Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. К. Фахрутдинова, Об условиях вырождения ветвящихся процессов в случайной среде с зависящим от состояния размножением, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 4, 818–822

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2469>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:41:43

© 2008 г.

ФАХРУТДИНОВА Т. К.*

ОБ УСЛОВИЯХ ВЫРОЖДЕНИЯ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ С ЗАВИСЯЩИМ ОТ СОСТОЯНИЯ РАЗМНОЖЕНИЕМ

В работе изучаются условия вырождения, зависящего от состояния ветвящегося процесса в случайной среде. Исследование основано на применении критерия Керстинга для моделей роста к логарифму ветвящегося процесса.

Ключевые слова и фразы: ветвящийся процесс, зависимость от состояния, случайная среда, моментное неравенство для сумм.

1. Введение. Рассмотрим семейство вероятностных производящих функций $f(s; y, m)$, зависящее от действительного параметра y и целого неотрицательного m , и «случайную среду» $\bar{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (н.о.р. с.в.) с распределением вероятностей μ , заданных на некотором измеримом пространстве $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$. Ветвящийся процесс в случайной среде с размножением, зависящим от состояния, зададим рекуррентно:

$$Z_0 = 1, \quad Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \zeta_{in}(Z_n)$$

(где сумма по пустому множеству индексов полагается нулевой), предполагая, что при условии $Z_k, \eta_k, k = 1, \dots, n$, случайные величины $\zeta_{in}(Z_n), i = 1, \dots, Z_n$, независимы и одинаково распределены с производящими функциями $f(s; \eta_n, Z_n)$, а для различных n последовательности $\{\zeta_{in}(m), i = 1, \dots, m\}$ условно независимы. Иначе говоря, Z_n есть марковская цепь с вероятностями перехода $p_{ij} := \mathbf{E} p_j(\eta, i), i, j \in \mathbf{Z}^+$, где $p_j(y, i)$ есть j -й коэффициент в разложении функции $(f(s; y, i))^i$ в степенной ряд, η — общее обозначение для с.в. η_n . В настоящей работе находятся условия, при которых происходит п.н. поглощение процесса Z_n в состоянии 0 или, напротив, процесс с положительной вероятностью уходит на бесконечность. Для этого к процессу $X_n := \ln Z_n$ применяется критерий возвратности и невозвратности Керстинга [1], основанный на асимптотике функции

$$h(x) := 2x \frac{\mathbf{E}(\Delta X_n | X_n = x)}{\mathbf{D}(\Delta X_n | X_n = x)}, \quad \text{где } \Delta X_n = X_{n+1} - X_n. \quad (1)$$

Если $\limsup_{x \rightarrow \infty} h(x) < 1$, то при некоторых дополнительных ограничениях процесс X_n п.н. возвращается в заданную ограниченную окрестность нуля, а если $\liminf_{x \rightarrow \infty} h(x) > 1$, то он с положительной вероятностью стремится к бесконечности. Вывод асимптотики условных моментов приращений ΔX_n , входящих в (1), основан на следующих соображениях. В предположении $0 < f'(1; \eta, m) < \infty$ п.н., $m = 1, 2, \dots$, имеем: $\mathbf{E}(Z_{n+1} | \eta_n, Z_n) = Z_n f'(1; \eta_n, Z_n)$, а при условии $Z_n = m, \eta_n$

$$\frac{Z_{n+1}}{m} \longrightarrow f'(1; \eta_n, m) \equiv \mathbf{E}(\zeta_{in}(m) | \eta_n) \quad \text{п.н. при } m \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Можно ожидать, что поведение переходных вероятностей марковской цепи X_n в окрестности бесконечно удаленной точки фазового пространства будет близко к таковому для марковской цепи Y_n , заданной рекуррентным соотношением

$$Y_{n+1} = Y_n + \ln f'(1; \eta_n, e^{Y_n}), \quad (3)$$

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы 1, 119992 Москва, Россия; e-mail: fakhrutdinova@mail.ru

а это поведение (с точностью до граничных условий в нуле) является определяющим для возвратности или невозвратности процесса. В работе [2] показано, что имеет место следующее соотношение:

$$h(x) \sim \tilde{h}(x) := 2x \frac{\mathbf{E}(\Delta Y_n | Y_n = x)}{\mathbf{D}(\Delta Y_n | Y_n = x)} \quad \text{при } x \rightarrow \infty; \quad (4)$$

здесь и далее символ $\sim$ обозначает, что отношение соединенных им величин стремится к 1. Тем самым, критерий возвратности и невозвратности выражен через исходные данные модели. Наиболее ограничительным предположением, при котором в [2] выведена эквивалентность (4), является конечность моментов $\mathbf{E}|\zeta_{in}(m)|^{2+\delta}$, $\delta > 0$. В настоящей работе это условие заменяется требованием конечности моментов $\mathbf{E}\varphi(\zeta_{in}(m))$, где

$$\varphi(x) = |x| \ln^{3+\delta}(|x| + e^{2+\delta}), \quad \delta > 0. \quad (5)$$

Это предположение, как видно, близко к требованию $\mathbf{E}|\zeta_{in}(m)| < \infty$, которое, ввиду соотношения (2), лежит в основе применяемого подхода. В наших рассуждениях существенную роль выполняет следующее обобщение неравенства Бара-Эссеена.

Теорема 1 [3]. Пусть функция $H(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, слабо выпукла, т.е. удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $H(x)$ — выпуклая четная функция;
- 2) $H(0) = 0$ и $H(x)$ не убывает на $(0, +\infty)$;
- 3) $H(x)$ дифференцируема всюду, кроме, быть может, точки $x = 0$, в которой предел $\lim_{x \rightarrow +0} H'(x) = H'(+0)$ существует (и, в силу выпуклости, конечен);
- 4) $H'(x)$ — вогнутая функция на $(0, +\infty)$.

Пусть последовательность $W_0 = 0, W_1, \dots, W_n$ является мартингалом и $X_k = W_k - W_{k-1}$, $k = 1, \dots, n$, обозначают соответствующие мартингал-разности. Если $\mathbf{E}H(X_k) < \infty$, $k = 1, \dots, n$, то

$$\mathbf{E}H(W_n) \leq 4 \sum_{k=1}^n \mathbf{E}H(X_k). \quad (6)$$

2. Предположения и результаты. Положим

$$\begin{aligned} X_n &:= L(Z_n), \quad \text{где } L(z) := \begin{cases} \ln z, & z > e, \\ e^{-1}z, & z \leq e, \end{cases} \\ \alpha_m(\eta) &:= f'(1; \eta, m) = \mathbf{E}\zeta_{in}(m), \quad \lambda_m(\eta) := \ln \alpha_m(\eta), \quad p = 2 + \delta, \quad \delta > 0, \\ \rho_m(\eta) &:= \mathbf{E} \left(|\zeta_{in}(m) - \alpha_m(\eta)| \ln^{p+1}(|\zeta_{in}(m) - \alpha_m(\eta)| + e^p) \right) \alpha_m(\eta)^{-1}. \end{aligned}$$

Как отмечено в работе [2], малые значения $\alpha_m(\eta)$ могут привести к вырождению процесса вне зависимости от других его характеристик. Поэтому далее рассматриваются моменты с.в., суженные на событие $\mathcal{A}_m(\eta) = \{\alpha_m(\eta)m > 2e\}$. Введем также события $\overline{\mathcal{A}}_m(\eta) = \{\alpha_m(\eta)m \leq 2e\}$.

Положим $\mathbf{E}_m X := \mathbf{E}(X | Z_n = m)$, $\hat{X} := X\chi(\mathcal{A}_m(\eta))$, где $\chi(A)$ есть индикатор события A , а в качестве X будут выступать различные связанные с процессом X_n величины. Далее предполагается, что для любого m

$$0 < \mathbf{D}\hat{\lambda}_m(\eta) < \infty, \quad \mathbf{E} \frac{\hat{\rho}_m(\eta)}{\ln(\alpha_m(\eta)m)} < \infty.$$

Следующие предположения соответствуют условиям Керстинга, если заменить приращение ΔX_n на его аппроксимацию $\ln f'(1; \eta_n, e^{X_n})$ (см. (3)):

$$\mathbf{E}|\hat{\lambda}_m(\eta) - \mathbf{E}\hat{\lambda}_m(\eta)|^p = O(1) \mathbf{D}(\hat{\lambda}_m(\eta))^{p/2}, \quad (\text{B1})$$

$$\mathbf{E} \hat{\lambda}_m(\eta) = o(1) \ln m, \quad (\text{B2a})$$

$$\mathbf{E} \hat{\lambda}_m(\eta) = O(1) \ln m (\ln \ln m)^{-\beta}, \quad \beta > \frac{2}{\delta}. \quad (\text{B2b})$$

Следующие условия обеспечивают необходимую точность приближения моментов приращений ΔX_n при условии $Z_n = m$ моментами с.в. $\hat{\lambda}_m(\eta)$:

$$\mathbf{E} \frac{\hat{\rho}_m(\eta)}{\ln^{p-1}(\alpha_m(\eta)m)} = o(1) \frac{\mathbf{D} \hat{\lambda}_m(\eta)}{\ln m}, \quad (\text{C1})$$

$$\ln m \cdot \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta)) = o(1) \frac{\mathbf{D} \hat{\lambda}_m(\eta)}{\ln m}, \quad (\text{C2})$$

$$\ln^p m \cdot \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta)) + \mathbf{E} \frac{\hat{\rho}_m(\eta)}{\ln(\alpha_m(\eta)m)} = O(1) (\mathbf{D} \hat{\lambda}_m(\eta))^{p/2}. \quad (\text{C3})$$

Следующие условия также призваны обеспечить применимость критерия Керстинга (ср. (B2a), (B2b)):

$$\mathbf{E} \frac{\hat{\rho}_m(\eta)}{\ln^p(\alpha_m(\eta)m)} + \ln m \cdot \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta)) = o(1) \ln m, \quad (\text{Da})$$

$$\mathbf{E} \frac{\hat{\rho}_m(\eta)}{\ln^p(\alpha_m(\eta)m)} + \ln m \cdot \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta)) = O(1) \frac{\ln m}{(\ln \ln m)^\beta}. \quad (\text{Db})$$

Теорема 2. В предположениях (A), (B1), (B2a), (C), (Da) имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m \Delta X_n &= \mathbf{E} \hat{\lambda}_m(\eta) + o(1) \frac{\mathbf{D} \hat{\lambda}_m(\eta)}{\ln m}, \\ \mathbf{E}_m \Delta X_n &= o(1) \ln m, \quad \mathbf{D}_m(\Delta X_n) \sim \mathbf{D} \hat{\lambda}_m(\eta), \\ \mathbf{E}_m |\Delta X_n - \mathbf{E}_m \Delta X_n|^p &= O(1) (\mathbf{D} \hat{\lambda}_m(\eta))^{p/2}, \end{aligned}$$

$$h(\ln m) \equiv \frac{2 \ln m \cdot \mathbf{E}_m(\Delta X_n)}{\mathbf{D}_m(\Delta X_n)} = \frac{2 \ln m \cdot \mathbf{E} \hat{\lambda}_m(\eta)}{\mathbf{D} \hat{\lambda}_m(\eta)} + o(1). \quad (7)$$

Если $\limsup_{m \rightarrow \infty} h(\ln m) < 1$, то выполнены все условия теоремы 1 работы [1] и, следовательно, $\mathbf{P}\{X_n \rightarrow 0\} = 1$. Если вместо (B2a), (Da) выполнены более жесткие предположения (B2b), (Db) и $\liminf_{m \rightarrow \infty} h(\ln m) > 1$, то $\mathbf{E}_m \Delta X_n = O(1) \ln m \cdot (\ln \ln m)^{-\beta}$, выполнены все условия теоремы 2 работы [1] и, следовательно, $\mathbf{P}\{X_n \rightarrow \infty\} > 0$, $\mathbf{P}\{X_n \rightarrow \infty \text{ или } X_n \rightarrow 0\} = 1$.

3. Оценки логарифмических моментов сумм случайных величин.

3.1. Суммы независимых одинаково распределенных случайных величин. Пусть $\{\zeta_1, \zeta_2, \dots\}$ — последовательность неотрицательных н.о.р. с.в. с конечным математическим ожиданием $\alpha := \mathbf{E} \zeta_1$. Положим $S_m = \sum_{k=1}^m \zeta_k$, $F_m(x) = \mathbf{P}\{S_m \leq x\}$, $F_m^0(y) = \mathbf{P}\{S_m - \alpha m \leq y\}$.

Лемма 1. При $\alpha m \geq 2e$, $m \geq 2$ имеют место неравенства:

$$\left| \int (L(x) - \ln(\alpha m)) dF_m(x) \right| \leq C_1 \alpha^{-1} \mathbf{E} \varphi(\zeta_1 - \alpha) (\ln(\alpha m))^{-p}, \quad (8)$$

$$\int (L(x) - \ln(\alpha m))^2 dF_m(x) \leq C_2 \alpha^{-1} \mathbf{E} \varphi(\zeta_1 - \alpha) (\ln(\alpha m))^{-(p-1)}, \quad (9)$$

$$\int |L(x) - \ln(\alpha m)|^p dF_m(x) \leq C_3 \alpha^{-1} \mathbf{E} \varphi(\zeta_1 - \alpha) (\ln(\alpha m))^{-1}, \quad (10)$$

где C_1, C_2, C_3 — некоторые константы, зависящие от p .

Докажем для примера неравенство (9).

1) Перейдем от переменной x к $y = x - \alpha t$ и рассмотрим интервал интегрирования $-\alpha t \leq y \leq -\alpha t/2$. На этом интервале $\varphi(y)$ неотрицательна и имеет минимум при $y = -\alpha t/2$, а также имеет место неравенство $|L(y + \alpha t) - \ln(\alpha t)| \leq \ln(\alpha t)$. Поэтому можно оценить интеграл (9) сверху следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha t}^{-\alpha t/2} (L(y + \alpha t) - \ln(\alpha t))^2 dF_m^0(y) &\leq \frac{\ln^2(\alpha t)}{\varphi(-\alpha t/2)} \int_{-\alpha t}^{-\alpha t/2} \varphi(y) dF_m^0(y) \\ &\leq \frac{\ln^2(\alpha t)}{\varphi(-\alpha t/2)} \mathbf{E} \varphi(S_m - \alpha t). \end{aligned}$$

Легко проверить, что функция $\varphi(y)$ слабо выпукла (см. теорему 1). Применяя неравенство (6) к случайному блужданию $W_m = S_m - \alpha t$, получаем: $\mathbf{E} \varphi(S_m - \alpha t) \leq 4t \mathbf{E} \varphi(\zeta_1 - \alpha)$.

Так как $\ln(\alpha t) \leq 2 \ln(\alpha t/2)$ при $\alpha t \geq 2e$, то имеет место оценка:

$$\frac{4t \mathbf{E} \varphi(\zeta_1 - \alpha) \ln^2(\alpha t)}{(\alpha t/2) \ln^{p+1}(\alpha t/2 + e^p)} \leq 2^{p+4} \alpha^{-1} \mathbf{E} \varphi(\zeta_1 - \alpha) (\ln(\alpha t))^{-(p-1)}.$$

2) Рассмотрим интеграл в (9) по промежутку $-\alpha t/2 \leq y \leq \alpha t/2$. При $y \geq -\alpha t/2$ имеем $L(y + \alpha t) = \ln(y + \alpha t)$, так что задача сводится к оценке интеграла

$$\int_{-\alpha t/2}^{\alpha t/2} (\ln(y + \alpha t) - \ln(\alpha t))^2 dF_m^0(y) = \int_{-\alpha t/2}^{\alpha t/2} \ln^2 \left(1 + \frac{y}{\alpha t} \right) dF_m^0(y).$$

Нетрудно показать, что при $|y| \leq \alpha t/2$, $\alpha t \geq 2e$, выполняется неравенство $|\ln(1 + y/(\alpha t))| \leq C(\ln(\alpha t))^{-p} \ln^{p+1}(|y| + e^p)$, где C — некоторая константа, не зависящая от t . Так как при $|y| \leq \alpha t/2$ выполнено неравенство $\ln^2(1 + y/(\alpha t)) \leq 2|y|(\alpha t)^{-1} |\ln(1 + y/(\alpha t))|$, то

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha t/2}^{\alpha t/2} \ln^2 \left(1 + \frac{y}{\alpha t} \right) dF_m^0(y) &\leq \frac{2C}{\alpha t} \int_{-\alpha t/2}^{\alpha t/2} \frac{\varphi(y)}{\ln^p(\alpha t)} dF_m^0(y) \\ &\leq \frac{2C \mathbf{E} \varphi(S_m - \alpha t)}{\alpha t \ln^p(\alpha t)} \leq 8C \alpha^{-1} \mathbf{E} \varphi(\zeta_1 - \alpha) (\ln(\alpha t))^{-p}. \end{aligned}$$

3) Рассмотрим интеграл по промежутку $y \geq \alpha t/2$. Воспользуемся оценкой $\ln(1 + y/(\alpha t)) \leq y/(\alpha t)$ и проведем интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha t/2}^{\infty} \ln^2 \left(1 + \frac{y}{\alpha t} \right) dF_m^0(y) &\leq \frac{1}{\alpha t} \int_{\alpha t/2}^{\infty} y \ln \left(1 + \frac{y}{\alpha t} \right) dF_m^0(y) \leq \frac{1}{2} \left(1 - F_m^0 \left(\frac{\alpha t}{2} \right) \right) \\ &+ \frac{1}{\alpha t} \int_{\alpha t/2}^{\infty} (1 - F_m^0(y)) \left[\ln \left(1 + \frac{y}{\alpha t} \right) + \frac{y}{\alpha t + y} \right] dy. \end{aligned}$$

Для первого слагаемого воспользуемся оценкой

$$\frac{1}{2} \left(1 - F_m^0 \left(\frac{\alpha t}{2} \right) \right) \leq \frac{\mathbf{E} \varphi(S_m - \alpha t)}{2\varphi(\alpha t/2)} \leq 2^{p+2} \alpha^{-1} \mathbf{E} \varphi(\zeta_1 - \alpha) (\ln(\alpha t))^{-(p+1)}.$$

Второе слагаемое не превосходит

$$\begin{aligned} &\frac{4t \mathbf{E} \varphi(\zeta_1 - \alpha)}{\alpha t} \int_{\alpha t/2}^{\infty} \frac{1}{\varphi(y)} \left[\ln \left(1 + \frac{y}{\alpha t} \right) + \frac{y}{\alpha t + y} \right] dy \\ &\leq \frac{4 \mathbf{E} \varphi(\zeta_1 - \alpha)}{\alpha} \int_{\alpha t/2}^{\infty} \frac{2 \ln(y + e^p)}{y \ln^{p+1}(y + e^p)} dy \leq \frac{8 \mathbf{E} \varphi(\zeta_1 - \alpha)}{\alpha} \int_{\alpha t/2}^{\infty} \frac{d(\ln y)}{\ln^p y} \\ &\leq 2^{p+2} \alpha^{-1} \mathbf{E} \varphi(\zeta_1 - \alpha) (\ln(\alpha t))^{-(p-1)}. \end{aligned}$$

Собирая все оценки, получаем неравенство (9).

3.2. Схема доказательства теоремы 2.

Лемма 2. При условиях (C) и $m \geq 3$ справедливы неравенства:

$$|E_m \Delta X_n - E \hat{\lambda}_m(\eta)| \leq B_1 \left\{ E \frac{\hat{\rho}_m(\eta)}{\ln^p(\alpha_m(\eta)m)} + \ln m \cdot P(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta)) \right\}, \quad (11)$$

$$|D_m \Delta X_n - D \hat{\lambda}_m(\eta)| \leq B_2 \max \left\{ \ln m, |E \hat{\lambda}_m(\eta)| \right\} \times \left\{ E \frac{\hat{\rho}_m(\eta)}{\ln^{p-1}(\alpha_m(\eta)m)} + \ln m \cdot P(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta)) \right\}, \quad (12)$$

$$E_m |\Delta X_n - E_m \Delta X_n|^p \leq B_3 \left\{ E \frac{\hat{\rho}_m(\eta)}{\ln(\alpha_m(\eta)m)} + E |\hat{\lambda}_m(\eta) - E \hat{\lambda}_m(\eta)|^p + \ln^p m \cdot P(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta)) \right\}, \quad (13)$$

где B_1, B_2, B_3 — некоторые константы.

Оценки (11)–(13) можно получить, заменяя в неравенствах (8)–(10) $F_m(x)$ на $F_m(x; y)$ и α на $\alpha_m(y)$, интегрируя полученные выражения относительно меры $\mu(dy)$ по области $\{y: \alpha_m(y)m > 2e\}$ и применяя следующее утверждение.

Лемма 3 ([2, следствие 4.1]). Для $m \geq 3$ и $1 \leq r \leq p$

$$E_m (|\Delta X_n|^r; \overline{\mathcal{A}}_m(\eta)) \leq 2^p (c_p + \ln^r m) P(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta))$$

с некоторой абсолютной постоянной $c_p > 1$.

Комбинируя неравенство (11) с условиями (C1), (C2), (B2a), (Da), получаем: $E_m \Delta X_n = E \hat{\lambda}_m(\eta) + o(1)(\ln m)^{-1} D \hat{\lambda}_m(\eta)$, $E_m \Delta X_n = o(1) \ln m$. Если вместо (B2a), (Da) выполнены ограничения (B2b), (Db), то из (11) следует, что $E_m \Delta X_n = O(1) \ln m \cdot (\ln \ln m)^{-\beta}$. Из неравенства (12) и предположений (B2a), (C1), (C2) получаем: $D_m(\Delta X_n) \sim D \hat{\lambda}_m(\eta)$. Наконец, из неравенства (13) и предположений (B1), (C3) следует соотношение $E_m |\Delta X_n - E_m \Delta X_n|^p = O(1)(D \hat{\lambda}_m(\eta))^{p/2}$.

Таким образом, выполнены все условия, необходимые для применения критерия Керстинга [1], тем самым получено представление (7) для функции $h(\ln m)$ и теорема 2 доказана.

Автор выражает М. В. Козлову благодарность за руководство. Автор благодарен рецензенту, обратившему внимание на работу [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kersting G. On recurrence and transience of growth models. — J. Appl. Probab., 1986, v. 23, p. 614–625.
2. Альбеверио С., Козлов М. В. О рекуррентности и транзиентности зависящих от состояния ветвящихся процессов в случайной среде. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 4, с. 641–660.
3. Ватутин В. А., Топчий В. А. Максимум критических процессов Гальтона-Ватсона и непрерывные слева случайные блуждания. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 1, с. 21–34.

Поступила в редакцию
1.II.2008

Исправленный вариант
26.VI.2008