [15] или матричный анзац (см., например, [16]).

Мы хотим отметить, кроме того, что, из-за разности скейлингов, прямое исследование микромоделей конкретной ситуации не эквивалентно выводу для нее уравнений Навье–Стокса и их дальнейшему исследованию. Мы получаем для нашей модели фазовый переход в профиле скорости, полностью соответствующий известному переходу в течении Куэтта [7], однако есть различия. Параметр перехода у нас не является переходом по классическому числу Рейнольдса, зависящему от вязкости, поперечного сечения и продольной скорости, а по его аналогу, зависящему от интенсивности поперечного обмена (аналога вязкости), поперечного сечения и случайного возмущения. Последнее может происходить либо от быстрых вихрей, возникающих из-за отклонений продольного течения от строгой горизонтальности, либо из-за обмена скоростей между молекулами со случайными внутренними степенями свободы. Интересно, что фазовый переход является резким на грубой шкале и плавным на более мелкой шкале.

2. Модель и результаты. Течением Куэтта называется течение жидкости в одном (горизонтальном) направлении в пространстве (далее оно у нас дискретно и двумерно, однако обобщение на многомерный случай делается непосредственно) между двумя пластинами, одна из которых неподвижна, а другая движется с постоянной скоростью, увлекая за собой близлежащие частицы. Остальные частицы также вовлекаются в движение благодаря вязкости, что микроскопически выражается в обмене скоростями между соседними частицами.

Переходим теперь к точным определениям. Отправным множеством для нас будет служить дискретная полоса

$$L_S = \{0, 1, 2, \dots, S, S+1\} \times \mathbb{Z},$$

в каждой точке которой задана случайная величина $v_{(s,x)}$, которая может принимать одно из трех значений: $\emptyset$, 0 или V . Значение $\emptyset$ означает, что в узле (s, x) нет частиц («дырка»), $v_{(s,x)} = 0$ означает присутствие одной частицы с нулевой скоростью, а $v_{(s,x)} = V$ означает наличие одной частицы со скоростью V . Для удобства изложения мы будем называть «дырку» частицей со скоростью $\emptyset$.

Динамика данной системы частиц имеет скачкообразный характер и описывается следующими переходами. На малом интервале времени $[t, t + dt]$ независимо друг от друга могут произойти такие события:

(а) частицы каждой соседней вертикальной пары (в точках (s, x) и $(s+1, x)$) с вероятностью $\lambda dt + o(dt)$ обмениваются скоростями (*обмен скоростями между вертикальными слоями*);

(б) частицы каждой соседней горизонтальной пары типа $v_{(s,x)} = V$, $v_{(s,x+1)} = \emptyset$ (и только такого типа) с вероятностью $\lambda_1 dt + o(dt)$ обмениваются скоростями (*горизонтальное течение*); можно положить конечно, $V = \lambda_1$, но нам в этой статье удобнее их различать;

(в) каждая частица на нулевом слое, имеющая скорость V , с вероятностью $\beta dt + o(dt)$ приобретает скорость 0; каждая частица на верхнем слое $S+1$, имеющая скорость 0, с вероятностью $\beta dt + o(dt)$ приобретает скорость V (*влияние границы*);

(г) каждый узел (s, x) с непустой скоростью ($v_{(s,x)} = 0$ или V) с вероятностью $\varepsilon dt + o(dt)$ меняет скорость по правилу $0 \leftrightarrow V$ (*случайное возмущение*).

В дальнейшем мы предполагаем, что $\lambda > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\beta > 0$ и $\varepsilon \geq 0$.

Таким образом, мы определили *марковский* процесс $v(t) = \{v_{(s,x)}(t), (s, x) \in L_S\}$, $t \in \mathbb{R}_+$, с непрерывным временем и пространством состояний $\mathcal{W} = \{\emptyset, 0, V\}^{L_S}$. Его генератор действует на функции f , зависящие от состояний в конечном числе узлов, следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(v) := & \lambda \sum_{x \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^S \left(f(v^{(k,x) \leftrightarrow (k+1,x)}) - f(v) \right) \\ & + \lambda_1 \sum_{x \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{S+1} \left(f(v^{(k,x) \leftrightarrow (k,x+1)}) - f(v) \right) \mathbf{1}(v_{(k,x)} = V, v_{(k,x+1)} = \emptyset) \\ & + \beta \sum_{x \in \mathbb{Z}} \left(f(v^{(0,x)}) - f(v) \right) \mathbf{1}(v_{(0,x)} = V) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \beta \sum_{x \in \mathbb{Z}} \left(f(v^{(S+1, x)}) - f(v) \right) \mathbf{1}(v_{(S+1, x)} = 0) \\ & + \varepsilon \sum_{x \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{S+1} \left(f(v^{(k, x)}) - f(v) \right) \mathbf{1}(v_{(k, x)} \neq \emptyset), \end{aligned} \quad (1)$$

где конфигурации $w = v^{y \leftrightarrow z}$ и v из $\mathscr{W}$ различаются только скоростями в точках y и z из L_S :

$$w_y = v_z, \quad w_z = v_y,$$

а $v^y \in \mathscr{W}$ — конфигурация, которая может отличаться от v только значением скорости в узле y , за счет перемены значений $0 \leftrightarrow V$:

$$(v^y)_z = \begin{cases} v_z, & z \neq y, \\ \emptyset, & z = y, \quad v_y = \emptyset, \\ V \mathbf{1}(v_y = 0), & z = y, \quad v_y \neq \emptyset. \end{cases}$$

Можно проверить, что такое определение $\mathscr{L}$ приводит к корректному заданию марковского процесса на $\mathscr{W}$ (см. [8, гл. I, §3]).

Распределение случайного процесса $v(t)$ в момент времени t обозначим через η^t . Пусть $A = ((s_1, x_1), \dots, (s_m, x_m))$ есть некоторое конечное упорядоченное подмножество L_S , а $E = (e_1, \dots, e_m)$ — некоторый упорядоченный набор $e_j \in \{\emptyset, 0, V\}$. Рассмотрим следующие вероятности

$$q_t[A; E] := \mathbf{P} \{v_{(s_1, x_1)}(t) = e_1, \dots, v_{(s_m, x_m)}(t) = e_m\}.$$

На множестве L_S действует естественная группа сдвигов $(T_a, a \in \mathbb{Z})$ вдоль горизонтального направления:

$$T_a(s, x) = (s, x + a).$$

В этой работе мы ограничиваем себя рассмотрением начальных распределений η^0 процесса v , инвариантных относительно действия группы T_a . Заметим, что так как марковская полугруппа, порождаемая (1), перестановочна с T_a , то в любой момент времени t распределение η^t также трансляционно инвариантно. В частности, при любом выборе множеств A и E

$$q_t[T_a A; E] = q_t[A; E] \quad (2)$$

для всех $t > 0$ и $a \in \mathbb{Z}$. С физической точки зрения это означает, что нас интересуют только однородные течения, т.е., инвариантные относительно сдвигов вдоль направления x : $x \rightarrow x + a$.

Заметим, что динамика процесса v такова, что количество частиц, т.е. суммарное количество узлов со скоростями 0 и V , «сохраняется». В частности, среднее число непустых узлов в вертикальном сечении x сохраняется во времени и не зависит от x :

$$\sum_{k=0}^{S+1} (q_t[(k, x); 0] + q_t[(k, x); V]) \equiv M \quad \forall x, t. \quad (3)$$

Постоянная $M = M(\eta^0)$, очевидно, может быть вычислена по начальному распределению η^0 . Заметим, однако, что число узлов со значением V не сохраняется.

В последующем нас будут интересовать только распределения в фиксированном вертикальном разрезе, поэтому ввиду однородности индекс x можно опустить, полагая

$$q_t[(s, x); e] = p_s^e(t). \quad (4)$$

Теорема 1. Предположим, что начальное распределение η^0 трансляционно инвариантно. Тогда:

1) (существование стационарного режима) для любых s и e существуют пределы

$$\mu_s^e = \lim_{t \rightarrow \infty} p_s^e(t),$$

мы назовем их стационарными вероятностями;

2) (равномерность плотности числа частиц) стационарные вероятности «дырок» одинаковы для всех $s = 0, 1, \dots, S+1$:

$$\mu_s^0 \equiv \text{const}.$$

Сначала рассмотрим случай, когда случайное возмущение отсутствует, т.е. $\varepsilon = 0$.

Теорема 2 (линейный профиль скоростей). Пусть начальное распределение η^0 трансляционно инвариантно и $\varepsilon = 0$. Тогда средняя скорость частиц имеет линейный профиль, точнее,

$$\mu_k^V = \frac{\rho S}{S+1+2\lambda\beta^{-1}} (k + \lambda\beta^{-1}), \quad k = 0, 1, \dots, S+1,$$

где $\rho S = M(\eta^0)/(S+2)$.

Эта теорема соответствует профилю скоростей для ламинарного течения, в отличие от того, что наблюдается в турбулентном режиме (см. [7]). В следующей теореме рассматривается случай ненулевого случайного возмущения.

Теорема 3. Пусть $S \rightarrow \infty$, параметр $\varepsilon = \varepsilon_S$ зависит от S , а последовательность начальных распределений $\{\eta^{0,S}\}$ подобрана таким образом, что фиксирована удельная плотность числа частиц, т.е.

$$\frac{M(\eta^{0,S})}{S+2} \rightarrow \rho \in [0, 1], \quad S \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Тогда:

1) (грубая картина перехода) для μ_s^0 и μ_s^V при скейлинге $s = uS$, $u \in (0, 1)$, имеет место фазовый переход от ламинарного профиля к турбулентному; точнее, если $\varepsilon_S S^2 \rightarrow 0$, то профиль μ_{uS}^V , $u \in (0, 1)$, будет иметь линейный (ламинарный) вид:

$$\mu_{uS}^V \rightarrow \rho u \quad (S \rightarrow \infty),$$

а если $\varepsilon_S S^2 \rightarrow \infty$, то — постоянный (турбулентный):

$$\mu_{uS}^V \rightarrow \frac{\rho}{2}, \quad (S \rightarrow \infty);$$

2) (тонкая картина перехода) случай $\varepsilon_S S^2 = \text{const}$, $S \rightarrow \infty$, является промежуточным по отношению к ситуациям, описанным в пункте 1); точнее, если ввести положительный параметр K и положить $\varepsilon_S S^2 = \frac{1}{2}\lambda K^2$, то $\mu_{uS}^V \rightarrow g_K(u)$, где

$$g_K(u) := \frac{\rho}{2} \left(1 + \frac{\text{sh}(K(u - 1/2))}{\text{sh}(K/2)} \right).$$

Так как $\lim_{K \rightarrow 0} g_K(u) = \rho u$, а $\lim_{K \rightarrow \infty} g_K(u) = \rho/2$, мы можем сказать, что по параметру $K > 0$ имеет место плавный переход от ламинарного профиля к турбулентному.

З а м е ч а н и е 1. Параметр K служит аналогом числа Рейнольдса Re . Это можно пояснить качественным сравнением этих чисел, т.е. сравнением формулы для K

$$K^2 = \frac{S^2 \varepsilon}{\lambda/2}$$

с формулой для числа Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{LV}{\nu},$$

где L — ширина потока, V — средняя скорость, ν — вязкость.

Отмеченный фазовый переход основан на конкуренции между процессами, усиливающими влияние границы, и процессами, его уменьшающими. Так, множители L и S показывают, что чем больше расстояние до границ, тем больше случайные возмущения преобладают над влиянием границ. Множители V и ε показывают, что чем больше скорость, тем чаще частица получает случайные возмущения и влияние границы менее заметно. Наконец, чем больше λ , тем влияние границы более заметно. Следует отметить, что, по смыслу модели, параметр V можно считать пропорциональным λ_1 .

3. Доказательства теорем.

3.1. Замкнутые уравнения для одночастичных функций. Наша ближайшая цель — получить систему дифференциальных уравнений для функций $p_k^e(t)$, $0 \leq k \leq S+1$, $e \in \{\emptyset, 0, V\}$, определенных в (4). Первое наблюдение состоит в том, что при каждом $k = 0, 1, \dots, S+1$

$$p_k^\emptyset(t) + p_k^0(t) + p_k^V(t) = 1 \quad \forall t \geq 0, \quad (6)$$

т.е., например, функции $p_k^0(t)$ могут быть легко выражены через функции $p_k^\emptyset(t)$ и $p_k^V(t)$.

Лемма 1. Пусть начальное распределение η^0 трансляционно инвариантно. Тогда набор функций $p_k^e(t)$ удовлетворяет замкнутой системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка, которая имеет следующую структуру.

1) Функции $p_k^\emptyset(t)$ могут быть найдены из подсистемы

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_k^\emptyset(t) &= \lambda(p_{k+1}^\emptyset(t) + p_{k-1}^\emptyset(t) - 2p_k^\emptyset(t)), & 1 \leq k \leq S, \\ \frac{d}{dt} p_0^\emptyset(t) &= \lambda(p_1^\emptyset(t) - p_0^\emptyset(t)), \\ \frac{d}{dt} p_{S+1}^\emptyset(t) &= \lambda(p_S^\emptyset(t) - p_{S+1}^\emptyset(t)). \end{aligned} \quad (7)$$

2) Уравнения для $p_k^V(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_k^V(t) &= \lambda(p_{k+1}^V(t) + p_{k-1}^V(t) - 2p_k^V(t)) + \varepsilon(1 - p_k^\emptyset(t) - 2p_k^V(t)), \\ &1 \leq k \leq S, \\ \frac{d}{dt} p_0^V(t) &= \lambda(p_1^V(t) - p_0^V(t)) + \varepsilon(1 - p_0^\emptyset(t) - 2p_0^V(t)) - \beta p_0^V(t), \\ \frac{d}{dt} p_{S+1}^V(t) &= \lambda(p_S^V(t) - p_{S+1}^V(t)) + \varepsilon(1 - p_{S+1}^\emptyset(t) - 2p_{S+1}^V(t)) \\ &+ \beta(1 - p_{S+1}^\emptyset(t) - p_{S+1}^V(t)). \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что уравнения (7) и (8) не зависят от λ_1 .

З а м е ч а н и е 2. Можно проверить, что система (7) имеет ту же форму, что и соответствующая система для простого симметричного процесса с запретами на конечном множестве $0, 1, \dots, S+1$ (с пустыми граничными условиями).

Оставшаяся часть настоящего пункта посвящена доказательству леммы 1. Для этого вначале мы выпишем уравнения для маргинальных распределений $q_t[(k, x); e]$ без предположения о трансляционной инвариантности начального распределения скоростей.

Для внутренних слоев $1 \leq k \leq S$ имеют место уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q_t[(k, x); \emptyset] &= \lambda(q_t[(k+1, x); \emptyset] + q_t[(k-1, x); \emptyset] - 2q_t[(k, x); \emptyset]) \\ &+ \lambda_1(q_t[((k, x), (k, x+1)); (V, \emptyset)] - q_t[((k, x-1), (k, x)); (V, \emptyset)]), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q_t[(k, x); 0] &= \lambda(q_t[(k+1, x); 0] + q_t[(k-1, x); 0] - 2q_t[(k, x); 0]) \\ &+ \varepsilon(q_t[(k, x); V] - q_t[(k, x); 0]), \\ \frac{d}{dt} q_t[(k, x); V] &= \lambda(q_t[(k+1, x); V] + q_t[(k-1, x); V] - 2q_t[(k, x); V]) \\ &+ \varepsilon(q_t[(k, x); 0] - q_t[(k, x); V]) + \lambda_1(-q_t[((k, x), (k, x+1)); (V, \emptyset)] \\ &+ q_t[((k, x-1), (k, x)); (V, \emptyset)]). \end{aligned} \quad (10)$$

На нижней границе $k = 0$ уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q_t[(0, x); \emptyset] &= \lambda \left(q_t[(1, x); \emptyset] - q_t[(0, x); \emptyset] \right) \\ &+ \lambda_1 \left(q_t[((0, x), (0, x + 1)); (V, \emptyset)] - q_t[((0, x - 1), (0, x)); (V, \emptyset)] \right), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q_t[(0, x); 0] &= \lambda \left(q_t[(1, x); 0] - q_t[(0, x); 0] \right) + \beta q_t[(0, x); V] \\ &+ \varepsilon \left(q_t[(0, x); V] - q_t[(0, x); 0] \right), \\ \frac{d}{dt} q_t[(0, x); V] &= \lambda \left(q_t[(1, x); V] - q_t[(0, x); V] \right) - \beta q_t[(0, x); V] \\ &+ \varepsilon \left(-q_t[(0, x); V] + q_t[(0, x); 0] \right) + \lambda_1 \left(-q_t[((0, x), (0, x + 1)); (V, \emptyset)] \right. \\ &\quad \left. + q_t[((0, x - 1), (0, x)); (V, \emptyset)] \right). \end{aligned} \quad (12)$$

На верхней границе $k = S + 1$ уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q_t[(S + 1, x); \emptyset] &= \lambda \left(q_t[(S, x); \emptyset] - q_t[(S + 1, x); \emptyset] \right) \\ &+ \lambda_1 \left(q_t[((S + 1, x), (S + 1, x + 1)); (V, \emptyset)] \right. \\ &\quad \left. - q_t[((S + 1, x - 1), (S + 1, x)); (V, \emptyset)] \right), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q_t[(S + 1, x); 0] &= \lambda \left(q_t[(S, x); 0] - q_t[(S + 1, x); 0] \right) + \beta q_t[(S + 1, x); V] \\ &+ \varepsilon \left(q_t[(S + 1, x); V] - q_t[(S + 1, x); 0] \right), \\ \frac{d}{dt} q_t[(S + 1, x); V] &= \lambda \left(q_t[(S, x); V] - q_t[(S + 1, x); V] \right) + \beta q_t[(S + 1, x); 0] \\ &+ \varepsilon \left(q_t[(S + 1, x); 0] - q_t[(S + 1, x); V] \right) \\ &+ \lambda_1 \left(-q_t[((S + 1, x), (S + 1, x + 1)); (V, \emptyset)] \right. \\ &\quad \left. + q_t[((S + 1, x - 1), (S + 1, x)); (V, \emptyset)] \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Мы видим, что уравнения для одномерных маргинальных распределений процесса *не являются замкнутыми*, так как включают двумерные распределения.

Вывод этих уравнений проводится непосредственно, но промежуточные формулы довольно громоздки. Этот вывод станет более прозрачным, если заметить, что динамика модели является объединением трех процессов. Во-первых, это симметричный процесс с запретами вдоль вертикальных слоев. Во-вторых, полностью асимметричный процесс с запретами в горизонтальном направлении. И наконец, глауберовский процесс «спин-флип» в каждой точке. Этот последний входит в уравнения очень простым образом, а первые два поучительно рассмотреть отдельно. Мы увидим, что уравнения для первого являются замкнутыми даже с граничными условиями, а для второго — наоборот, незамкнутыми.

Модель 1: симметричный процесс с запретами. Полезно рассмотреть более простую вспомогательную модель $\xi(t) = (\xi_s(t))$, которая описывает один вертикальный слой $x = 0$, состоящий из точек $s = 0, 1, 2, \dots, S, S + 1$, при дополнительном предположении, что $\lambda_1 = 0$, $\varepsilon = 0$ и $\beta = 0$. Для простоты обозначений мы будем считать, что «дырки» отсутствуют, т.е. $\xi_s(t) \in \{0, 1\}$, и положим $V = 1$. Тогда процесс $\xi(t)$, $t \geq 0$, является хорошо известным процессом с запретами (simple exclusion process).

Обозначим для $1 \leq i < i + k - 1 \leq S$ и $e_j = 0, 1$

$$p_t(i; e_1 \dots e_k) = \mathbf{P} \{ \xi_i(t) = e_1, \dots, \xi_{i+k-1}(t) = e_k \}.$$

Для одночастичных функций $p_t(s; 1)$ непосредственно получаются замкнутые уравнения. Действительно, используя вид переходных функций марковского процесса ξ на

малом интервале времени $[t, t + dt]$ и формулу полной вероятности, с точностью до $o(dt)$ для каждого $1 \leq i \leq S$ имеем

$$p_{t+dt}(i; 1) = p_t(i-1; 111) + [p_t(i-1; 011) + p_t(i-1; 110)](1 - \lambda dt) + p_t(i-1; 010)(1 - 2\lambda dt) + [p_t(i-1; 100) + p_t(i-1; 001)]\lambda dt + p_t(i-1; 101) \cdot 2\lambda dt, \quad (15)$$

откуда

$$p_{t+dt}(i; 1) - p_t(i; 1) = \lambda dt [-p_t(i-1; 01) - p_t(i; 10) + p_t(i-1; 10) + p_t(i; 01)] = \lambda dt [p_t(i-1; 1) - 2p_t(i; 1) + p_t(i+1; 1)], \quad (16)$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dt} p_t(i; 1) = \lambda [p_t(i-1; 1) - 2p_t(i; 1) + p_t(i+1; 1)]. \quad (17)$$

Модель 2: асимметричный процесс с запретами. Нам удобно также рассмотреть $\zeta(t) = (\zeta_x(t), x \in \mathbf{Z})$ — асимметричный процесс с запретами на $\mathbf{Z}$ с тремя значениями в узле $\zeta_x \in \{\emptyset, 0, V\}$, в котором возможны *лишь следующие переходы*: каждая пара ближайших соседей вида $V\emptyset$ с интенсивностью λ_1 переходит в пару $\emptyset V$. Другими словами, на интервале $[t, t + dt]$ каждая частица со скоростью V независимо от остальных частиц с вероятностью $\lambda_1 dt + o(dt)$ перепрыгивает на единицу вперед ($x \rightarrow x + 1$) при условии, что узел $x + 1$ не занят другой частицей. Нам потребуются вычисления, аналогичные (15) и (16). На этот раз $x \in \mathbf{Z}$. Как и раньше, рассмотрим все возможные состояния соседних узлов $x - 1$, x и $x + 1$ в момент t и применим формулу полной вероятности:

$$p_{t+dt}(x; \emptyset) = \sum_{e_i \in \{\emptyset, 0, V\}, i=1,2,3} \mathbf{P} \left(\zeta_x(t + dt) = \emptyset \mid (\zeta_{x-1}(t), \zeta_x(t), \zeta_{x+1}(t)) = (e_1, e_2, e_3) \right) \times \mathbf{P} \left\{ (\zeta_{x-1}(t), \zeta_x(t), \zeta_{x+1}(t)) = (e_1, e_2, e_3) \right\}.$$

Условные вероятности, стоящие под знаком суммы, легко найти. Результаты представлены в виде следующей таблицы, где «*» обозначает любой из символов $\emptyset, 0$ или V :

$x - 1$ e_1	x e_2	$x + 1$ e_3	$\mathbf{P}(\zeta_x(t + dt) = \emptyset \mid (\zeta_{x-1}(t), \zeta_x(t), \zeta_{x+1}(t)) = (e_1, e_2, e_3))$
$\emptyset$	$\emptyset$	*	$1 - o(dt)$
0	$\emptyset$	*	$1 - o(dt)$
V	$\emptyset$	*	$1 - \lambda_1 dt + o(dt)$
*	0	*	$o(dt)$
*	V	$\emptyset$	$\lambda_1 dt + o(dt)$
*	V	0	$o(dt)$
*	V	V	$o(dt)$

С точностью до членов порядка $o(dt)$ получим:

$$p_{t+dt}(x; \emptyset) = p_t(x-1; \emptyset\emptyset) + p_t(x-1; 0\emptyset) + p_t(x-1; V\emptyset) - \lambda_1 dt \cdot p_t(x-1; V\emptyset) + \lambda_1 dt \cdot p_t(x; V\emptyset) = p_t(x; \emptyset) + \lambda_1 dt \cdot [-p_t(x-1; V\emptyset) + p_t(x; V\emptyset)],$$

откуда

$$\frac{d}{dt} p_t(x; \emptyset) = \lambda_1 [-p_t(x-1; V\emptyset) + p_t(x; V\emptyset)]. \quad (18)$$

Совершенно так же получается уравнение для $p_t(x; V)$:

$$\frac{d}{dt} p_t(x; V) = \lambda_1 [p_t(x-1; V\emptyset) - p_t(x; V\emptyset)].$$

Аналогично рассматриваются составляющие динамики (1), соответствующие случайным возмущениям и поведению на границах.

Оказывается, что уравнения для $q_t[(k, x); e]$ становятся замкнутыми, если рассматривать трансляционно инвариантные распределения. Именно, чтобы завершить доказательство леммы 1, с этого момента мы будем считать, что процесс стартует в момент $t = 0$ с трансляционно инвариантного распределения. Напомним, что динамика сохраняет трансляционную инвариантность, т.е. в любой момент $t > 0$ распределение процесса будет обладать этим свойством. В частности, имеет место (2). Следовательно, при таком начальном распределении в правых частях уравнений (9)–(14) все члены, умножаемые на λ_1 , обнуляются. Собирая вместе уравнения с $\frac{d}{dt} q_t[(k, x); \emptyset]$, $0 \leq k \leq S + 1$, и используя обозначения (4), приходим к утверждению пункта 1) леммы 1. Утверждение пункта 2) также легко вытекает из вида уравнений (9)–(14) с учетом (6).

Лемма полностью доказана.

3.2. Сходимость при $t \rightarrow \infty$. Здесь мы докажем пункт 1) теоремы 1, а именно, мы покажем существование пределов $\lim_{t \rightarrow \infty} p_k^e(t)$ для функций $p_k^e(t)$, являющихся решениями систем (7)–(8). Мы воспользуемся вероятностными рассуждениями. Для этого мы введем на конечном множестве состояний $\mathcal{M} = \{\emptyset, 0, V\}^{\{0, 1, \dots, S+1\}}$ вспомогательный марковский процесс с непрерывным временем

$$\vartheta(t) = (\vartheta_k(t), k = 0, 1, \dots, S + 1), \quad \vartheta_k(t) \in \{\emptyset, 0, V\},$$

имеющий следующие переходы. На малом интервале времени $[t, t + dt]$ независимо друг от друга могут произойти такие события:

- каждая вертикальная пара соседних узлов k и $k + 1$ с вероятностью $\lambda dt + o(dt)$ обменивается состояниями;
- узел нулевого слоя $k = 0$, находящийся в состоянии V , с вероятностью $\beta dt + o(dt)$ приобретает состояние 0 ; узел верхнего слоя $k = S + 1$, находящийся в состоянии 0 , с вероятностью $\beta dt + o(dt)$ меняет свое состояние на V ;
- каждый узел k с состоянием, отличным от $\emptyset$, с вероятностью $\varepsilon dt + o(dt)$ меняет состояние по правилу $0 \leftrightarrow V$ (случайное возмущение).

Обратим внимание на то, что марковский процесс $\vartheta(t)$ является приводимым, так как динамика не изменяет числа узлов, находящихся в пустом ($\emptyset$) состоянии. Вместе с тем, процесс $\vartheta(t)$, рассматриваемый на каждом из инвариантных для динамики множеств

$$\mathcal{M}_n = \{\vartheta = (\vartheta_0, \dots, \vartheta_{S+1}) \in \mathcal{M} : \# \{j : \vartheta_j = \emptyset\} = n\}, \quad n = 0, 1, \dots, S + 1,$$

будет неприводим и эргодичен, следовательно, при каждом n пределы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\vartheta(t) = \kappa | \vartheta(0) = \kappa_0) = g_n(\kappa), \quad \kappa_0, \kappa \in \mathcal{M}_n,$$

существуют и не зависят от конкретного выбора начального состояния κ_0 . Поэтому для каждого начального распределения $\mu_{\vartheta(0)}$ существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\vartheta(t) = \kappa\}$, зависящий от $\mu_{\vartheta(0)}$.

Если в пределах настоящего пункта позволить себе обозначение

$$p_k^e(t) = \mathbf{P}\{\vartheta_k(t) = e\}, \quad e \in \{\emptyset, 0, V\}, \quad k = 0, 1, \dots, S + 1,$$

то можно показать, что функции $p_k^e(t)$ удовлетворяют системе уравнений (7)–(8). Доказательство этого факта немного проще рассуждений п. 3.1. Так как

$$p_k^e(t) = \sum_{\kappa \in \mathcal{M} : \kappa_k = e} \mathbf{P}\{\vartheta(t) = \kappa\},$$

то пункт 1) теоремы 1 легко следует.

3.3. Точные формулы для стационарных решений. Здесь мы возвращаемся к рассмотрению процесса $v(t)$. Обозначим $\mu_s^\emptyset$, μ_s^0 и μ_s^V — стационарные вероятности того, что на вертикальном слое s нет частиц, есть частица со скоростью 0

и есть частица со скоростью V соответственно: $\lim_{t \rightarrow \infty} p_s^e(t) = \mu_s^e$. Как было объяснено в предыдущем пункте, эти пределы зависят от начального распределения η^0 . В частности,

$$\sum_{s=0}^{S+1} \mu_s^{\varnothing} = (S+2) - M(\eta^0), \quad (19)$$

где $M(\eta^0)$ определено в (3).

Заметим, что предельные вероятности μ_s^e являются решениями стационарных версий выписанных выше уравнений (7), (8). Из (6) вытекает, что

$$\mu_s^{\varnothing} + \mu_s^0 + \mu_s^V = 1 \quad \forall s.$$

Лемма 2. «Дырки» распределены по слоям равномерно: $\mu_s^{\varnothing} = \mu_{s_1}^{\varnothing}$ для любых $s, s_1 \in \{0, 1, \dots, S+1\}$.

Доказательство. Система стационарных уравнений для $\mu_s^{\varnothing}$, $s = 0, 1, \dots, S+1$, имеет вид:

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_{s-1}^{\varnothing} + \mu_{s+1}^{\varnothing} - 2\mu_s^{\varnothing}, & 1 \leq s \leq S, \\ 0 &= \mu_1^{\varnothing} - \mu_0^{\varnothing}, \\ 0 &= \mu_S^{\varnothing} - \mu_{S+1}^{\varnothing}. \end{aligned}$$

Очевидно, что множество всех ее решений образует одномерное подпространство $\mu_0^{\varnothing} = \dots = \mu_{S+1}^{\varnothing}$. По смыслу исходной вероятностной модели мы выберем лишь семейство

$$\mu_0^{\varnothing} = \dots = \mu_{S+1}^{\varnothing} = 1 - \rho_S \in [0, 1].$$

Это доказывает лемму, а вместе с ней и пункт 2) теоремы 1.

Число $\rho_S \in [0, 1]$ будем называть плотностью частиц. Из (19) видно, что плотность зависит от начального распределения: $\rho_S = M(\eta^0)/(S+2)$.

Так как $\mu_k^0 + \mu_k^V \equiv \rho_S$, то достаточно найти только вероятности $(\mu_k^V, k = 0, 1, \dots, S+1)$. Они удовлетворяют следующим уравнениям на внутренних слоях:

$$0 = \lambda(\mu_{k+1}^V + \mu_{k-1}^V - 2\mu_k^V) + \varepsilon(\rho_S - 2\mu_k^V), \quad 1 \leq k \leq S, \quad (20)$$

с граничными условиями

$$0 = \lambda(\mu_1^V - \mu_0^V) + \varepsilon(\rho_S - 2\mu_0^V) - \beta\mu_0^V, \quad (21)$$

$$0 = \lambda(\mu_S^V - \mu_{S+1}^V) + \varepsilon(\rho_S - 2\mu_{S+1}^V) + \beta(\rho_S - \mu_{S+1}^V). \quad (22)$$

С л у ч а й 1: $\varepsilon = 0$. Уравнения (20) примут вид $\mu_{k+1}^V + \mu_{k-1}^V - 2\mu_k^V = 0$. Характеристическое уравнение этой разностной задачи

$$z^2 + 1 - 2z = 0$$

имеет корень $z = 1$ кратности 2. Это резонансный случай, поэтому общее решение запишется в форме $\mu_k^V = D_0 + D_1 k$. Неопределенные коэффициенты D_0 и D_1 находятся из граничных условий (21) и (22):

$$0 = \lambda D_1 - \beta D_0, \quad 0 = -\lambda D_1 + \beta(\rho_S - D_0 - D_1(S+1)).$$

Решая эту систему, получим явное решение в виде линейной функции

$$\mu_k^V = \frac{\rho_S}{S+1+2\lambda\beta^{-1}} (k + \lambda\beta^{-1}), \quad k = 0, 1, \dots, S+1.$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы 2.

С л у ч а й 2: $\varepsilon > 0$. Стандартным образом можно показать, что общее решение неоднородных разностных уравнений (20) имеет вид

$$\mu_k = \frac{\rho_S}{2} + C_1 z_1^k + C_2 z_2^k, \quad (23)$$

где z_1 и z_2 — решения характеристического уравнения

$$\lambda z^2 + \lambda - 2(\lambda + \varepsilon)z = 0, \quad (24)$$

а C_1 и C_2 — неопределенные коэффициенты. Непосредственно решая уравнение (24), имеем

$$z_{1,2} = 1 + \frac{\varepsilon}{\lambda} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)^2 - 1}. \quad (25)$$

Заметим, что при $\varepsilon > 0$ уравнение (24) имеет два *различных* вещественных корня: $z_1 > 1$ и $z_2 < 1$, причем $z_1 z_2 = 1$. Подставляя (23) в граничные условия (21)–(22), после некоторых преобразований получим следующую лемму.

Лемма 3. *Решение $(\mu_s^V, s = 0, 1, \dots, S+1)$ имеет следующий явный вид:*

$$\mu_k^V = \frac{\rho_S}{2} - \rho_S \frac{(b(z_1)z_1^{S+1-k} - b(z_2)z_2^{S+1-k}) - (b(z_1)z_1^k - b(z_2)z_2^k)}{2(b^2(z_1)z_1^{S+1} - b^2(z_2)z_2^{S+1})},$$

$k = 0, 1, \dots, S+1$, где $b(z) := 1 + (2\varepsilon + \lambda(1 - z^{-1}))/\beta$.

3.4. Асимптотика и фазовый переход. Мы будем считать, что параметры λ и β фиксированы, а $\varepsilon \rightarrow 0$, $S \rightarrow \infty$. Видим, что при малых ε

$$z_1 = 1 + \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\lambda}} + O\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right), \quad z_2 = 1 - \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\lambda}} + O\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right).$$

Исходя из предположений теоремы 3, будем считать для простоты, что $\rho_S \equiv \rho$.

Нас будет интересовать поведение $(\mu_k^V, 0 \leq k \leq S+1)$ на пространственной шкале $k = [uS]$, $u \in [0, 1]$. Чтобы получить содержательную асимптотику при $S \rightarrow \infty$, возьмем параметр ε зависящим от S :

$$\varepsilon_S = \frac{\lambda}{2} \psi^2(S) S^{-2},$$

где $\psi(S) > 0$ — некоторая функция такая, что $\psi(S)S^{-1} \rightarrow 0$ при $S \rightarrow \infty$. Таким образом, $\sqrt{2\varepsilon_S/\lambda} = \psi(S)S^{-1}$ и

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= 1 \pm \psi(S)S^{-1} + O(\psi^2(S)S^{-2}), \\ b(z_{1,2}) &= 1 \pm \frac{\sqrt{\lambda}}{\beta} \psi(S)S^{-1} + \beta^{-1} O(\psi^2(S)S^{-2}). \end{aligned}$$

Приводимые ниже вычисления показывают, что асимптотика $\mu_{[uS]}^V$ будет сильно зависеть от свойств функции ψ .

В случае *малых* случайных возмущений $\psi(S) \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \mu_{[uS]}^V &\sim \frac{\rho}{2} - \rho \frac{2(1-u)\psi(S) - 2u\psi(S)}{2 \cdot 2\psi(S)} + \beta^{-1} O(S^{-1}) \\ &\sim \frac{\rho}{2} + \rho \frac{2u-1}{2} = u\rho, \quad u \in (0, 1). \end{aligned}$$

Профиль имеет ламинарный характер.

В случае *сильных* случайных возмущений $\psi(S) \rightarrow \infty$

$$\mu_{[uS]}^V \sim \frac{\rho}{2} - \rho \frac{z_2^{(1-u)S} - z_2^{uS}}{2z_2^S} + \beta^{-1} O(S^{-1} \cdot \psi(S)e^{-\psi(S)}) \rightarrow \frac{\rho}{2} \quad \forall u \in (0, 1). \quad (26)$$

Здесь предельный профиль весьма далек от ламинарного. На самом деле, можно проверить, что предельный профиль здесь такой же, каким он был бы без граничных условий (формально, при $\beta = 0$), т.е. в предположении «свободных границ». Вывод: при сильных случайных возмущениях границы не оказывают влияния на внутренние слои. Это характерно для турбулентной фазы.

Случай, *разделяющий* указанные две фазы: $\psi(S) = \text{const}$. Для удобства обозначим $\psi(S) = K$, $K > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu_{[uS]}^V &\sim \frac{\rho}{2} - \rho \frac{(e^{K(1-u)} - e^{-K(1-u)}) - (e^{Ku} - e^{-Ku})}{2(e^K - e^{-K})} \\ &= \frac{\rho}{2} \left(1 + \frac{\text{sh}(K(u - 1/2))}{\text{sh}(K/2)} \right), \quad u \in (0, 1). \end{aligned}$$

В заключение заметим, что для асимптотики сильных возмущений (26) предположение $\psi(S)S^{-1} \rightarrow 0$ не является существенным. В частности, результат имеет место в важном случае $\varepsilon_S = \varepsilon$. Действительно, при этом z_2 не зависит от S , и, пользуясь явной формулой из леммы 3, при каждом $u \in (0, 1)$ мы получим

$$\mu_{[uS]}^V - \frac{\rho}{2} \sim \rho \frac{\text{const}}{b(z_2)z_2^{(1-\min(1-u,u))S}} \rightarrow 0 \quad (S \rightarrow \infty).$$

Заметим, что все предельные выражения не зависят от параметра β .

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. (Математика. Новое в зарубежной науке, в. 22.)
2. Chorin A. J., Marsden J. E. A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics. New York: Springer-Verlag, 1993, 169 p.
3. Marchioro C., Pulvirenti M. Mathematical Theory of Incompressible Non Viscous Fluids. New York: Springer-Verlag. 1994, 283 p.
4. Shiryaev A. On the classical, statistical, and stochastic approaches to the hydrodynamic turbulence. Research Report №2. Aarhus: Thiele Centre for Applied Mathematics in Natural Science, 2007.
5. Колмогоров А. Н. Математические модели турбулентного движения несжимаемой вязкой жидкости. — Успехи матем. наук, 2004, т. 59, №1, с. 5–10.
6. Мешалкин Л. Д., Синай Я. Г. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости. — Прикл. матем. и мех., 1965, т. 25, с. 1140–1143.
7. Ландау Л. Д., Ахиезер А. И., Лифшиц Е. М. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. М.: Наука, 1966, 384 с.
8. Лигgett Т. Марковские процессы с локальным взаимодействием. М.: Мир, 1989, 550 с.
9. Kipnis C., Landim C. Scaling Limits of Interacting Particle Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1999, 442 p.
10. Spohn H. Large Scale Dynamics of Interacting Particles. Berlin: Springer-Verlag. 1991, 342 p.
11. Esposito R., Marra R., Yau H. T. Navier–Stokes equations for stochastic particle systems on the lattice. — Comm. Math. Phys., 1996, v. 182, №2, p. 395–456.
12. Ignatyuk I. A., Malyshev V. A., Molchanov S. A. Moment-closed processes with local interaction. — Selecta Math. Soviet., 1989, v. 8, №4, p. 351–384.
13. Méléard S. Monte-Carlo approximations for 2d Navier–Stokes equations with measure initial data. — Probab. Theory Related Fields, 2001, v. 121, №3, p. 367–388.
14. Fontbona J. A probabilistic interpretation and stochastic particle approximations of the 3-dimensional Navier–Stokes equations. — Probab. Theory Related Fields, 2006, v. 136, №1, p. 102–156.
15. Golinelli O., Mallick K. Derivation of a matrix product representation for the asymmetric exclusion process from algebraic Bethe ansatz. — J. Phys. A., 2006, v. 39, №34, p. 10647–10658.
16. Derrida B., Lebowitz J. L., Speer E. R. Entropy of open lattice systems. — J. Statist. Phys., 2006, v. 126, №4/5, p. 1083–1108.

Поступила в редакцию
27.XI.2007

Исправленный вариант
30.III.2008