Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Фаталов, Времена пребывания и точные асимптотики распределений L^p -функционалов от процессов Орнштейна–Уленбека, $p > 0$, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 1, 72–99

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2482>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 03:36:31

© 2008 г.

ФАТАЛОВ В. Р.*

ВРЕМЕНА ПРЕБЫВАНИЯ И ТОЧНЫЕ АСИМПТОТИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ L^p -ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ПРОЦЕССОВ ОРНШТЕЙНА–УЛЕНБЕКА, $p > 0^{1)}$

В статье доказаны результаты о точных асимптотиках вероятностей

$$\mathbf{P}_\mu \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T |\eta_\gamma(t)|^p dt < d \right\}, \quad T \rightarrow \infty,$$

при $p > 0$ для гауссовских марковских процессов Орнштейна–Уленбека η_γ , а также для их условных версий.

Методом исследования является метод Лапласа для времен пребывания марковских процессов с непрерывным временем. Вычисления проведены для случая $p = 2$ посредством решения экстремальной задачи для функционала действия.

Ключевые слова и фразы: большие уклонения, гауссовские процессы, марковские процессы, функционал действия, процессы Орнштейна–Уленбека, дифференциальное уравнение Вебера.

1. Введение и формулировка основных результатов

Задачи, связанные с вычислением асимптотик распределений различных функционалов от времен пребывания случайных процессов, возникают во многих областях теории вероятностей и смежных наук таких, как: эргодическая теория, предельные теоремы математической статистики, теория гауссовских, марковских, диффузионных процессов, асимптотические задачи статистической и математической физики (см. [1], [2, гл. 9, § 2], [3]–[11], [12, § 5.1], [20, гл. 8–10], [21]–[27], [31]–[33]). Первый значительный успех в этой проблематике был достигнут в серии фундаментальных статей М. Донскера и С. Варадана [1], где был доказан так называемый *принцип больших уклонений для времен пребывания*, позволяющий вычислять логарифмические асимптотики исследуемых распределений. Работы [1] породили два направления исследований. Первое заключается в описании класса процессов и функционалов,

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00077).

для которых выполнен принцип больших уклонений, [2]–[8], [21]–[26]. Это — достаточно общая и сложная проблема, здесь получены всего лишь частные, хотя и важные результаты. Хорошо исследован случай компактного фазового пространства, намного хуже изучен более важный случай *некомпактного* пространства, здесь полного решения (возможного только для очень узких классов случайных процессов) не имеется, исследования продолжаются и по сей день. Отметим, что при этом процессы с дискретным или непрерывным временем требуют разных методов исследования.

Второе направление — это вычисление на основе принципа больших уклонений точной асимптотики исследуемых объектов (см. [9], [10], [13]). В работах [9], [10] при достаточно естественных условиях были найдены точные асимптотики *интегралов типа Лапласа* от гладких нелинейных функционалов, зависящих от времен пребывания марковских процессов. Метод доказательства результатов из статей [9], [10] — это *метод Лапласа в бесконечномерных пространствах* (см. [12]). Переход от асимптотик интегралов к асимптотикам *распределений* был осуществлен в статье [13]. Используя результаты [9], автор в статье [13] нашел точные асимптотики распределений *линейных* функционалов от времен пребывания (связанных с L^p -функционалами от самого процесса) в случае винеровского процесса и броуновского моста. Там же, в [13], были вычислены точные асимптотики малых уклонений распределений L^p -функционалов для указанных процессов.

Метод, разработанный в статье [13], является достаточно общим и пригоден для применения ко многим иным марковским процессам и различным (в том числе и нелинейным) функционалам. В настоящей работе мы применим данный метод к процессам Орнштейна–Уленбека.

Перейдем к точной формулировке полученных результатов. Пусть $\eta_\gamma(t) \equiv \eta_\gamma(t, \omega)$, $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$, — процесс Орнштейна–Уленбека порядка $\gamma > 0$.

Ниже, говоря о процессах Орнштейна–Уленбека, мы имеем в виду только процессы с положительным порядком.

Как известно, процесс Орнштейна–Уленбека представляет собой однородный диффузионный эргодический процесс с пространством состояний $\mathbf{R}$ (см. [15]–[17]). Напомним некоторые сведения об этом процессе, придерживаясь изложения из [15, приложение 1, п. 23] и [16, гл. 4, § 8, пример 8.1].

Меру скорости процесса $\eta_\gamma(t)$ удобно выбрать вероятностной (одномерной гауссовской) и задать ее формулой (см. [15, приложение 1, п. 23])

$$m(dx) \equiv m_\gamma(dx) = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\pi}} \exp\{-\gamma x^2\} dx \equiv q(x) dx, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Пусть $C_b(\mathbf{R})$ — банахово пространство ограниченных непрерывных

действительных функций на $\mathbf{R}$ с нормой супремума

$$\|h\|_{C_b(\mathbf{R})} := \sup_{x \in \mathbf{R}} |h(x)|.$$

Напомним, что производящий оператор $\mathcal{A}$ процесса $\eta_\gamma(t)$ определен на множестве $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} := \{h: h, \mathcal{A}h \in C_b(\mathbf{R})\}$ и имеет вид

$$(\mathcal{A}h)(x) = \frac{1}{2} h''(x) - \gamma x h'(x), \quad x \in \mathbf{R} \quad (1.1)$$

(см. [15, п. 22, гл. 3, п. 23 приложения 1]).

Легко показать, что p -й момент меры $m(dx)$ имеет вид

$$d_0 = d_0(\gamma) := \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p m(dx) = \frac{\Gamma((p+1)/2)}{\sqrt{\pi}\gamma^{p/2}}, \quad p > 0, \quad (1.2)$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Равенство распределений случайных величин (процессов) будем записывать при помощи обозначения $\stackrel{(d)}{=}$.

Нас интересуют точные асимптотики при $T \rightarrow \infty$ вероятностей

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T |\eta_\gamma(t)|^p dt < d \mid \eta_\gamma(0) = a \right\}, \\ & \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T |\eta_\gamma(t)|^p dt < d \mid \eta_\gamma(0) \stackrel{(d)}{=} m_\gamma \right\}, \\ & \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T |\eta_\gamma(t)|^p dt < d \mid \eta_\gamma(0) = a, \eta_\gamma(T) = b \right\}, \\ & \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T |\eta_\gamma(t)|^p dt < d \mid \eta_\gamma(0) \stackrel{(d)}{=} m_\gamma, \eta_\gamma(T) = b \right\}, \end{aligned}$$

здесь $p > 0$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, $0 < d < d_0$. Ограничение сверху для d следует из эргодичности (см. [15, приложение 1, п. 23], [21], [37]) процесса Орнштейна–Уленбека и предполагается выполненным на протяжении всей статьи. Напомним, что процесс $\{\eta_\gamma(t) \mid \eta_\gamma(0) \stackrel{(d)}{=} m_\gamma\}$ представляет собой стационарный гауссовский процесс Орнштейна–Уленбека.

Зададим основное гильбертово пространство функций, определенных на $\mathbf{R}$:

$$L^2 \equiv L^2(dm) := \{v(x), x \in \mathbf{R}: N(v) < \infty\},$$

где $N(v) \equiv \|v\|^2 := \int_{-\infty}^{\infty} v^2(x) m(dx)$, и пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в L^2 :

$$\langle u, v \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} u(x) v(x) m(dx), \quad u, v \in L^2.$$

Отметим, что $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \subset L^2$ и $R(\mathcal{A}) \subset L^2$, где $R(\mathcal{A})$ — область значений оператора $\mathcal{A}$. Поэтому мы можем рассматривать оператор $\mathcal{A}$ как действующий в L^2 .

Определим функционал

$$U(v) := \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p v^2(x) q(x) dx \equiv \langle |x|^p v, v \rangle, \quad v \in L^2, \quad (1.3)$$

и положим

$$\mathcal{D}_0 := \{\text{множество функций } h(x) \in L^2 \text{ таких, что } |x|^p h(x) \in L^2\}.$$

Пусть $\mathcal{D} := \mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$, это множество всюду плотно в L^2 ; определим множество

$$\mathcal{H} := \{v \in \mathcal{D} : N(v) = 1\}. \quad (1.4)$$

Заметим, что если $v \in \mathcal{H}$, то функция $v^2 q$ является вероятностной плотностью на $\mathbf{R}$, кроме того, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} v^2(x) q(x) = 0$.

Определим функционал

$$J(v) := \begin{cases} -\langle \mathcal{A}v, v \rangle, & \text{если } v \in \mathcal{H}, \\ +\infty, & \text{если } v \in L^2 \setminus \mathcal{H}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Функционал $J(v)$ тесно связан с функционалом действия $I(v)$, введенным ниже в формуле (2.6) (см. (2.13)). Известно, что функционал действия играет основную роль в вариационном принципе теории больших отклонений (см. определение 2.1 в главе 2 и условие (E4) в §5.1 статьи [12]). Для формулировки основных результатов нам понадобится следующее предложение, имеющее вариационную природу и доказанное ниже в разделе 2.

Предложение 1. Пусть $p > 0$ и $0 < d < d_0$ фиксированы. Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) Экстремальная задача

$$J(v) \rightarrow \inf, \quad v \in \mathcal{H}, \quad v \geq 0, \quad U(v) \leq d, \quad (1.6)$$

имеет единственное решение — функцию $v_0(x)$, $x \in \mathbf{R}$, которая является ограниченной и положительной.

(ii) Существует единственная пара положительных чисел (β_0, λ_0) (множители Лагранжа) такая, что функция $v_0(x)$ является единственным положительным решением граничной задачи для уравнения типа Шрёдингера с симметричным потенциалом $|x|^p$

$$\frac{1}{2} v''(x) - \gamma x v'(x) - \lambda_0 |x|^p v(x) + \beta_0 v(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (1.7)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} v^2(x) q(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} v^2(x) m(dx) = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p v^2(x) m(dx) = d,$$

при этом

$$\inf \{J(v) : v \in \mathcal{H}, U(v) \leq d, v \geq 0\} = J(v_0) = \beta_0 - d\lambda_0 > 0. \quad (1.8)$$

Определим непрерывную функцию

$$V(x) := \beta_0 - \lambda_0 |x|^p, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (1.9)$$

Ниже будет показано (см. лемму 2 и доказательство леммы 5), что ядро E_0 оператора $\mathcal{A} + V: L^2 \rightarrow L^2$ представляет собой одномерное подпространство пространства L^2 :

$$E_0 := \text{Ker}(\mathcal{A} + V) = \{c_0 v_0(x), c_0 \in \mathbf{R}\}.$$

Имеет место разложение гильбертова пространства L^2 в прямую сумму

$$L^2 = E_0 \oplus E_1,$$

где $E_1 := E_0^\perp = \{v \in L^2: \int_{-\infty}^{\infty} v(x) v_0(x) m(dx) = 0\}$ — ортогональное дополнение подпространства E_0 (см. [18, гл. 4, § 1, п. 3]). Положим

$$\psi(x) := \frac{|x|^p}{d} - 1, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (1.10)$$

тогда, в силу двух последних равенств из (1.7), $v_0 \psi \in E_1$. Обозначим

$$\sigma^2 := -2\lambda_0^2 d \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{A} + V)^{-1} [v_0 \psi](x) |x|^p v_0(x) m(dx), \quad (1.11)$$

где (в согласии с вышеизложенным) обратный элемент $(\mathcal{A} + V)^{-1} [v_0 \psi](x)$ берется из подпространства E_0 , т.е. для него выполнено равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{A} + V)^{-1} [v_0 \psi](x) v_0(x) m(dx) = 0. \quad (1.12)$$

Конечность и положительность σ^2 доказана ниже, в лемме 5.

Дадим определение функционала времени пребывания применительно к нашему случаю процессов Орнштейна–Уленбека, траектории которых, как известно, непрерывны п.н.

Пусть $C[0, \infty)$ обозначает пространство непрерывных функций $z(t)$, $0 \leq t < \infty$, со значениями в $\mathbf{R}$. Для любых $t > 0$, $z \in C[0, \infty)$ и борелевского B из $\mathbf{R}$ обозначим

$$L_t(z, B) = \frac{1}{t} \int_0^t I_B(z(s)) ds \quad (1.13)$$

— часть времени из $[0, t]$, которую фиксированная траектория $z = z(\cdot)$ проводит в множестве B , здесь $I_B(\cdot)$ — индикатор множества B . Функционал $L_t(z, B)$ кратко называют (нормированным) *временем пребывания*. Имеет место следующее важное свойство (см. [17, гл. 6], [14, гл. 1, формула (4.1)]).

Предложение 2. Пусть действительная функция g измерима по Борелю и интегрируема на любом компактном множестве из $\mathbf{R}$. Тогда для каждого $t > 0$ и всех $\omega \in \Omega$ выполнено равенство

$$\frac{1}{t} \int_0^t g(\eta_\gamma(s)) ds = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) L_t(\eta_\gamma, dx). \quad (1.14)$$

Укажем, что для случая индикатора $g(x) = I_B(x)$ равенство (1.14) следует непосредственно из определения (1.13). Заметим, что в равенстве (1.14) слева стоит нелинейный функционал от процесса η_γ , в то время как правая часть представляет собой линейный функционал от времени пребывания этого процесса.

Мы рассматриваем в данной статье интегральный функционал с функцией $g(x) = |x|^p$; отметим, что применяемый метод пригоден и для других интегральных функционалов.

Укажем, что из свойств функции $v_0(x)$ и вероятностной меры $m(dx)$ следуют соотношения $\int_{-\infty}^{\infty} v_0(x) m(dx) < \infty$ и $\int_{-\infty}^{\infty} v_0^3(x) m(dx) < \infty$.

Теорема 1 (точная асимптотика для времен пребывания). Пусть $p > 0$, $\gamma > 0$, $a \in \mathbf{R}$, $0 < d < d_0$. Тогда при $T \rightarrow \infty$ справедливы соотношения.

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T |\eta_\gamma(t)|^p dt < d \mid \eta_\gamma(0) = a \right\} \\ &= \mathbf{P} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p L_T(\eta_\gamma, dx) < d \mid \eta_\gamma(0) = a \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T} \sigma} \exp \{ -T(\beta_0 - d\lambda_0) \} v_0(a) \int_{-\infty}^{\infty} v_0(x) m(dx) (1 + o(1)), \quad (1.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T |\eta_\gamma(t)|^p dt < d \mid \eta_\gamma(0) \stackrel{(d)}{=} m_\gamma \right\} \\ &= \mathbf{P} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p L_T(\eta_\gamma, dx) < d \mid \eta_\gamma(0) \stackrel{(d)}{=} m_\gamma \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T} \sigma} \exp \{ -T(\beta_0 - d\lambda_0) \} \\ & \quad \times \int_{-\infty}^{\infty} v_0(x) m(dx) \int_{-\infty}^{\infty} v_0^3(x) m(dx) (1 + o(1)). \quad (1.16) \end{aligned}$$

Следствие 1 (случай $p = 2$). Пусть $\gamma > 0$, $a \in \mathbf{R}$, $0 < d < 1/(2\gamma)$. Тогда при $T \rightarrow \infty$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \eta_\gamma^2(t) dt < d \mid \eta_\gamma(0) = a \right\} \\ &= \mathbf{P} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 L_T(\eta_\gamma, dx) < d \mid \eta_\gamma(0) = a \right\} \\ &= \exp \left\{ -T \frac{(1 - 2\gamma d)^2}{8d} \right\} \frac{4\sqrt{d}}{\sqrt{\pi T}} \frac{1}{(1 - 4\gamma^2 d^2) \sqrt{1 + 2\gamma d}} \\ & \quad \times \exp \left\{ -\frac{a^2}{4d} (1 - 2\gamma d) \right\} (1 + o(1)), \quad (1.17) \\ & \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \eta_\gamma^2(t) dt < d \mid \eta_\gamma(0) \stackrel{(d)}{=} m_\gamma \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{P} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 L_T(\eta_\gamma, dx) < d \mid \eta_\gamma(0) \stackrel{(d)}{=} m_\gamma \right\} \\
&= \exp \left\{ -T \frac{(1-2\gamma d)^2}{8d} \right\} \frac{4\sqrt{2d}}{\sqrt{\pi T}} \\
&\quad \times \frac{1}{(1-4\gamma^2 d^2) \sqrt{(1+2\gamma d)(3-2\gamma d)}} (1+o(1)). \tag{1.18}
\end{aligned}$$

Соответствующая условная версия теоремы 1 формулируется следующим образом.

Теорема 2 (точная асимптотика для времен пребывания, условная версия). Пусть $p > 0$, $\gamma > 0$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, $0 < d < d_0$. Тогда при $T \rightarrow \infty$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T |\eta_\gamma(t)|^p dt < d \mid \eta_\gamma(0) = a, \eta_\gamma(T) = b \right\} \\
&= \mathbf{P} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p L_T(\eta_\gamma, dx) < d \mid \eta_\gamma(0) = a, \eta_\gamma(T) = b \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T} \sigma} \exp \{ -T(\beta_0 - d\lambda_0) \} v_0(a) v_0(b) (1+o(1)), \tag{1.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T |\eta_\gamma(t)|^p dt < d \mid \eta_\gamma(0) \stackrel{(d)}{=} m_\gamma, \eta_\gamma(T) = b \right\} \\
&= \mathbf{P} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p L_T(\eta_\gamma, dx) < d \mid \eta_\gamma(0) \stackrel{(d)}{=} m_\gamma, \eta_\gamma(T) = b \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T} \sigma} \exp \{ -T(\beta_0 - d\lambda_0) \} \\
&\quad \times v_0(b) \int_{-\infty}^{\infty} v_0^3(x) m(dx) (1+o(1)). \tag{1.20}
\end{aligned}$$

Следствие 2 (случай $p = 2$). Пусть $\gamma > 0$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$ и $0 < d < 1/(2\gamma)$. Тогда при $T \rightarrow \infty$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \eta_\gamma^2(t) dt < d \mid \eta_\gamma(0) = a, \eta_\gamma(T) = b \right\} \\
&= \mathbf{P} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 L_T(\eta_\gamma, dx) < d \mid \eta_\gamma(0) = a, \eta_\gamma(T) = b \right\} \\
&= \exp \left\{ -T \frac{(1-2\gamma d)^2}{8d} \right\} \frac{2}{\sqrt{\pi \gamma T}} \frac{1}{1-4\gamma^2 d^2} \\
&\quad \times \exp \left\{ -\frac{a^2 + b^2}{4d} (1-2\gamma d) \right\} (1+o(1)), \tag{1.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \eta_\gamma^2(t) dt < d \mid \eta_\gamma(0) \stackrel{(d)}{=} m_\gamma, \eta_\gamma(T) = b \right\} \\
&= \mathbf{P} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 L_T(\eta_\gamma, dx) < d \mid \eta_\gamma(0) \stackrel{(d)}{=} m_\gamma, \eta_\gamma(T) = b \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left\{ -T \frac{(1 - 2\gamma d)^2}{8d} \right\} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\gamma T}} \frac{1}{(1 - 4\gamma^2 d^2)\sqrt{3 - 2\gamma d}} \\
&\quad \times \exp \left\{ -\frac{b^2}{4d} (1 - 2\gamma d) \right\} (1 + o(1)). \tag{1.22}
\end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 1. Соотношение (1.21) при $a = b = 0$ показывает, что формула 1.9.8 (1) из [15, ч. II, §7, п. 1] неверна. Если в этой формуле положить $\sigma = 1/\sqrt{2\gamma}$, $\theta = \gamma$, $y = td$, то правая часть указанной формулы не будет удовлетворять масштабному свойству, описанному в предложении 7 и лемме 7. Кроме того, если устремить $t \rightarrow \infty$, то точная асимптотика правой части формулы 1.9.8 (1) из [15, ч. II, §7, п. 1] оказывается не связанной с ограничением эргодичности $d < 1/(2\gamma)$ и не совпадает с асимптотикой из (1.21).

2. Метод Лапласа для времен пребывания.

Доказательство теорем 1 и 2

Приведем некоторые сведения, которые нам понадобятся для изложения метода Лапласа для времен пребывания.

2.1. Свойства производящего оператора $\mathcal{A}$ и форма Дирихле. Как известно, переходная плотность процесса Орнштейна–Уленбека $\eta_\gamma(t)$ относительно меры скорости $m(dx)$ имеет вид

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{sh}(\gamma t)}} \exp \left\{ \frac{\gamma}{2} \left[t + x^2 + y^2 - \frac{(x^2 + y^2) \operatorname{ch}(\gamma t) - 2xy}{\operatorname{sh}(\gamma t)} \right] \right\},$$

где $t \in [0, \infty)$, $x, y \in \mathbf{R}$ (см., например, [15, приложение 1, п. 23]). Несложно подсчитать, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t, x, y) = 1 \quad \text{при любых } x, y \in \mathbf{R}. \tag{2.1}$$

Как видим, переходная плотность — симметричная функция по переменным x, y , т.е. $p(t, x, y) = p(t, y, x)$; напомним, что это — общее свойство одномерных диффузий (см. [15, гл. 2, §1, п. 4]). Таким образом, процесс Орнштейна–Уленбека принадлежит классу так называемых m -симметричных марковских процессов (см. [3, с. 311], [9], [38], [39]), т.е. для него выполнено определяющее соотношение

$$\langle P_t g, h \rangle = \langle g, P_t h \rangle, \quad g, h \in C_0(\mathbf{R}),$$

где $P_t h(x) := \int_{-\infty}^{\infty} p(t, x, y) h(y) m(dy)$ — полугрупповой оператор и $C_0(\mathbf{R})$ — пространство непрерывных действительных функций на $\mathbf{R}$ с компактным носителем. Для m -симметричных марковских процессов развита плодотворная теория больших уклонений (см. [3], [9], [12, § 5.1]).

Предложение 3. Производящий оператор $\mathcal{A}: \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \rightarrow L^2$ процесса Орнштейна–Уленбека является симметричным, т.е.

$$\langle \mathcal{A} u, v \rangle = \langle \mathcal{A} v, u \rangle, \quad u, v \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}, \tag{2.2}$$

и отрицательным, т.е.

$$\langle \mathcal{A}v, v \rangle \leq 0, \quad v \in \mathcal{D}\mathcal{A}. \quad (2.3)$$

Свойства (2.2) и (2.3) следуют из общих результатов, доказанных для регулярных m -симметричных марковских процессов (см. [38], [3, с. 311]).

Как видим, оператор $-\mathcal{A}$ является симметричным и положительным. Следуя [38] и учитывая (2.2) и (2.3), определим билинейную форму Дирихле:

$$\mathcal{E}(u, v) := \langle \sqrt{-\mathcal{A}}u, \sqrt{-\mathcal{A}}v \rangle, \quad u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \equiv \mathcal{D}(\sqrt{-\mathcal{A}}), \quad (2.4)$$

где $\sqrt{-\mathcal{A}}$ — квадратный корень из симметричного положительного оператора $-\mathcal{A}$, $\mathcal{D}(\sqrt{-\mathcal{A}})$ — область определения оператора $\sqrt{-\mathcal{A}}$.

Имеет место равенство

$$\mathcal{E}(u, v) = -\langle \mathcal{A}u, v \rangle, \quad u \in \mathcal{D}\mathcal{A}, \quad v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \quad (2.5)$$

(см. [38, § 1.3]).

2.2. Принцип больших уклонений и логарифмическая асимптотика. Доказательство теорем 1 и 2 до определенного места проводится единым образом. Приведем нужные нам результаты теории больших уклонений для нашего случая процесса Орнштейна–Уленбека.

Обозначим через $\mathcal{M}$ метрическое пространство вероятностных мер на $\mathbf{R}$, снабженное метрикой Прохорова ρ и борелевской σ -алгеброй. Ради краткости мы будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_a\{\eta_\gamma \in (\cdot)\} &:= \mathbf{P}\{\eta_\gamma \in (\cdot) \mid \eta_\gamma(0) = a\}, \\ \mathbf{P}_m\{\eta_\gamma \in (\cdot)\} &:= \mathbf{P}\{\eta_\gamma \in (\cdot) \mid \eta_\gamma(0) \stackrel{(d)}{=} m_\gamma\}, \\ \mathbf{P}_{a,b}\{\eta_\gamma \in (\cdot)\} &:= \mathbf{P}\{\eta_\gamma \in (\cdot) \mid \eta_\gamma(0) = a, \eta_\gamma(T) = b\}, \\ \mathbf{P}_{m,b}\{\eta_\gamma \in (\cdot)\} &:= \mathbf{P}\{\eta_\gamma \in (\cdot) \mid \eta_\gamma(0) \stackrel{(d)}{=} m_\gamma, \eta_\gamma(T) = b\}. \end{aligned}$$

Ниже $\mathbf{E}$ с нижним индексом или без означают усреднение по соответствующей вероятности.

Определим функционал действия $I(\nu)$, заданный на $(\mathcal{M}, \rho)$, следующим образом:

$$I(\nu) := \begin{cases} \mathcal{E}(v, v), & \text{если } v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \text{ и } \nu(dx) = v^2(x) dx, \\ +\infty & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Теорема 3 (принцип больших уклонений). (i) Семейства вероятностных мер

$$\{\mathbf{P}_a\{L_T(\eta_\gamma, \cdot) \in (\cdot)\}\}_{T>0}, \quad \{\mathbf{P}_m\{L_T(\eta_\gamma, \cdot) \in (\cdot)\}\}_{T>0}, \quad (2.7)$$

$$\{\mathbf{P}_{a,b}\{L_T(\eta_\gamma, \cdot) \in (\cdot)\}\}_{T>0}, \quad \{\mathbf{P}_{m,b}\{L_T(\eta_\gamma, \cdot) \in (\cdot)\}\}_{T>0} \quad (2.8)$$

удовлетворяют в пространстве $(\mathcal{M}, \rho)$ при $T \rightarrow \infty$ принципу больших уклонений с одними и теми же функционалом действия $I(\nu)$ и скоростью T .

(ii) Таким образом, для любого открытого в $\mathcal{M}$ множества G выполнены неравенства

$$\begin{aligned} -\inf_{\nu \in G} I(\nu) &\leq \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}_a \{L_T(\eta_\gamma, \cdot) \in G\} \\ &\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}_a \{L_T(\eta_\gamma, \cdot) \in \overline{G}\} \leq -\inf_{\nu \in \overline{G}} I(\nu), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\overline{G}$ — замыкание множества G . Аналогичные соотношения справедливы для трех других семейств мер из формул (2.7), (2.8).

(iii) Для слабо непрерывного функционала F на $\mathcal{M}$ имеют место равенства

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{E}_\mu \exp [-TF(L_T(\eta_\gamma, \cdot))] = -\inf_{\nu \in \mathcal{M}} [F(\nu) + I(\nu)], \quad (2.10)$$

где в качестве $\mathbf{E}_\mu$ могут выступать $\mathbf{E}_a, \mathbf{E}_m, \mathbf{E}_{a,b}, \mathbf{E}_{m,b}$.

Доказательство можно получить, используя работы [1, ч. III, IV] и [6, ч. III]. Точные асимптотики четырех интегралов из формулы (2.10) уже различны (хотя порядок этих асимптотик один и тот же), указанные асимптотики можно вычислить, используя результаты работы [9], см. теоремы 4, 5 ниже.

В зависимости от ситуации нам будет удобно работать или в пространстве функций L^2 , или в пространстве мер $\mathcal{M}$. Так, хотя основная теорема 3 сформулирована в пространстве мер, решать экстремальные задачи типа той, что записана в формуле (2.10), легче в пространстве функций, где можно использовать развитые методы вариационного исчисления.

Введем функционал, посредством которого можно легко записать вероятности из теорем 1, 2:

$$F_0(\nu) := \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p \nu(dx), \quad \nu \in \mathcal{M}. \quad (2.11)$$

Учитывая формулы (1.3), (1.5), (2.5), легко убедиться, что

$$F_0(\nu) \equiv U(\nu), \quad \nu(dx) = \nu^2(x) dx, \quad (2.12)$$

$$I(\nu) \equiv J(\nu), \quad \text{если } \nu(dx) = \nu^2(x) dx \text{ и } \nu \in \mathcal{H}. \quad (2.13)$$

2.3. Логарифмическая асимптотика.

Лемма 1. Для любого $p > 0$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}_\mu \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p L_T(\eta_\gamma, dx) < d \right\} \\ = -\inf \{I(\nu): F_0(\nu) < d\} = -\inf \{I(\nu): F_0(\nu) \leq d\}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где в качестве $\mathbf{P}_\mu$ могут выступать $\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_m, \mathbf{P}_{a,b}, \mathbf{P}_{m,b}$.

Доказательство. Согласно определению (2.11), справедливости равенства

$$\mathbf{P}_\mu \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p L_T(\eta_\gamma, dx) < d \right\} = \mathbf{P}_\mu \{ F_0(L_T(w)) < d \}, \quad (2.15)$$

где в качестве $\mathbf{P}_\mu$ могут выступать $\mathbf{P}_a, \mathbf{P}_m, \mathbf{P}_{a,b}, \mathbf{P}_{m,b}$.

С учетом соотношений (2.15) и линейности функционала F_0 , формулы (2.14) выводятся при помощи теоремы 3 посредством рассуждений, стандартных для теории больших отклонений (ср. [12, замечание 2.2, теоремы 2.2, 2.5, следствие 2.1]). Отметим, что соотношения (2.14) соответствуют тому случаю формулы (2.9), когда выполнено равенство $\inf_{\nu \in G} I(\nu) = \inf_{\nu \in \bar{G}} I(\nu)$, $G = \{\nu: F_0(\nu) < d\}$.

Итак, согласно (2.15), нужно решить следующую экстремальную задачу:

$$I(\nu) \rightarrow \inf, \quad F_0(\nu) \leq d. \quad (2.16)$$

2.4. Решение экстремальной задачи (2.16). Доказательство предложения 1. Учитывая формулы (1.4), (2.6) и (2.12), убеждаемся, что задача (2.16) эквивалентна следующей экстремальной задаче:

$$\mathcal{E}(v, v) \rightarrow \inf, \quad v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}), \quad N(v) = 1, \quad U(v) \leq d. \quad (2.17)$$

Задача (2.17) очень близка задаче (1.6); ниже мы покажем, что эти две экстремальные задачи эквивалентны.

Для формы Дирихле $\mathcal{E}(u, v)$, определенной в (2.4), имеет место следующее важное свойство (см. [9, с. 543]):

$$\begin{aligned} \text{если } v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}), \text{ то } |v| \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \text{ и выполнено} \\ \text{неравенство } \mathcal{E}(v, v) \geq \mathcal{E}(|v|, |v|). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Таким образом, в силу (2.18), задача (2.17) эквивалентна экстремальной задаче

$$\mathcal{E}(v, v) \rightarrow \inf, \quad v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}), \quad N(v) = 1, \quad U(v) \leq d, \quad v \geq 0. \quad (2.19)$$

Согласно первой теореме Вейерштрасса (см. [40, с. 114]), минимум в задаче (2.19) достигается. Рассуждая так же, как в работах [9, с. 543, предложение (2.1)], [41, лемма 1], можно показать, что точки, достигающие минимум в задаче (2.19), принадлежат области определения $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ производящего оператора $\mathcal{A}$. Поэтому задачи (2.19) и (1.6) эквивалентны, следовательно, эквивалентны и задачи (2.17) и (1.6).

Решим задачу (1.6) методом множителей Лагранжа (см. [28, п. 1.3.3 в гл. 1, п. 3.2.1 в гл. 3]) с привлечением теоремы Куна–Таккера. Функция Лагранжа задается формулой

$$\mathcal{L}(v) = -\lambda_1 \langle \mathcal{A}v, v \rangle + \lambda_2 [U(v) - d] + \lambda_3 [\langle v, v \rangle - 1], \quad v \in \mathcal{D}, \quad v \geq 0, \quad (2.20)$$

где

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \in \mathbf{R}, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 > 0. \quad (2.21)$$

Дифференцируя квадратичные функционалы, получаем, что для того, чтобы точка v доставляла минимум в задаче (1.6), необходимо выполнение условия стационарности

$$\mathcal{L}'(v) \equiv -2\lambda_1 \mathcal{A}v + 2\lambda_2 |x|^p v + 2\lambda_3 v = 0, \quad v \in \mathcal{D}, \quad v \geq 0, \quad (2.22)$$

и условия дополняющей нежесткости

$$\lambda_2[U(v) - d] = 0, \quad \lambda_3[\langle v, v \rangle - 1] = 0. \quad (2.23)$$

Легко проверить, что в нашей задаче $\lambda_1 > 0$, обозначим $\lambda = \lambda_2/\lambda_1 > 0$, $\beta = -\lambda_3/\lambda_1 \in \mathbf{R}$. Исследуя соотношения (2.20)–(2.23), несложно убедиться, что точка v , доставляющая минимум в задаче (1.6), является *граничной точкой* и для нее выполнены соотношения

$$-\mathcal{A}v + \lambda |x|^p v - \beta v = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (2.24)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} v^2(x) q(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} v^2(x) m(dx) = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p v^2(x) m(dx) = d.$$

Учитывая вышеизложенное и внимательно просматривая доказательство теоремы Куна–Таккера в [28, гл. 1, п. 1.3.3], заключаем, что в нашей ситуации существует единственная пара положительных чисел (β_0, λ_0) такая, что

$$\begin{aligned} & \min \{J(z): z \in \mathcal{H}, U(z) \leq d, z \geq 0\} \\ &= \min \left\{ -\langle \mathcal{A}z, z \rangle + \lambda_0[U(z) - d] - \beta_0[\langle z, z \rangle - 1]: z \in \mathcal{D}, z \geq 0 \right\}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

и при этом для точки v , доставляющей минимум справа в (2.25), выполнены соотношения (2.24) при $\beta = \beta_0$, $\lambda = \lambda_0$, т.е. соотношения (1.7).

Для доказательства основной части предложения 1 осталось доказать следующее утверждение.

Лемма 2. *Граничная задача (1.7) имеет единственное решение — положительную функцию $v_0(x)$, описанную в предложении 1.*

Для доказательства леммы 2 нам понадобятся некоторые определения и факты, связанные с приведением дифференциальных выражений второго порядка к нормальной форме Лиувилля.

Пусть $L^2(dt)$ — обычное гильбертово пространство функций $y(t)$, $t \in \mathbf{R}$, с нормой $\|y\|_{L^2(dt)} := [\int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt]^{1/2}$ и скалярным произведением

$$\langle y, z \rangle_{L^2(dt)} := \int_{-\infty}^{\infty} y(t) z(t) dt, \quad y, z \in L^2(dt).$$

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор $B: L^2(dt) \rightarrow L^2(dt)$, действующий по правилу

$$(By)(t) = y''(t) + \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^2 t^2}{4} \right) y(t), \quad t \in \mathbf{R}, \quad (2.26)$$

и определенный на всюду плотном множестве $\mathcal{D}_B := \{y \in L^2(dt): By \in L^2(dt)\}$.

Предложение 4. При замене переменной

$$y(t) = \frac{\gamma^{1/4}}{(2\pi)^{1/4}} \exp \left\{ -\frac{\gamma}{2} x^2 \right\} v(x), \quad t = \sqrt{2}x, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (2.27)$$

справедливы равенства

$$(\mathcal{A}v)(x) = \frac{(2\pi)^{1/4}}{\gamma^{1/4}} \exp \left\{ \frac{\gamma}{4} t^2 \right\} (By)(t), \quad v \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}, \quad (2.28)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^2(x) m(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt, \quad v \in L^2, \quad (2.29)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^p v^2(x) m(dx) = \frac{1}{2^{p/2}} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^p y^2(t) dt, \quad v \in \mathcal{D}_0. \quad (2.30)$$

Доказательство проводится непосредственной проверкой равенств (2.28)–(2.30). Отметим, что сама замена переменной (2.27) найдена на основе известных формул приведения дифференциальных выражений второго порядка к нормальной форме Лиувилля (см., например, [19, ч. 2, § 9, п. 9.2]).

Предложение 5. При замене переменной (2.27) граничная задача (1.7) переходит в следующую эквивалентную граничную задачу

$$\begin{aligned} y''(t) - \left(\frac{\gamma^2 t^2}{4} + \lambda_0 |t|^p \right) y(t) + \left(\frac{\gamma}{2} + \beta_0 \right) y(t) &= 0, \quad t \in \mathbf{R}, \\ y(-\infty) = y(\infty) &= 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |t|^p y^2(t) dt = 2^{p/2} d. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Доказательство предложения получаем непосредственно из формул (1.7), (2.27)–(2.30).

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор Шрёдингера $S: L^2(dt) \rightarrow L^2(dt)$, действующий по правилу

$$(Sy)(t) = -y''(t) + \left(\frac{\gamma^2 t^2}{4} + \lambda_0 |t|^p \right) y(t) \quad (2.32)$$

и определенный на всюду плотном множестве $\mathcal{D}_S := \{y \in L^2(dt): Sy \in L^2(dt)\}$.

Предложение 6. Оператор Шрёдингера S является самосопряженным, положительным оператором и имеет чисто дискретный простой спектр, т.е. уравнение $Sy = \mu y$ обладает счетным числом решений (y_n, μ_n) , $n = 0, 1, 2, \dots$, где

$$0 < \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_n < \dots$$

— собственные значения, $\{y_n\}$ — соответствующие им нормированные собственные функции, $\|y_n\|_{L^2(dt)} = 1$.

Доказательство. Положительность оператора S доказывается непосредственно. В самом деле, учитывая, что $y(-\infty) = y(\infty) = 0$ при $y \in L^2(dt)$, и, интегрируя по частям, получаем,

$$\begin{aligned} \langle Sy, y \rangle_{L^2(dt)} &= \int_{-\infty}^{\infty} [y'(t)]^2 dt \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\gamma^2 t^2}{4} + \lambda_0 |t|^p \right) y^2(t) dt > 0, \quad 0 \neq y \in \mathcal{D}_S, \end{aligned}$$

здесь последнее неравенство выполнено, так как $\lambda_0 > 0$ и, как несложно показать, ядро оператора S состоит из одного нуля.

Потенциал $\gamma^2 t^2/4 + \lambda_0 |t|^p$ оператора S ограничен снизу и стремится к бесконечности при $|t| \rightarrow \infty$, поэтому утверждения о самосопряженности и спектре оператора S следуют с учетом доказанной положительности оператора S из общих известных результатов (см., например, вывод после формулы (94) в [42, гл. 7, § 24, п. 5] и п. 6, пример б) в [42, гл. 7, § 24], а также [18, гл. 4, § 7, п. 4]) и пример а) в [18, гл. 9, § 2]). Предложение 6 доказано.

Доказательство леммы 2. В силу предложения 5, очевидно, достаточно доказать, что граничная задача (2.31) имеет единственное решение. Используя оператор (2.32), дифференциальное уравнение из задачи (2.31) можно записать в виде

$$Sy = \left(\frac{\gamma}{2} + \beta_0 \right) y, \quad y \in \mathcal{D}_S. \quad (2.33)$$

Согласно предложению 6, при фиксированных $\lambda_0 > 0$ и β_0 уравнение (2.33) имеет не более одного решения, причем единственное решение существует только при

$$\frac{\gamma}{2} + \beta_0 > 0. \quad (2.34)$$

Поскольку уже доказано, что экстремальная задача (1.6) имеет решение, то отсюда следует, что уравнение (2.33) имеет в точности одно решение — функцию $y_0(t) \in L^2(dt)$, для которой выполнены равенства из формулы (2.31). По найденной функции $y_0(t)$, с учетом замены (2.27), находим искомую функцию

$$v_0(x) = \frac{(2\pi)^{1/4}}{\gamma^{1/4}} \exp \left\{ \frac{\gamma}{2} x^2 \right\} y_0(\sqrt{2}x) \in L^2(dm), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (2.35)$$

Из вышеизложенного следует (см. (2.18)), что эта функция (2.35) положительна и является единственным решением граничной задачи (1.7). Лемма 2 доказана.

Завершим доказательство предложения 1. Докажем второе равенство в формуле (1.8). В силу уже доказанной части предложения 1, для экстремали $v_0(x)$ выполнены равенства

$$-\frac{1}{2} v_0''(x) + \gamma x v_0'(x) = \beta_0 v_0(x) - \lambda_0 |x|^p v_0(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad (2.36)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_0^2(x) q(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p v_0^2(x) q(x) dx = d. \quad (2.37)$$

Умножим равенство (2.36) почленно на функцию $v_0(x) q(x)$ и проинтегрируем полученное равенство в пределах от $-\infty$ до ∞ . В результате, с учетом формул (1.1), (1.5), (2.37), находим

$$J(v_0) = -\langle \mathcal{A} v_0, v_0 \rangle = \beta_0 \langle v_0, v_0 \rangle - \lambda_0 \langle |x|^p v_0, v_0 \rangle = \beta_0 - d\lambda_0 \geq 0, \quad (2.38)$$

здесь последнее неравенство вытекает из свойства отрицательности оператора $\mathcal{A}$ (см. (2.3)). Таким образом, мы показали, что $\beta_0 \geq d\lambda_0 > 0$ — это уточняет оценку (2.34).

Докажем теперь, что

$$\min \{J(v): v \in \mathcal{D}, \|v\| = 1, U(v) \leq d\} = J(v_0) > 0. \quad (2.39)$$

Имеем очевидную оценку снизу

$$\min \{J(v): v \in \mathcal{D}, \|v\| = 1, U(v) \leq d\} \geq \min \{J(v): v \in \mathcal{D}, \|v\| = 1\}. \quad (2.40)$$

Используя замену переменной (2.27) и формулы (1.5), (2.26), (2.28), несложно убедиться, что справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \min \{J(v): v \in \mathcal{D}, \|v\| = 1\} \\ &= \frac{\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{\pi}} \min \{ -\langle By, y \rangle_{L^2(dt)}: y \in \mathcal{D}_B, \|y\|_{L^2(dt)} = 1 \}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Учитывая теорию одномерных операторов Шрёдингера (см. [18, гл. 4, § 7, п. 4]) и пример а) в [18, гл. 9, § 2, п. 2]) и явно решая возникающее дифференциальное уравнение

$$-y''(t) + \left(\frac{\gamma^2 t^2}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) y(t) = \mu y(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

в задаче на собственные числа (см. [19, с. 408, № 2.12]), заключаем, что

$$\min \left\{ -\langle By, y \rangle_{L^2(dt)}: y \in \mathcal{D}_B, \|y\|_{L^2(dt)} = 1 \right\} = 0$$

и этот минимум достигается на единственной функции

$$\tilde{y}_0(t) := \frac{\gamma^{1/4}}{(2\pi)^{1/4}} \exp \left\{ -\frac{\gamma}{4} t^2 \right\}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Отсюда, согласно (2.41), следует, что

$$\min \{J(v): v \in \mathcal{D}, \|v\| = 1\} = 0 \quad (2.42)$$

и этот минимум достигается на единственной функции

$$\tilde{v}_0(x) = \frac{(2\pi)^{1/4}}{\gamma^{1/4}} \exp \left\{ \frac{\gamma}{2} x^2 \right\} \tilde{y}_0(\sqrt{2}x) \equiv 1, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Согласно равенству (1.2), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^p \tilde{v}_0^2(x) q(x) dx = d_0 > d.$$

Таким образом, точка $\tilde{v}_0 \equiv 1$ не принадлежит множеству $\{v \in \mathcal{D}: \|v\| = 1, U(v) \leq d\}$.

Учитывая вышеизложенное, в частности, соотношения (2.40), (2.42), и применяя вторую теорему отделимости (см. [28, гл. 2, п. 2.1.4]), убеждаемся, что

$$\min \{J(v): v \in \mathcal{D}, \|v\| = 1, U(v) \leq d\} > \min \{J(v): v \in \mathcal{D}, \|v\| = 1\} = 0.$$

Это доказывает неравенство из формулы (2.39).

Таким образом, из (2.38) и (2.39) мы получаем $J(v_0) = \beta_0 - d\lambda_0 > 0$. Формула (1.8), а вместе с ней и предложение 1 полностью доказаны.

2.5. Доказательство формулы (1.16). В данной работе мы приведем полное доказательство формулы (1.16), вывод формул (1.15), (1.19), (1.20) проводится по той же самой схеме (см. также доказательство предложения 1 из работы [13]). Отметим также, что процесс Орнштейна–Уленбека, в отличие от винеровского процесса, является эргодическим. Изложенный ниже метод годится также для доказательства результатов типа теорем 1, 2 в случае иных марковских процессов, времени пребывания которых удовлетворяют принципу больших отклонений.

Следующие ниже рассуждения аналогичны рассуждениям, использованным в [9] и [13].

Выберем последовательность элементов $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C_b(\mathbf{R})$ и последовательность чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$ так, чтобы выполнялись следующие три условия:

- 1) $\phi_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, и $\|\phi_n\|_{C_b(\mathbf{R})} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) $\{\|\phi_n\|_{L^2}^{-1} \phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть полный ортонормированный базис в L^2 ;
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \|\phi_n\|_{L^2}^{-2} < \infty$.

Обозначим через $\mathcal{M}_A$ банахово пространство знакопеременных мер μ на $\mathbf{R}$ с нормой

$$\|\mu\|_A := \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \|\phi_n\|_{L^2}^{-2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n d\mu \right)^2 \right]^{1/2}$$

(см. [9, с. 534]).

Введем новую вероятностную меру на $\mathbf{R}$

$$\nu_0(dx) := v_0^2(x) q(x) dx. \quad (2.43)$$

2.6. Выделение малой окрестности точки минимума.

Лемма 3. Для любого $\delta > 0$ найдется такое $c = c(\delta) > 0$, что при $T \rightarrow \infty$ имеет место равенство

$$\mathbf{P}_m\{F_0(L_T(\eta_\gamma)) < d\} = K(T)(1 + O(e^{-Tc})), \quad (2.44)$$

где

$$K(T) = \mathbf{P}_m\left\{F_0(L_T(\eta_\gamma)) < d, \sup_{n=1,2,\dots} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n d(L_T(\eta_\gamma) - \nu_0) \right| < \delta\right\}. \quad (2.45)$$

Доказательство леммы основано на лемме 1, п. (i) предложения 1 и эквивалентности задач (2.16) и (1.6). С учетом полунепрерывности снизу функционала действия $I(\nu)$, утверждение леммы доказывается стандартными методами теории больших уклонений, ср. с леммой 3.6 из [12], леммой 7 из [29] и началом доказательства теоремы (2.19) в [9].

Отметим здесь далеко идущую аналогию между теорией больших уклонений времен пребывания марковских процессов, [1, ч. III], [9], [10], и теорией больших уклонений сумм независимых одинаково распределенных случайных банаховозначных элементов, [1, ч. III], [29], [30] (вторая — частный случай первой).

2.7. Использование экспоненциального преобразования типа Крамера. Экстремальная функция $v_0(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению из формулы (1.7), поэтому в силу (1.1), (1.9) справедливо равенство

$$(\mathcal{A}v_0)(x) = -V(x)v_0(x), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (2.46)$$

Следуя работе [9, с. 545, 556] и учитывая (2.46), введем следующее экспоненциальное преобразование типа Крамера. Для фиксированного $T > 0$ определим вероятностную меру на основном вероятностном пространстве:

$$\mathbf{Q}_T(d\omega) = \mathbf{Q}_{T,m}(d\omega) := \frac{1}{K_1(T)} \exp\left\{T \int_{-\infty}^{\infty} V(x) L_T(\eta_\gamma, dx)\right\} \mathbf{P}_m(d\omega), \quad (2.47)$$

где $K_1(T) = \mathbf{E}_m \exp\{T \int_{-\infty}^{\infty} V(x) L_T(\eta_\gamma, dx)\}$. В результате замены меры (2.47) получаем для вероятности (2.45) равенство

$$K(T) = K_1(T) K_2(T), \quad (2.48)$$

где

$$K_2(T) = \int_{\mathcal{O}(T)} \exp \left\{ -T \int_{-\infty}^{\infty} V(x) L_T(\eta_\gamma, dx) \right\} \mathbf{Q}_T(d\omega), \quad (2.49)$$

$$\mathcal{O}(T) \equiv \mathcal{O}(T, \delta)$$

$$:= \left\{ \omega: F_0(L_T(\eta_\gamma)) < d, \sup_{n=1,2,\dots} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n d(L_T(\eta_\gamma) - \nu_0) \right| < \delta \right\}.$$

Найдем точные асимптотики интегралов $K_1(T)$ и $K_2(T)$.

2.8. Точная асимптотика интеграла $K_1(T)$. Заметим, что

$$K_1(T) = \mathbf{E}_m \exp \{ T F_1(L_T(\eta_\gamma, \cdot)) \}, \quad (2.50)$$

где

$$F_1(\nu) := \int_{-\infty}^{\infty} V(x) \nu(dx), \quad \nu \in \mathcal{M},$$

— линейный функционал.

Легко видеть, что в наших условиях применим п. (3) теоремы 2.20, из [9, с. 557]. Приведем формулировку этой теоремы с учетом того, что вторая производная по Фреше линейного функционала равна нулю.

Теорема 4 (точная асимптотика типа Лапласа для линейного функционала, [9].) Пусть для линейного функционала $\Psi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}$ экстремальная задача

$$-\Psi(u^2 dx) - \langle \mathcal{A}u, u \rangle \rightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{H}, \quad u \geq 0,$$

имеет единственное решение u_0 . Тогда при $T \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m \exp \{ T \Psi(L_T(\eta_\gamma, \cdot)) \} &= \exp \{ T [\Psi(u_0^2 dx) + \langle \mathcal{A}u_0, u_0 \rangle] \} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) m(dx) \int_{-\infty}^{\infty} u_0^3(x) m(dx) (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Правая часть формулы (2.51) записана с учетом равенства (в обозначениях работы [9])

$$\mathbf{E}_{Q_\nu} [u_0(w(0))] = \int_{-\infty}^{\infty} u_0^3(x) m(dx).$$

Лемма 4. При $T \rightarrow \infty$ выполнено соотношение

$$K_1(T) = \int_{-\infty}^{\infty} v_0(x) m(dx) \int_{-\infty}^{\infty} v_0^3(x) m(dx) (1 + o(1)). \quad (2.52)$$

Доказательство. Применим теорему 4 к интегралу (2.50), положив $\Psi = F_1$. Для этого решим экстремальную задачу

$$-\int_{-\infty}^{\infty} V(x) u^2(x) m(dx) - \langle \mathcal{A}u, u \rangle \rightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{H}, \quad u \geq 0.$$

Используя метод множителей Лагранжа, убеждаемся, что в силу предложения 1 эта задача имеет единственное решение v_0 — то же самое, что и основная экстремальная задача (1.6), при этом в силу (2.46) справедливы равенства

$$\begin{aligned} \inf_{u \in \mathcal{H}, u \geq 0} \left[- \int_{-\infty}^{\infty} V(x) u^2(x) m(dx) - \langle \mathcal{A}u, u \rangle \right] \\ = - \int_{-\infty}^{\infty} V(x) v_0^2(x) m(dx) - \langle \mathcal{A}v_0, v_0 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Применение теоремы 4 доказывает формулу (2.52). Лемма 4 доказана.

2.9. Точная асимптотика интеграла $K_2(T)$. Используя (2.43), (2.49), последнее равенство в (2.53) и (1.5), получаем

$$K_2(T) = \exp \{ -TJ(v_0) \} K_3(T), \quad (2.54)$$

где

$$K_3(T) := \int_{\mathcal{O}(T)} \exp \left\{ -T \int_{-\infty}^{\infty} V(x) d(L_T(\eta_\gamma) - \nu_0) \right\} d\mathbf{Q}_T. \quad (2.55)$$

В работе [9, с. 551] имеется формула Тейлора для разложения общего нелинейного функционала $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}$ в окрестности некоторой точки $\mu_0 \in \mathcal{M}$. Применяя эту формулу для нашего линейного функционала F_0 , имеем

$$F_0(L_T(\eta_\gamma)) = F_0(\nu_0) + \int_{-\infty}^{\infty} V(x) d(L_T(\eta_\gamma) - \nu_0), \quad \omega \in \mathcal{O}(T). \quad (2.56)$$

Используя (2.56) и учитывая, что $F_0(\nu_0) = 1$, запишем интеграл (2.55) в виде

$$K_3(T) := \int_{\mathcal{O}_1(T)} \exp \left\{ -T \int_{-\infty}^{\infty} V(x) d(L_T(\eta_\gamma) - \nu_0) \right\} d\mathbf{Q}_T, \quad (2.57)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1(T) := \left\{ \omega: \int_{-\infty}^{\infty} V(x) d(L_T(\eta_\gamma) - \nu_0) < 0, \right. \\ \left. \sup_{n=1,2,\dots} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n d(L_T(\eta_\gamma) - \nu_0) \right| < \delta \right\}. \end{aligned}$$

Для нахождения асимптотики интеграла $K_3(T)$ применим следующую лемму.

Лемма 5 (центральная предельная теорема). (i) *Случайная мера $\sqrt{T}(L_T(\eta_\gamma) - \nu_0)$ при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится относительно меры $\mathbf{Q}_T$ к гауссовской случайной мере κ на $\mathbf{R}$ со средним нуль.*

(ii) *Для любого $s \in \mathbf{R}$ выполнено соотношение*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{Q}_T \left\{ \omega: \sqrt{T} \int_{-\infty}^{\infty} V(x) d(L_T(w) - \nu_0) < s \right\} = \Phi \left(\frac{s}{\sigma} \right),$$

где Φ — стандартная нормальная функция распределения и σ определено в (1.11).

Доказательство. Утверждение (i) леммы выводится с помощью леммы 2.12 из [9]. Докажем п. (ii), т.е. покажем, как получается формула (1.11) для σ^2 , отсутствующая в [9]. Обозначим через $L^2(d\nu_0)$ гильбертово пространство функций, заданных на $\mathbf{R}$, со скалярным произведением

$$\langle y, z \rangle_{L^2(d\nu_0)} := \int_{-\infty}^{\infty} y(x) z(x) v_0^2(x) m(dx).$$

Учитывая п. (i) леммы, определение меры $\mathbf{Q}_T$ в (2.47) и вид характеристической функции меры κ (см. [9, с. 557]), получаем

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{G}V](x) V(x) v_0^2(x) m(dx), \quad (2.58)$$

где, как следует из [9, с. 545], линейный оператор $\mathcal{G}$ отображает гильбертово пространство $L^2(d\nu_0)$ в себя по правилу

$$\begin{aligned} [\mathcal{G}y](x) = 2 \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{v_0(x)} e^{t(\mathcal{A}+V)} [v_0 y](x) \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{\infty} v_0(s) e^{t(\mathcal{A}+V)} [v_0 y](s) m(ds) \right\} dt. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Несложно видеть, что в силу (2.53) имеет место равенство

$$[\mathcal{G}y](x) = [\mathcal{G}(y + c_0)](x), \quad y \in L^2(d\nu_0), \quad c_0 \in \mathbf{R}. \quad (2.60)$$

Используя (2.59), (2.60), (1.9) и (1.10), получаем

$$\begin{aligned} [\mathcal{G}V](x) &= -\lambda_0 d[\mathcal{G}\psi](x) \\ &= -2\lambda_0 d \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{v_0(x)} e^{t(\mathcal{A}+V)} [v_0 \psi](x) \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} v_0(s) e^{t(\mathcal{A}+V)} [v_0 \psi](s) m(ds) \right\} dt, \end{aligned} \quad (2.61)$$

где, напомним, $v_0 \psi \in E_1$.

Пусть Π — действующий в L^2 оператор проектирования на подпространство E_1 , т.е. для $z = z_0 + z_1 \in L^2$, $z_0 \in E_0$, $z_1 \in E_1$, выполнено $\Pi z = z_1$. Тогда из формулы (2.46) следует равенство

$$(\mathcal{A} + V)z = (\mathcal{A} + V)\Pi z, \quad z \in L^2. \quad (2.62)$$

Определим линейный оператор $\mathcal{S}: E_1 \rightarrow E_1$ по правилу

$$(\mathcal{S}y)(x) := [(\mathcal{A} + V)y](x) - v_0(x) \int_{-\infty}^{\infty} [(\mathcal{A} + V)y](s) v_0(s) m(ds), \quad (2.63)$$

где $y \in E_1$. Легко проверить, используя (2.46) и равенство $N(v_0) = 1$, что

$$\mathcal{S}y = \Pi(\mathcal{A} + V)y, \quad y \in E_1. \quad (2.64)$$

Из формул (2.62)–(2.64) следуют соотношения

$$(\mathcal{S}^n y)(x) = ([\Pi(\mathcal{A} + V)]^n y)(x) = [\Pi(\mathcal{A} + V)^n y](x) = [(\mathcal{A} + V)^n y](x) - v_0(x) \int_{-\infty}^{\infty} [(\mathcal{A} + V)^n y](s) v_0(s) m(ds), \quad (2.65)$$

где $y \in E_1$, $n = 1, 2, \dots$. Разлагая в формуле (2.61) операторную экспоненту в ряд и используя (2.65), получаем

$$[\mathcal{G}V](x) = -\frac{2\lambda_0 d}{v_0(x)} \int_0^{\infty} e^{t\mathcal{S}} [v_0 \psi](x) dt, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (2.66)$$

Из предложения 1 и доказательства леммы 4 следует, что спектр оператора $\mathcal{S}: E_1 \rightarrow E_1$ лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq \tau_0$ при некотором $\tau_0 < 0$. Таким образом, с учетом того, что полугруппа процесса Орнштейна–Уленбека является феллеровской (см. [15, гл. 2, п. 5], [17]) с C_0 -условием, приходим к выводу, что в наших условиях применима известная формула теории полугрупп (см. [18, гл. 3, § 3, п. 5]), согласно которой из (2.66) и (1.12) получаем

$$[\mathcal{G}V](x) = \frac{2\lambda_0 d}{v_0(x)} (\mathcal{A} + V)^{-1} [v_0 \psi](x). \quad (2.67)$$

Из формул (2.58), (2.67), (1.9) и (1.12) следует соотношение (1.11). Пункт (ii) леммы 5 доказан.

Лемма 6. При $T \rightarrow \infty$ выполнено соотношение

$$K_2(T) = \exp \{ -TJ(v_0) \} \frac{1}{\sqrt{2\pi T} \sigma} (1 + o(1)).$$

Доказательство. Применение леммы 5 к интегралу (2.57) дает

$$K_3(T) := K_4(T)(1 + o(1)), \quad T \rightarrow \infty, \quad (2.68)$$

где

$$K_4(T) := \int_{-\infty}^0 e^{\sqrt{T}s} d\Phi\left(\frac{s}{\sigma}\right).$$

Используя асимптотику

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} x} e^{-x^2/2} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty,$$

находим

$$K_4(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T} \sigma} (1 + o(1)), \quad T \rightarrow \infty. \quad (2.69)$$

Утверждение леммы следует из формул (2.54), (2.68) и (2.69).

2.10. Вывод формул (1.16), (1.15), (1.19), (1.20). Соотношение (1.16) теперь получаем из формул (2.15), (2.44), (2.48) и лемм 4 и 6.

Доказательство формул (1.15), (1.19), (1.20) проводится аналогично доказательству формулы (1.16), только вместо теоремы 4 используется следующий результат.

Теорема 5 (см. [9]). Пусть для линейного функционала $\Psi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}$ экстремальная задача

$$-\Psi(u^2 dx) - \langle \mathcal{A}u, u \rangle \rightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{H}, \quad u \geq 0,$$

имеет единственное решение u_0 . Тогда при $T \rightarrow \infty$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_a \exp \{T\Psi(L_T(\eta_\gamma, \cdot))\} \\ &= \exp \{T[\Psi(u_0^2 dx) + \langle \mathcal{A}u_0, u_0 \rangle]\} u_0(a) \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) m(dx)(1 + o(1)), \\ & \mathbf{E}_{a,b} \exp \{T\Psi(L_T(\eta_\gamma, \cdot))\} \\ &= \exp \{T[\Psi(u_0^2 dx) + \langle \mathcal{A}u_0, u_0 \rangle]\} u_0(a) u_0(b)(1 + o(1)), \\ & \mathbf{E}_{m,b} \exp \{T\Psi(L_T(\eta_\gamma, \cdot))\} \\ &= \exp \{T[\Psi(u_0^2 dx) + \langle \mathcal{A}u_0, u_0 \rangle]\} u_0(b) \int_{-\infty}^{\infty} u_0^3(x) m(dx)(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Утверждения теоремы 5 вытекают из теорем 2.19, 2.20 (пп. (1), (2)), статьи [9, с. 555, 557] с учетом того, что у нас выполнено соотношение (2.1).

2.11. Масштабное свойство рассматриваемого функционала.

Предложение 7. Для любых фиксированных $T > 0$, $\gamma > 0$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$ справедливы следующие утверждения.

(i) Стационарные гауссовские процессы $\{[\eta_\gamma(t) | \eta_\gamma(0) \stackrel{(d)}{=} m_\gamma], t \geq 0\}$ и $\{[(1/\sqrt{\gamma}) \eta_1(\gamma t) | (1/\sqrt{\gamma}) \eta_1(0) \stackrel{(d)}{=} m_\gamma], t \geq 0\}$ имеют одинаковые распределения.

(ii) Гауссовские процессы $\{[\eta_\gamma(t) | \eta_\gamma(0) = a], t \geq 0\}$ и $\{[(1/\sqrt{\gamma}) \times \eta_1(\gamma t) | \eta_1(0) = \sqrt{\gamma}a], t \geq 0\}$ имеют одинаковые распределения.

(iii) Гауссовские процессы $\{[\eta_\gamma(t) | \eta_\gamma(0) = a, \eta_\gamma(T) = b], t \geq 0\}$ и $\{[(1/\sqrt{\gamma}) \eta_1(\gamma t) | \eta_1(0) = \sqrt{\gamma}a, \eta_1(\gamma T) = \sqrt{\gamma}b], t \geq 0\}$ имеют одинаковые распределения.

(iv) Гауссовские процессы $\{[\eta_\gamma(t) | \eta_\gamma(0) \stackrel{(d)}{=} m_\gamma a, \eta_\gamma(T) = b], t \geq 0\}$ и $\{[(1/\sqrt{\gamma}) \eta_1(\gamma t) | (1/\sqrt{\gamma}) \eta_1(0) \stackrel{(d)}{=} m_\gamma, \eta_1(\gamma T) = \sqrt{\gamma}b], t \geq 0\}$ имеют одинаковые распределения.

Доказательство. Как показывает прямой подсчет, средние и ковариационные функции рассматриваемых пар гауссовских процессов

попарно совпадают. Так, например, оба гауссовских процесса из п. (i) имеют нулевые средние и одну и ту же ковариационную функцию

$$R(t, s) = \frac{1}{2\gamma} e^{-\gamma|t-s|}, \quad t, s \geq 0$$

(см. [16, гл. 4, § 8, пример 8.1]). Гауссовские процессы из пп. (ii)–(iv) получаются из гауссовского процесса п. (i) наложением одного или двух *линейных* условий (гауссовские процессы из п. (ii) описаны также в [15, приложение 1, п. 23] посредством преобразования Дуба). Средние и ковариационные функции возникающих гауссовских процессов легко считаются по известным формулам (см., например, [36, гл. 6, п. 6.5.4], [29, лемма 8]). Предложение 7 доказано.

Лемма 7. Для любых фиксированных $p > 0$, $T > 0$, $\gamma > 0$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, $d > 0$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T |\eta_\gamma(t)|^p dt < d \mid \eta_\gamma(0) = a \right\} \\ &= \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\gamma T} \int_0^{\gamma T} |\eta_1(t)|^p dt < d\gamma^{p/2} \mid \eta_1(0) = a\sqrt{\gamma} \right\}, \\ & \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T |\eta_\gamma(t)|^p dt < d \mid \eta_\gamma(0) \stackrel{(d)}{=} m_\gamma \right\} \\ &= \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\gamma T} \int_0^{\gamma T} |\eta_1(t)|^p dt < d\gamma^{p/2} \mid \eta_1(0) \stackrel{(d)}{=} \sqrt{\gamma} m_\gamma \right\}, \\ & \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T |\eta_\gamma(t)|^p dt < d \mid \eta_\gamma(0) = a, \eta_\gamma(T) = b \right\} \\ &= \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\gamma T} \int_0^{\gamma T} |\eta_1(t)|^p dt < d\gamma^{p/2} \mid \eta_1(0) = a\sqrt{\gamma}, \eta_1(\gamma T) = b\sqrt{\gamma} \right\}, \\ & \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T |\eta_\gamma(t)|^p dt < d \mid \eta_\gamma(0) \stackrel{(d)}{=} m_\gamma, \eta_\gamma(T) = b \right\} \\ &= \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\gamma T} \int_0^{\gamma T} |\eta_1(t)|^p dt < d\gamma^{p/2} \mid \eta_1(0) \stackrel{(d)}{=} \sqrt{\gamma} m_\gamma, \eta_1(\gamma T) = b\sqrt{\gamma} \right\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Утверждение леммы следует непосредственно из предложения 7.

З а м е ч а н и е 2. Из леммы 7 вытекает, что, в принципе, формулы (1.15), (1.19) достаточно доказать для частного значения $\gamma = 1$ и параметров $T_1 = \gamma T \rightarrow \infty$, $d_1 = d\gamma^{p/2}$, $a_1 = a\sqrt{\gamma}$, $b_1 = b\sqrt{\gamma}$, $d_0(1) = \Gamma((p+1)/2)/\sqrt{\pi}$. Укажем, что асимптотики в правых частях формул (1.17), (1.21) удовлетворяют описанному масштабному свойству. Отметим, что если в формуле (1.17) положить $a = 0$, $d = 1$ и в правой части устремить γ к нулю, то мы получим соответствующую точную асимптотику для винеровского процесса (см. [13, формулы (1.22), (1.23) и (3.1)]).

3. Случай $p = 2$. Доказательство следствий 1 и 2

При $p = 2$ граничная задача (1.7) для экстремали $v_0 \geq 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} v''(x) - \gamma x v'(x) - \lambda_0 x^2 v(x) + \beta_0 v(x) &= 0, \quad x \in \mathbf{R}, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} v^2(x) q(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} v^2(x) q(x) = 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} v^2(x) m(dx) &= 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 v^2(x) m(dx) = d, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$m(dx) = q(x) dx, \quad q(x) = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\pi}} \exp\{-\gamma x^2\} dx, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Здесь в силу формулы (1.2) $d_0 = 1/(2\gamma)$.

Лемма 8. *Экстремаль v_0 является симметричной функцией и задается формулой*

$$v_0(x) = \frac{1}{(2\gamma d)^{1/4}} \exp\left\{-\frac{1-2\gamma d}{4d} x^2\right\}, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (3.2)$$

При этом

$$\lambda_0 = \frac{1-4\gamma^2 d^2}{8d^2}, \quad \beta_0 = \frac{1-2\gamma d}{4d}, \quad (3.3)$$

$$J(v_0) = \beta_0 - d\lambda_0 = \frac{(1-2\gamma d)^2}{8d}. \quad (3.4)$$

Доказательство. Дифференциальное уравнение из формулы (3.1)

$$v''(x) - 2\gamma x v'(x) + 2[\beta_0 - \lambda_0 x^2] v(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (3.5)$$

посредством стандартной замены (см., например, [19, ч. 1, гл. 6, п. 25.1]) сводится к хорошо изученному уравнению Вебера [34, гл. 8], [35, гл. 19]. Используя [15, приложение, п. 17] и [35, § 19.3], находим, что фундаментальная пара решений уравнения (3.5) имеет вид

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= \exp\left\{\frac{\gamma x^2}{2}\right\} U\left(-\rho - \frac{1}{2}, \sqrt{2\gamma\theta} x\right), \\ \phi_1(x) &= \exp\left\{\frac{\gamma x^2}{2}\right\} V\left(-\rho - \frac{1}{2}, \sqrt{2\gamma\theta} x\right), \quad x \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

здесь $U(\cdot, \cdot)$, $V(\cdot, \cdot)$ — функции параболического цилиндра (см. [35, гл. 19]),

$$\theta := \left(1 + \frac{2\lambda_0}{\gamma^2}\right)^{1/2} > 1, \quad \rho := \frac{\beta_0}{\gamma\theta} + \frac{1}{2\theta} - \frac{1}{2}. \quad (3.6)$$

Учитывая [35, § 19.8, формулы 19.8.1 и 19.8.2], получаем следующие соотношения, справедливые при $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= \exp \left\{ \frac{\gamma x^2}{2} \right\} \exp \left\{ -\frac{\gamma \theta x^2}{2} \right\} (\sqrt{2\gamma\theta} x)^\rho (1 + o(1)), \\ \phi_1(x) &= \exp \left\{ \frac{\gamma x^2}{2} \right\} \exp \left\{ \frac{\gamma \theta x^2}{2} \right\} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sqrt{2\gamma\theta} x)^{-\rho-1} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Отсюда следует, что второму соотношению из формулы (3.1) удовлетворяет только функция $\phi_0(x)$. Итак, искомая экстремаль имеет вид $v_0(x) = C_0 \phi_0(x)$, $C_0 > 0$, $x \in \mathbf{R}$. Запишем ее, используя обозначение Уиттекера $D_\rho(z)$ для функции параболического цилиндра (см. [34, § 8.2]):

$$v_0(x) = C_0 \exp \left\{ \frac{\gamma x^2}{2} \right\} D_\rho(\sqrt{2\gamma\theta} x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Мы ищем неотрицательную функцию v_0 , поэтому, учитывая описание нулей функции $D_\rho(z)$ в [34, § 8.6], формулу (9) из [34, § 8.2], свойства полиномов Эрмита и три последних соотношения из формулы (3.1), приходим к выводу, что параметр ρ равен нулю, т.е.

$$\frac{\beta_0}{\gamma\theta} + \frac{1}{2\theta} - \frac{1}{2} = 0, \quad (3.8)$$

а сама экстремаль имеет вид

$$v_0(x) = C_0 \exp \left\{ -\frac{\gamma x^2}{2}(\theta - 1) \right\}, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (3.9)$$

Вычислим постоянные $C_0 > 0$, $\theta > 1$, $\beta_0 > 0$, $\lambda_0 > 0$. Подставляя функцию (3.9) в два последних равенства из формулы (3.1), находим

$$\theta = \frac{1}{2\gamma d}, \quad C_0 = \frac{1}{(2\gamma d)^{1/4}}, \quad (3.10)$$

из равенств (3.9), (3.10) следует формула (3.2). Используя соотношения (3.6), (3.8), (3.10), получаем формулы (3.3) и (3.4). Лемма 8 доказана.

Вычисление постоянной σ^2 по формуле (1.11). Для функции $\psi(x) = x^2/d - 1$, $x \in \mathbf{R}$, введем функцию

$$y_0(x) := (\mathcal{A} + V)^{-1}[v_0\psi](x) \quad (3.11)$$

такую, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_0(x) v_0(x) m(dx) = 0. \quad (3.12)$$

Лемма 9. Функция $y_0(x)$ задается формулой

$$y_0(x) = -v_0(x)(x^2 - d), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (3.13)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению (3.11), функция y_0 удовлетворяет уравнению $(\mathcal{A} + V)y = v_0\psi$, или

$$y''(x) - 2\gamma xy'(x) + 2[\beta_0 - \lambda_0 x^2]y(x) = 2v_0(x)\left(\frac{x^2}{d} - 1\right), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (3.14)$$

Дифференциальное уравнение (3.14) является неоднородным по отношению к однородному уравнению (3.5). Зная два линейно независимых решения однородного уравнения (3.5), найдем, применяя известный метод (см. [19, ч. 1, § 24.2, п. (6)]), нужное нам решение уравнения (3.14), удовлетворяющее условию (3.12).

В процессе доказательства леммы 8 мы установили, что однородное уравнение (3.5) имеет два линейно независимых решения $v_0(x) = C_0 \exp\{-\frac{1}{2}\gamma x^2(\theta - 1)\}$ и $\phi_1(x) = \exp\{\frac{1}{2}\gamma x^2\} V(-\frac{1}{2}, \sqrt{2\gamma\theta}x)$, $x \in \mathbf{R}$. Следовательно, используя [19, ч. 1, § 24.2, п. (6)], убеждаемся, что общее решение уравнения (3.14) имеет вид

$$y(x) = C_1 v_0(x) + C_2 \phi_1(x) + 2v_0(x) \int \exp\left\{\frac{s^2}{2d}\right\} \left(\int \exp\left\{-\frac{t^2}{2d}\right\} \left[\frac{t^2}{d} - 1\right] dt \right) ds, \quad (3.15)$$

где $x \in \mathbf{R}$, а C_1 и C_2 — действительные константы.

Из условия (3.12) и формулы (3.7) следует, что в (3.15) $C_2 = 0$. Вычислим повторный интеграл в (3.15). Пусть $\tilde{\gamma}(c, z)$, $c > 0$, обозначает неполную гамму-функцию (см. [35, § 6.5, № 6.5.2]). Применяя тождество (см. [35, § 6.5, № 6.5.22]) $\tilde{\gamma}(c+1, z) = c\tilde{\gamma}(c, z) - z^c e^{-z}$, получаем

$$\begin{aligned} \int \exp\left\{-\frac{x^2}{2d}\right\} \left[\frac{x^2}{d} - 1\right] dx &= (2d)^{1/2} \left[\tilde{\gamma}\left(\frac{3}{2}, \frac{x^2}{2d}\right) - \frac{1}{2} \tilde{\gamma}\left(\frac{1}{2}, \frac{x^2}{2d}\right) \right] \\ &= -x \exp\left\{-\frac{x^2}{2d}\right\}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Учитывая (3.15), (3.16) и то, что $C_2 = 0$, заключаем, что нужное нам решение уравнения (3.14) имеет вид

$$y_0(x) = C_1 v_0(x) - v_0(x)x^2, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (3.17)$$

Найдем постоянную C_1 . Согласно (3.12), (3.17) и двум последним равенствам из формулы (3.1), имеем:

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} y_0(x) v_0(x) m(dx) = C_1 - d,$$

отсюда получаем, что $C_1 = d$. Теперь формула (3.13) следует из соотношений (3.10) и (3.17). Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Имеют место следующие соотношения:*

$$\sigma^2 = \frac{(1 - 4\gamma^2 d^2)^2}{16d}, \quad (3.18)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_0(x) m(dx) = \frac{\sqrt{2}(2\gamma d)^{1/4}}{\sqrt{1+2\gamma d}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_0^3(x) m(dx) = \frac{\sqrt{2}}{(2\gamma d)^{1/4}\sqrt{3-2\gamma d}}. \quad (3.19)$$

Доказательство. Формула (3.18) следует из (1.11), (3.2), (3.11) и (3.13) в результате прямых вычислений. Равенства (3.19) также получаются посредством простых вычислений.

Доказательство следствий 1 и 2. Формулы (1.17), (1.18) получаем из соотношений (1.15), (1.16) теоремы 1 с учетом лемм 8–10. Формулы (1.21), (1.22) следуют из соотношений (1.19), (1.20) теоремы 2 и лемм 8–10.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Donsker M. D., Varadhan S. R. S.* Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. I–IV. — *Comm. Pure Appl. Math.*, 1975, v. 28, p. 1–47; 1975, v. 28, p. 279–301; 1976, v. 29, p. 389–461; 1983, v. 36, p. 525–565.
2. *Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979, 424 с.
3. *Fukushima M., Takeda M.* A transformation of a symmetric Markov process and the Donsker–Varadhan theory. — *Osaka J. Math.*, 1984, v. 21, p. 311–326.
4. *Yamada T.* On some limit theorems for occupation times of one-dimensional Brownian motion and its continuous additive functionals locally of zero energy. — *J. Math. Kyoto Univ.*, 1986, v. 26, № 2, p. 309–322.
5. *Veretennikov A. Yu.* On large deviations for ergodic process empirical measures. — *Topics in Nonparametric Estimation*, 1992, p. 125–133. (*Adv. Soviet Math.*, v. 12.)
6. *Wu L. M.* Grandes déviations pour les processus de Markov essentiellement irréductible, I: temps discret; II: temps continu; III: quelques applications. — *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1991, v. 312, p. 608–614; 1992, v. 314, p. 941–946; 1993, v. 316, p. 853–858.
7. *Wu L. M.* Feynman–Kac semigroups, ground state diffusions, and large deviations. — *J. Funct. Anal.*, 1994, v. 123, № 1, p. 202–231.
8. *Liptser R. S.* Large deviations for occupation measures for Markov process (discrete-time noncompact case), Preprint Tel Aviv. University, 1994.
9. *Kusuoka S., Tamura Y.* Precise estimate for large deviation of Donsker–Varadhan type. — *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 1991, v. 38, p. 533–565.
10. *Bolthausen E., Deuschel J.-D., Tamura Y.* Laplace approximations for large deviations of nonreversible Markov processes. The nondegenerate case. — *Ann. Probab.*, 1995, v. 23, № 1, p. 236–267.
11. *Takeda M.* Exponential decay of lifetimes and a theorem of Kac on total occupation times. — *Potential Anal.*, 1999, v. 11, № 3, p. 235–247.
12. *Питербарг В. И., Фаталов В. Р.* Метод Лапласа для вероятностных мер в банаховых пространствах. — *Успехи матем. наук*, 1995, т. 50, № 6, с. 57–150.
13. *Фаталов В. Р.* Метод Лапласа для малых отклонений гауссовских процессов типа винеровского. — *Матем. сб.*, 2005, т. 196, № 4, с. 135–160.
14. *Бородин А. Н., Ибрагимов И. А.* Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий. — *Тр. МИАН*, 1994, т. 195, с. 3–285.
15. *Бородин А. Н., Салминен П.* Справочник по броуновскому движению. СПб.: Лань, 2000, 639 с.

16. Икэда Н., Ватанабэ С. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986, 445 с.
17. Revuz D., Yor M. Continuous Martingales and Brownian motion. Berlin: Springer, 1999, 602 p.
18. Крейн С. Г. (ред.). Функциональный анализ. М.: Наука, 1972, 544 с.
19. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1961.
20. Dupuis P., Ellis R. S. A Weak Convergence Approach to the Theory of Large Deviations. New York: Wiley, 1997, 479 p.
21. Боровков А. А. Эргодичность и устойчивость случайных процессов. М./Новосибирск: Эдиториал УРСС/Изд-во ИМ СО РАН, 1999, 440 с.
22. de Acosta A. Large deviations for empirical measures of Markov chains. — J. Theoret. Probab., 1990, v. 3, p. 395–431.
23. de Acosta A. Moderate deviations for empirical measures of Markov chains: lower bounds. — Ann. Probab., 1997, v. 25, № 1, p. 259–284.
24. Ney P., Nummelin E. Markov additive processes. II: Large deviations. — Ann. Probab., 1987, v. 15, p. 593–609.
25. Dinwoodie I. H., Ney P. Occupation measures for Markov chains. — J. Theoret. Probab., 1995, v. 8, p. 679–691.
26. Jain N. C. Large deviation lower bounds for additive functionals of Markov processes. — Ann. Probab., 1990, v. 18, № 3, p. 1071–1098.
27. Liptser R. S., Spokoiny V. Moderate deviations type evaluation for integral functionals of diffusion process. — Electronic J. Probab., 1999, v. 4, № 17.
28. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
29. Fatalov V. R. The Laplace method for computing exact asymptotics of distributions of integral statistics. — Math. Methods Statist., 1999, v. 8, № 4, p. 510–535.
30. Bolthausen E. Laplace approximations for sums of independent random vectors, I, II. — Probab. Theory Related Fields, 1986, v. 72, № 2, p. 305–318; 1987, v. 76, № 2, p. 167–206.
31. Berman S. M. Sojourns and Extremes of Stochastic Processes. Pacific Grove: Wadsworth and Brooks/Cole, 1992, 300 p.
32. Kasahara Y., Kôno, N., Ogawa T. On tail probability of local times of Gaussian processes. — Stochastic Process. Appl., 1999, v. 82, № 1, p. 15–21.
33. Kosugi N. Functional limit theorem for occupation times of Gaussian processes, non-critical case. — Osaka J. Math., 1999, v. 36, № 1, p. 149–155.
34. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2; Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974, 295 с.
35. Абрамовиц М., Стиган И. (ред.). Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979, 830 с.
36. Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985, 640 с.
37. Шуренков В. М. Эргодические процессы Маркова. М.: Наука, 1989, 332 с.
38. Fukushima M. Dirichlet Forms and Markov Processes. Amsterdam/Tokyo: North-Holland/Konansha, 1980, 196 p.
39. Fukushima M., Oshima Y., Takeda M. Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes. Berlin de Gruyter, 1994, 392 p.
40. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972, 416 с.
41. Фаталов В. Р. Точные асимптотики больших уклонений для гауссовских мер в гильбертовом пространстве. — Изв. НАН Армении, 1992, т. 27, № 5, с. 43–57.
42. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969, 526 с.

Поступила в редакцию
29.VI.2004

Исправленный вариант
09.XI.2005