Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Розовский, Большие отклонения типа Чернова для сумм со случайной нормировкой, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 4, 810–817

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2468>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 09:49:43

© 2008 г.

РОЗОВСКИЙ Л. В.

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ТИПА ЧЕРНОВА ДЛЯ СУММ СО СЛУЧАЙНОЙ НОРМИРОВКОЙ¹⁾

В заметке изучаются вероятности больших уклонений типа Чернова для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин со случайной нормировкой, в том числе самонормированных сумм.

Ключевые слова и фразы: независимые случайные величины, теорема Чернова, самонормированные суммы, большие уклонения.

1. Введение. Пусть случайные величины $\{X_i\}_{i \geq 1}$ являются независимыми копиями случайной величины X . Положим $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \geq 1$.

Приведем классический результат, принадлежащий Г. Чернову [1] (см. также [2, теорема 3.1]).

Теорема 1. *Выполнено соотношение*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{P} \{S_n \geq 0\}]^{1/n} = \inf_{t \geq 0} \mathbf{E} e^{tX}. \quad (1)$$

Изучая большие уклонения самонормированных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, К.-М. Шао [3] доказал следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $p > 1$ и $V_{np} = (n^{-1} \sum_{i=1}^n |X_i|^p)^{1/p}$. Предположим, что*

$$\mathbf{E} X \geq 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{E} |X|^p < \infty. \quad (2)$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\mathbf{P} \left\{ \frac{S_n}{V_{np}} \geq xn \right\} \right]^{1/n} = \sup_{c \geq 0} \inf_{t \geq 0} \mathbf{E} \exp \left(t \left(cX - \frac{x}{p} |X|^p - x \left(1 - \frac{1}{p} \right) c^{p/(p-1)} \right) \right) \quad (3)$$

при $x > \mathbf{E} X / (\mathbf{E} |X|^p)^{1/p}$, где $\mathbf{E} X / (\mathbf{E} |X|^p)^{1/p} = 0$, если $\mathbf{E} |X|^p = \infty$.

В заметке доказаны утверждения, которые уточняют и обобщают теорему 2. Нами рассматривается последовательность независимых одинаково распределенных случайных пар (X_i, Y_i) , $i \geq 1$, в которых неотрицательная координата Y_i в некотором смысле мажорирует X_i . Изучены два случая (теоремы 5 и 6 соответственно). В первом из них S_n нормируется величиной nM_n , где $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} Y_i$. При $Y_i = |X_i|$, как следствие теоремы 5, получаем обобщение результата Шао на случай $p = \infty$.

Теорема 3. *При $x \geq 0$ ($u V_{n\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |X_i|$)*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{P} \{S_n \geq xn V_{n\infty}\}]^{1/n} = \sup_{v \geq 0} \inf_{t \geq 0} e^{-txv} \mathbf{E} e^{tX} \mathbf{1}[|X| \leq v]. \quad (4)$$

Отметим, что при $x = 0$ соотношения (4) и (1) идентичны. Действительно,

$$\begin{aligned} \sup_{v \geq 0} \inf_{t \geq 0} \mathbf{E} e^{tX} \mathbf{1}[|X| \leq v] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{t \geq 0} \mathbf{E} e^{tX} \mathbf{1}[|X| \leq n] \\ &= \inf_{t \geq 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} e^{tX} \mathbf{1}[|X| \leq n] = \inf_{t \geq 0} \mathbf{E} e^{tX} \end{aligned}$$

(см. [1, лемма 4], а также [4, гл. 4, § 2]).

Во втором случае нормировка осуществляется величиной $nf((Y_1 + \dots + Y_n)/n)$, где $f(y)$, $y > 0$, принадлежит некоторому классу положительных вогнутых функций, содержащему, в частности, функции y^r , $0 < r < 1$. Формула, описывающая «предельный вид» больших уклонений, зависит от $f(y)$. Соответствующее следствие теорем 6 и 7 при $Y_i = |X_i|^p$, $f(y) = y^{1/p}$ ($p > 1$) уточняет теорему 2 (сняты условие (2) и ограничения на x).

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-01-00179-а) и программы «Ведущие научные школы» (грант НШ-4222.2006.1).

Теорема 4. Пусть $p > 1$. В обозначениях теоремы 2 при $x \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{P} \{S_n \geq xnV_{np}\}]^{1/n} = \max \left(\sup_{b>0} \inf_{t \geq 0} \mathbf{E} \exp \left(t \left(X - \frac{x}{p} b^{1-p} |X|^p - x \left(1 - \frac{1}{p} \right) b \right) \right), \mathbf{P} \{X = 0\} \right). \quad (5)$$

Заметим, что соотношение (5) (при $p > 1$) можно переписать в форме (3), а также что равенство (5) остается справедливым и при $p = 1$. Последнее, впрочем, не слишком интересно, поскольку имеет место следующий результат, который вытекает непосредственно из теоремы 1: при всех x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{P} \{S_n \geq xnV_n\}]^{1/n} = \inf_{t \geq 0} \mathbf{E} \exp(t(X - xY)).$$

В заключение отметим, что при проверке равенства (3) для вероятности $\mathbf{P} \{S_n \geq xnV_{np}\}$ в [3] строятся подходящие оценки снизу и сверху с последующим предельным переходом. Рассуждения, примененные при получении соотношений (4), (5) и их обобщений в настоящей работе, проводятся по аналогичной схеме, однако методика доказательств, особенно в части оценки сверху в теореме 5, использует другие идеи.

2. Результаты. Пусть (X, Y) , $Y \geq 0$, — некоторый случайный вектор, а $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$ являются его независимыми копиями. Положим $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $V_n = (Y_1 + \dots + Y_n)/n$, $n \geq 1$.

Теорема 5. Положим $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} Y_i$, $n \geq 1$. Если

$$X \leq AY + a \quad (\exists a, A > 0), \quad (6)$$

то при $x \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{P} \{S_n \geq xnM_n\}]^{1/n} = \sup_{v \geq 0} \inf_{t \geq 0} e^{-txv} \mathbf{E} e^{tX} \mathbf{1}[Y \leq v]. \quad (7)$$

Теорема 3 является следствием теоремы 5 при $Y = |X|$. Можно также положить $Y = |X + x_0|$ или, скажем, $Y = \max(X, 0)$.

Далее мы приведем еще одно обобщение теоремы 2. Для этого нам понадобятся дополнительные обозначения.

Пусть G обозначает класс выпуклых на $(0, \infty)$ функций $g(h)$ таких, что $g(\infty) = \lim_{h \rightarrow \infty} g(h) = 0$ и $0 < g(0) = \lim_{h \rightarrow 0} g(h) \leq \infty$.

Каждой функции $g \in G$ поставим в соответствие «сопряженную» функцию

$$f(y) = \inf_{h>0} (hy + g(h)), \quad y \geq 0. \quad (8)$$

Преобразование (8) является преобразованием типа Лежандра по отношению к $g(h)$ [5, § 26]. При этом $g(h) = \sup_{y>0} (f(y) - hy)$, $h > 0$.

Действительно, в силу (8) выполнено неравенство $f(y) \leq hy + g(h)$, $h > 0$, откуда следует, что $\tilde{g}(h) = \sup_{y>0} (f(y) - hy) \leq g(h)$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(h) &= g(h) + \sup_{y>0} \left(\inf_{t>0} (g(t) - g(h) - (-y)(t - h)) \right) \\ &\geq g(h) + \inf_{t>0} (g(t) - g(h) - \lambda(t - h)), \end{aligned}$$

где λ — тангенс угла наклона опорной прямой выпуклой функции $g(h)$ в точке h . Отсюда в силу свойств выпуклых функций (см. [4, гл. V, (8.5)]) получаем требуемую оценку снизу.

Несложно проверить, что функция $f(y)$ вогнута и не убывает, а функция $\bar{f}(y) = f(y)/y$ не возрастает при $y > 0$ и, кроме того,

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 0, & f(\infty) &= \lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = g(0), \\ \bar{f}(0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \bar{f}(y) = \sup \{h: g(h) > 0\} \leq \infty, & \bar{f}(\infty) &= \lim_{y \rightarrow \infty} \bar{f}(y) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Приведем несколько примеров функций $g(h)$ и соответствующих сопряженных к ним функций $f(y)$ (далее используется обозначение $x^+ = \max(x, 0)$):

- 1) $g(h) = (1-r)(r/h)^{r/(1-r)}$, $r \in (0, 1)$, и $f(y) = y^r$ ($g(0) = \infty$, $\bar{f}(0) = \infty$);
 - 2) $g(h) = (h - \ln h - 1) 1[h \leq 1]$ и $f(y) = \ln(1+y)$ ($g(0) = \infty$, $\bar{f}(0) = 1$);
 - 3) $g(h) = e^{1/c}(c-h)^+$, $c = (1 - \sqrt{(1-4h)^+})/2$, и $f(y) = y/\max(2, \ln y)$ ($g(0) = \infty$, $\bar{f}(0) = 1/2$);
 - 4) $g(h) = (1-h^r)^+$, $r \in (0, 1]$, и $f(y) = y$, $0 < y \leq r$; $f(y) = 1 - (1-r)(r/y)^{r/(1-r)}$, $y > r$ ($g(0) = 1$, $\bar{f}(0) = 1$);
 - 5) $g(h) = e^{-h}$ и $f(y) = y \ln(e/y)$, $0 < y \leq 1$; $f(y) = 1$, $y > 1$ ($g(0) = 1$, $\bar{f}(0) = \infty$).
- Пусть $g \in G$, а f определена формулой (8).

Теорема 6. Предположим, что при любых положительных t и ε

$$\mathbf{E} e^{t(X-\varepsilon Y)} < \infty \quad (10)$$

и, кроме того,

$$g(0) < \infty \quad \text{или} \quad \mathbf{E} e^{tX} < \infty \quad (\exists t > 0). \quad (11)$$

Тогда при $x \geq 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{P}\{S_n \geq xnf(V_n)\}]^{1/n} \\ &= \max \left(\inf_{t \geq 0} \mathbf{E} e^{tX} 1[Y = 0], \sup_{h \geq 0} \inf_{t \geq 0} \mathbf{E} e^{t(X-xhY-xg(h))} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь предполагается, что $\inf_{t \geq 0} \mathbf{E} e^{t(X-xg(0))} = 0$, если $g(0) = \infty$.

Условие (10) удовлетворяется, когда $\mathbf{E} e^{tX} < \infty$ ($\forall t > 0$) или когда $X \leq aY + c$ ($\forall a > 0 \exists c > 0$) (как в случае $Y = |X + x_0|^p$ или $Y = (X^+)^p$, где постоянная p строго больше 1).

Рассмотрим теперь частный случай ситуации, при которой условие (11) не выполняется (более общий, имеющий предварительный характер, результат содержит лемма из п. 4).

Пусть $p > 1$, а функция $\tau(y)$ удовлетворяет условиям

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{\tau(y)}{y} < \infty \quad \text{и} \quad \liminf_{y \rightarrow \infty} \tau(y) > 0.$$

Теорема 7. Предположим, что

$$\liminf_{h \rightarrow 0} g(h)h^{1/(p-1)} > 0 \quad (13)$$

(или, равносильно, $\liminf_{y \rightarrow \infty} f(y)/y^{1/p} > 0$) и при некотором положительном k

$$\mathbf{E} e^{t\tau(X)} 1[X > k] < \infty \quad (\forall t > 0), \quad (14)$$

$$Y \geq A \frac{X^p}{\tau^{p-1}(X)} 1[X > k] \quad (\exists A > 0). \quad (15)$$

Тогда при $x \geq 0$ справедливо соотношение (12).

Заметим, что если в (13)

$$\liminf_{h \rightarrow 0} g(h)h^{1/(p-1)} = \infty, \quad \text{или} \quad \liminf_{y \rightarrow \infty} \frac{f(y)}{y^{1/p}} = \infty,$$

то в условии (14) достаточно предполагать, что $\mathbf{E} e^{t\tau(X)} 1[X > k] < \infty$ ($\exists t > 0$).

Отметим также, что в случае $\limsup_{y \rightarrow \infty} \tau(y) < \infty$ условие (14) всегда выполняется.

Теорема 4 вытекает из теорем 6 и 7 при $Y = |X|^p$, $f(y) = y^{1/p}$ и $\tau(y) = 1$, $y > 0$.

3. Доказательство теоремы 5.

Оценка снизу. Пусть $v \geq 0$ и $x > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \mathbf{P}\{S_n \geq xnM_n\} \geq \mathbf{P}\{S_n \geq xnM_n, M_n \leq v\} \\ &\geq P_n(x, v) = \mathbf{P}\{S_n \geq xnv, M_n \leq v\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Следовательно,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(x)^{1/n} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{v \geq 0} P_n(x, v)^{1/n} \geq \sup_{v \geq 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(x, v)^{1/n}. \quad (17)$$

По теореме 1

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(x, v)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x, v)^{1/n} = \inf_{t \geq 0} M_v(t, x),$$

где

$$M_v(t, x) = e^{-txv} \mathbf{E} e^{tX} \mathbf{1}[Y \leq v], \quad (18)$$

откуда

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{P}\{S_n \geq xnM_n\}]^{1/n} \geq \sup_{v \geq 0} \inf_{t \geq 0} e^{-txv} \mathbf{E} e^{tX} \mathbf{1}[Y \leq v]. \quad (19)$$

Оценка сверху. Согласно (1),

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \mathbf{P}\left\{S_n \geq xnM_n, \bigcup_{i=1}^n \{M_n = Y_i\}\right\} \\ &\leq n \mathbf{P}\{S_{n-1} \geq xnM_n - X_n, M_{n-1} \leq Y_n\} \\ &\leq n \mathbf{P}\{S_{n-1} \geq xnY_n - AY_n - a, M_{n-1} \leq Y_n\} \\ &\leq n \sup_{v \geq 0} \mathbf{P}\{S_{n-1} \geq (xn - A)v - a, M_{n-1} \leq v\} \\ &\leq n \sup_{v \geq 0} \left(\inf_{t \geq 0} \exp\left(-t \frac{(xn - A)v - a}{n - 1}\right) \mathbf{E} e^{tX} \mathbf{1}[Y \leq v] \right)^{n-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Из (20) следует, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(x)^{1/(n-1)} \leq \max_{i=1,2,3} \limsup_{n \rightarrow \infty} I_{n,i}(\varepsilon), \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} I_{n,1}(\varepsilon) &= \sup_{0 \leq v < \varepsilon} \inf_{t \geq 0} \exp\left(t \frac{a}{n-1}\right) \mathbf{E} e^{tX} \mathbf{1}[Y \leq v], \\ I_{n,2}(\varepsilon) &= \sup_{\varepsilon \leq v \leq 1/\varepsilon} \inf_{t \geq 0} \exp\left(-tv \frac{xn - A - a/\varepsilon}{n-1}\right) \mathbf{E} e^{tX} \mathbf{1}[Y \leq v], \\ I_{n,3}(\varepsilon) &= \sup_{v > 1/\varepsilon} \inf_{t \geq 0} \exp\left(-tv \frac{xn - A - a\varepsilon}{n-1}\right) \mathbf{E} e^{tX} \mathbf{1}[Y \leq v]. \end{aligned}$$

Положим $f_\varepsilon(\delta) = \inf_{t \geq 0} e^{-t\delta} \mathbf{E} e^{tX} \mathbf{1}[Y \leq \varepsilon]$. Эта функция при всех δ является невозрастающей и непрерывной слева (см. [1, доказательство леммы 6]). Отсюда при $\delta_n = -a/(n-1)$ получаем

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} I_{n,1}(\varepsilon) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} f_\varepsilon(\delta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_\varepsilon(\delta_n) \\ &= f_\varepsilon(-0) = f_\varepsilon(0) = \inf_{t \geq 0} \mathbf{E} e^{tX} \mathbf{1}[Y \leq \varepsilon]. \end{aligned} \quad (22)$$

Далее, в силу (6) при любом $c \geq a$ и $y > 0$

$$\begin{aligned} M_v(t, y) &= e^{-tvy} \mathbf{E} e^{tX} (\mathbf{1}[X \leq c, Y \leq v] + \mathbf{1}[X > c, Y \leq v]) \\ &\leq e^{-tvy} (e^{tc} + \mathbf{E} e^{tAY} \mathbf{1}[Y \leq v]) \leq e^{-tvy} (e^{tc} + e^{tAv} R(c)), \end{aligned}$$

где $R(c) = \mathbf{P}\{X \geq c\}$, а $M_v(t, y)$ определено в (18). При $c = yv/2 \geq a$ отсюда следует неравенство

$$\inf_{t \geq 0} M_v(t, y) \leq 2R(yv/2)^{y/(2A)},$$

и, таким образом, при любом $\varepsilon < x/(2A)$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} I_{n,3}(\varepsilon) \leq 2R\left(\frac{x}{2\varepsilon}\right)^{x/(2A)}. \quad (23)$$

Теперь займемся $I_{n,2}(\varepsilon)$. Обозначим $\delta_n = (A - x + a/\varepsilon)/(n - 1)$, $\overline{M}_v(y) = \inf_{t \geq 0} M_v(t, y)$. Без потери общности полагая $\delta_n > 0$ и имея в виду, что последовательность $m_n(\varepsilon) = \sup_{\varepsilon \leq v \leq 1/\varepsilon} \overline{M}_v(x - \delta_n)$ не возрастает, находим

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} I_{n,2}(\varepsilon) = \limsup_{n \rightarrow \infty} m_n(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n(\varepsilon) = \liminf_{n \rightarrow \infty} m_n(\varepsilon).$$

Поскольку $m_n(\varepsilon) \leq \varepsilon + \overline{M}_{v_n}(x - \delta_n)$ ($\exists v_n: \varepsilon \leq v_n \leq 1/\varepsilon$), то

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} m_n(\varepsilon) \leq \varepsilon + \liminf_{n \rightarrow \infty} \overline{M}_{v_n}(x - \delta_n).$$

Выберем $v' = v_{n_k} \rightarrow v_0 \in [\varepsilon, 1/\varepsilon]$. Без потери общности можно считать, что подпоследовательность v' монотонна. Положим $\delta' = \delta_{n_k}$.

Если $v' \nearrow v_0$, то

$$\overline{M}_{v'}(x - \delta') \leq \inf_{t \geq 0} e^{-tv'(x-\delta')} \mathbf{E} e^{tX} \mathbf{1}[Y \leq v_0] = \overline{M}_{v_0}(x - \delta''),$$

где $\delta'' = \delta' + (x - \delta')(v_0 - v')/v_0 \searrow 0$. Поэтому, так же как в (22),

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \overline{M}_{v_n}(x - \delta_n) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \overline{M}_{v'}(x - \delta') \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \overline{M}_{v_0}(x - \delta'') = \overline{M}_{v_0}(x).$$

Таким образом,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} I_{n,2}(\varepsilon) \leq \varepsilon + \overline{M}_{v_0}(x) \leq \varepsilon + \sup_{\varepsilon \leq v \leq 1/\varepsilon} \overline{M}_v(x). \quad (24)$$

Пусть теперь $v' \searrow v_0$. Так же как в [1, (4.16)], найдется конечное t' такое, что $\overline{M}_{v_0}(x) \geq M_{v_0}(t', x) - \varepsilon$. Тогда в силу (6)

$$\begin{aligned} \overline{M}_{v'}(x - \delta') &\leq e^{-t'v_0(x-\delta')} (\mathbf{E} e^{t'X} \mathbf{1}[Y \leq v_0] + e^{t'(a+Av')} \mathbf{E} \mathbf{1}[v_0 < Y \leq v']) \\ &= e^{t'v_0\delta'} M_{v_0}(t', x) + e^{t'(a+Av'-v_0(x-\delta'))} \mathbf{P}\{v_0 < Y \leq v'\}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекают соотношения

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \overline{M}_{v_n}(x - \delta_n) \leq M_{v_0}(t', x) \leq \varepsilon + \overline{M}_{v_0}(x)$$

и, аналогично предыдущему случаю, оценка (24).

Из (21)–(23) и (24) получим при всех достаточно малых положительных ε

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(x)^{1/(n-1)} \leq \max \left(f_\varepsilon(0), \varepsilon + \sup_{0 < v < \infty} \overline{M}_v(x), 2R\left(\frac{x}{2\varepsilon}\right)^{x/(2A)} \right). \quad (25)$$

Выберем теперь конечное t' так, чтобы $f_0(0) \geq \mathbf{E} e^{t'X} \mathbf{1}[Y = 0] - \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(0) &\leq \mathbf{E} e^{t'X} \mathbf{1}[Y = 0] + \mathbf{E} e^{t'X} \mathbf{1}[0 < Y \leq \varepsilon] \\ &\leq \varepsilon + f_\varepsilon(0) + e^{t'(a+\varepsilon A)} \mathbf{P}\{0 < Y \leq \varepsilon\}. \end{aligned} \quad (26)$$

В силу произвольной малости ε , (25) и (26) приводят к соотношению

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(x)^{1/(n-1)} \leq \max \left(f_0(0), \sup_{0 < v < \infty} \overline{M}_v(x) \right) = \sup_{0 \leq v < \infty} \overline{M}_v(x),$$

откуда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(x)^{1/n} \leq \sup_{0 \leq v < \infty} \overline{M}_v(x). \quad (27)$$

Теорема 5 при $x > 0$ следует из (19) и (27), а при $x = 0$ из (1).

4. Доказательство теорем 6 и 7. Пусть $g \in G$, а f определена формулой (8), $x > 0$. Положим

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \mathbf{P}\{S_n \geq xnf(V_n)\}; \\ P_{(0,\infty)} &= \sup_{h>0} \inf_{t \geq 0} \mathbf{E} e^{t(X-xhY-xg(h))}, \quad P_\infty = \inf_{t \geq 0} \mathbf{E} e^{tX} \mathbf{1}[Y=0]; \\ P_0 &= \inf_{t \geq 0} \mathbf{E} e^{t(X-xg(0))}, \text{ если } g(0) < \infty, \text{ и } P_0 = 0, \text{ если } g(0) = \infty; \\ \bar{P} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\mathbf{P}\left\{S_n \geq xn \inf_{0 < h < \varepsilon} (hV_n + g(h))\right\} \right]^{1/n}; \\ \underline{P} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\mathbf{P}\left\{S_n \geq xn \inf_{0 < h < \varepsilon} (hV_n + g(h))\right\} \right]^{1/n}. \end{aligned}$$

Лемма. *Имеют место неравенства*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(x)^{1/n} \geq \max(P_0, P_{(0,\infty)}, P_\infty, \underline{P}), \quad (28)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(x)^{1/n} \leq \max(P_0, P_{(0,\infty)}, P_\infty, \bar{P}). \quad (29)$$

Доказательство леммы. *Оценка снизу.* Имеем:

$$\begin{aligned} P_n(x) &\geq \mathbf{P}\{S_n \geq xnf(\infty)\} = \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^n (X_i - xg(0)) \geq 0\right\} \\ &\quad (f(\infty) = g(0) < \infty); \\ P_n(x) &\geq \mathbf{P}\{S_n \geq xnf(0), V_n = 0\} = \mathbf{P}\left\{S_n \geq 0, \bigcap_{i=1}^n \{Y_i = 0\}\right\}; \\ P_n(x) &= \mathbf{P}\left\{S_n \geq xn \inf_{h>0} (hV_n + g(h))\right\} \\ &\geq \sup_{h>0} \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^n (X_i - xhY_i - xg(h)) \geq 0\right\}; \\ P_n(x) &\geq \mathbf{P}\left\{S_n \geq xn \inf_{0 < h < \varepsilon} (hV_n + g(h))\right\}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Оценка (28) следует из (30) и теоремы 1.

Оценка сверху. Пусть $0 < \varepsilon < 1$ и $\delta = \bar{f}(\varepsilon) - \varepsilon > 0$. Тогда

$$P_n(x) \leq I_1 + I_2 + I_3, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathbf{P}\left\{S_n \geq xn \inf_{0 < h < \varepsilon} (hV_n + g(h))\right\}, \\ I_2 &= \mathbf{P}\left\{S_n \geq xn \inf_{h > \bar{f}(\varepsilon)} (hV_n + g(h))\right\}, \\ I_3 &= \mathbf{P}\left\{S_n \geq xn \inf_{\varepsilon \leq h \leq \bar{f}(\varepsilon)} (hV_n + g(h))\right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Имеем:

$$I_2 \leq \mathbf{P}\{S_n \geq xn\bar{f}(\varepsilon)Y\} \leq \left(\inf_{t \geq 0} \mathbf{E} e^{t(X-x\bar{f}(\varepsilon)Y)}\right)^n = \mu^n(\varepsilon); \quad (33)$$

$$I_3 = \mathbf{P}\left\{\sup_{\varepsilon \leq h \leq \bar{f}(\varepsilon)} \sum_{i=1}^n (X_i - xhY_i - xg(h)) \geq 0\right\}. \quad (34)$$

Оценим I_3 . Для $k = 0, 1, \dots, n$ положим $h_k = \varepsilon + k\delta/n$, $\Delta_n = \max_{0 \leq k < n} (g(h_k) - g(h_{k+1}))$ (заметим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = 0$). В силу (34) имеем:

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \sum_{0 \leq k < n} \mathbf{P} \left\{ \sup_{h_k \leq h \leq h_{k+1}} \sum_{i=1}^n (X_i - xhY_i - xg(h)) \geq 0 \right\} \\ &\leq n \max_{0 \leq k < n} \mathbf{P} \left\{ \sum_{i=1}^n (X_i - xh_k Y_i - xg(h_{k+1})) \geq 0 \right\} \\ &\leq n \max_{1 \leq k \leq n} \mathbf{P} \left\{ \sum_{i=1}^n (X_i - xh_k Y_i - xg(h_k) + x\Delta_n) \geq 0 \right\} \\ &\leq n \sup_{\varepsilon \leq h \leq \bar{f}(\varepsilon)} \mathbf{P} \left\{ \sum_{i=1}^n (X_i - xhY_i - xg(h) + x\Delta_n) \geq 0 \right\} \\ &\leq n \left(\sup_{\varepsilon \leq h \leq \bar{f}(\varepsilon)} \inf_{t \geq 0} \mathbf{E} e^{t(X - xhY - xg(h) + x\Delta_n)} \right)^n = n\beta_n^n. \end{aligned} \quad (35)$$

Из (31)–(35) следует

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(x)^{1/n} &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (\mu^n(\varepsilon) + I_1 + n\beta_n^n)^{1/n} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} 3^{1/n} \max(\mu(\varepsilon), I_1^{1/n}, n^{1/n}\beta_n) \\ &= \max \left(\mu(\varepsilon), \bar{P}(\varepsilon), \tau(\varepsilon), \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \right), \end{aligned} \quad (36)$$

где $\bar{P}(\varepsilon) = \limsup_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{P} \{S_n \geq xn \inf_{0 < h < \varepsilon} (hV_n + g(h))\}]^{1/n}$.

Обозначим $Z(h) = X - xhY - xg(h)$, $h > 0$, и пусть $M(h) = \inf_{t \geq 0} \mathbf{E} e^{tZ(h)}$.

Предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ существует (и больше или равен $\sup_{\varepsilon \leq h \leq \bar{f}(\varepsilon)} M(h)$). Следовательно, найдется растущая к бесконечности подпоследовательность n' такая, что при фиксированном $\varepsilon' > 0$ выполнено $h_{n'} \rightarrow h_0 \in [\varepsilon, \bar{f}(\varepsilon)]$ и

$$\beta_{n'} \leq \varepsilon' + M_{n'}(h_{n'}), \quad (37)$$

где $M_{n'}(h_{n'}) = \inf_{t \geq 0} \mathbf{E} e^{t(Z(h_{n'}) + x\Delta_{n'})}$.

В силу условия (9) и принципа мажорируемой сходимости (см. [4, гл. 4, § 2])

$$\begin{aligned} \lim_{n'} M_{n'}(h_{n'}) &\leq \inf_{t \geq 0} \lim_{n'} \mathbf{E} e^{t(Z(h_{n'}) + x\Delta_{n'})} \\ &= \inf_{t \geq 0} \mathbf{E} \lim_{n'} e^{t(Z(h_{n'}) + x\Delta_{n'})} = M(h_0) \leq \sup_{\varepsilon \leq h \leq \bar{f}(\varepsilon)} M(h). \end{aligned} \quad (38)$$

Из (38) и (37) в силу произвольности ε' следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \sup_{\varepsilon \leq h \leq \bar{f}(\varepsilon)} M(h) \leq \sup_{0 < h < \infty} M(h). \quad (39)$$

Теперь, устремляя в (36) ε к нулю, аналогично (38) получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(\varepsilon) \leq \inf_{t \geq 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} e^{t(X - x\bar{f}(\varepsilon)Y)} = \inf_{t \geq 0} \mathbf{E} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{t(X - x\bar{f}(\varepsilon)Y)} = \tilde{P}, \quad (40)$$

где $\tilde{P} = \inf_{t \geq 0} \mathbf{E} e^{t(X - x\bar{f}(0)Y)} \leq \sup_{0 < h < \infty} M(h)$, когда $\bar{f}(0) < \infty$ (см. (9)), и $\tilde{P} = P_\infty$ в противном случае.

Оценка (29) следует из (36), (39), (40). Лемма доказана.

Проверим теорему 6. При $x = 0$ соотношение (12) вытекает из теоремы 1.

Пусть $x > 0$. Если $g(0) < \infty$, то

$$P \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{P} \{S_n \geq xng(0)\}]^{1/n} = \inf_{t \geq 0} \mathbf{E} e^{t(X - xg(0))}$$

и

$$\begin{aligned}\bar{P} &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{P} \{S_n \geq xng(\varepsilon)\}]^{1/n} \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{t \geq 0} \mathbf{E} e^{t(X-xg(\varepsilon))} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{t \geq 0} e^{tx(g(0)-g(\varepsilon))} \mathbf{E} e^{t(X-xg(0))} = \inf_{t \geq 0} \mathbf{E} e^{t(X-xg(0))},\end{aligned}$$

аналогично (22). Применяя лемму, отсюда получим (12).

Пусть теперь $g(0) = \infty$ и $\mathbf{E} e^{t_0 X} < \infty$, $t_0 > 0$. Тогда

$$\bar{P} \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} e^{t_0(X-xg(\varepsilon))} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-t_0 xg(\varepsilon)} \mathbf{E} e^{t_0 X} = 0.$$

Используя лемму, отсюда снова получим (12).

Теорема 6, таким образом, полностью доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 7. Мы покажем, что в ее условиях $\bar{P} = 0$, а далее воспользуемся леммой. При $k = xg(\varepsilon)$, где положительное ε достаточно мало, положив $\bar{S}_n = \sum_{i=1}^n X_i \mathbf{1}[X_i > k]$, найдем

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \left\{ S_n \geq xn \inf_{0 < h < \varepsilon} (hV_n + g(h)) \right\} &\leq \mathbf{P} \left\{ S_n \geq xn \max(g(\varepsilon), f(V_n)) \right\} \\ &\leq \mathbf{P} \left\{ \bar{S}_n \geq xn f(V_n)/2 \right\}.\end{aligned}\quad (41)$$

Далее, аналогично [3, с. 289], по неравенству Гёльдера

$$\bar{S}_n \leq \left(\sum_{i=1}^n \frac{X_i^p}{\tau(X_i)^{p-1}} \mathbf{1}[X_i > k] \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n \tau(X_i) \mathbf{1}[X_i > k] \right)^{(p-1)/p}.\quad (42)$$

Из (41), (42) и условий (13), (15) следует, что

$$\mathbf{P} \left\{ S_n \geq xn \inf_{0 < h < \varepsilon} (hV_n + g(h)) \right\} \leq \mathbf{P} \left\{ \sum_{i=1}^n \tau(X_i) \mathbf{1}[X_i > k] \geq \delta n \right\}$$

при некотором положительном δ , не зависящем от n и ε .

Отсюда, воспользовавшись условием (14), заключаем, что

$$\bar{P} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{t \geq 0} \mathbf{E} e^{t(\tau(X) \mathbf{1}[X > k] - \delta)} = 0$$

(выбираем t так, чтобы $e^{-t\delta}$ было мало, и k так, чтобы выполнялось неравенство $\mathbf{E} e^{t\tau(X)} \mathbf{1}[X > k] \leq 1$).

Замечание к теореме 7 проверяется аналогично.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chernoff H. A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations. — Ann. Math. Statist., 1952, v. 23, № 4, p. 493–507.
2. Bahadur R. R. Some Limit Theorems in Statistics. Philadelphia: SIAM, 1971, 42 p.
3. Shao Q.-M. Self-normalized large deviations. — Ann. Probab., 1997, v. 25, № 1, p. 285–328.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 751 с.
5. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973, 469 с.

Поступила в редакцию
27.IX.2006

Исправленный вариант
6.II.2008