Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Бердикулов, Марковские процессы на пространствах с порядковой единицей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 1, 153–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2488>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:01:05

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2008 г.

БЕРДИКУЛОВ М. А.*

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ НА ПРОСТРАНСТВАХ
С ПОРЯДКОВОЙ ЕДИНИЦЕЙ

В настоящей работе изучены марковские операторы на пространствах с порядковой единицей. Примерами этих пространств являются в коммутативном случае M -пространства, в некоммутативном случае эрмитова часть C^* - или W^* -алгебр, в неассоциативном случае JB - или JBW -алгебры. Марковские операторы на перечисленных объектах исследованы Т. А. Сарымсаковым и Ш. А. Аюповым [1]–[5]. На двойственных пространствах для пространств с порядковой единицей – на пространствах с базовой нормой марковские операторы изучены Т. А. Сарымсаковым и Н. П. Зимаковым [6].

В представленной работе вводится понятие регулярности марковского процесса и доказываются свойства регулярности для процессов, удовлетворяющих условию, аналогичному условию (A), рассмотренному в [2]. Доказаны теоремы, связанные с регулярностью, правильностью и периодичностью марковского оператора. Изучены марковские операторы на матричных пространствах, не являющихся алгебрами. Найдены общий вид марковского оператора и достаточные условия для марковости линейного оператора.

Ключевые слова и фразы: пространство с порядковой единицей, марковский оператор, марковский процесс, регулярность, правильность, периодичность, состояние, цепь Маркова, пространство эрмитовых матриц размера 2×2 , p -порядок, p -собственные числа.

1. Предварительные сведения. Следующие определения заимствованы из [7].

Пусть A — действительное линейное упорядоченное пространство. Обозначим A^+ множество положительных элементов A . Элемент $e \in A^+$ называется *порядковой единицей*, если для каждого $a \in A$ существует число $\lambda \in \mathbf{R}^+$ такое, что $-\lambda e \leq a \leq \lambda e$. Если порядок архимедов, то отображение $a \rightarrow \|a\| = \inf\{\lambda > 0: -\lambda e \leq a \leq \lambda e\}$ является нормой. В случае, когда A — банахово пространство относительно этой нормы, говорят, что (A, e) — *пространство с порядковой единицей*.

В дальнейшем под проектором будем понимать линейное, положительное, слабо*-непрерывное отображение $R: A \rightarrow A$, удовлетворяющее условию $R^2 = R$.

Проектор R называется *гладким*, если условие $\langle a, \rho \rangle = 0$ для всех нормальных функционалов ρ при $a \in \ker^+ R = A^+ \cap \ker R$ влечет $\langle a, \rho \rangle = 0$ при $a \in \ker R$.

Проектор Q называется *квазидополнением* проектора R , если

$$\ker^+ R = \operatorname{im}^+ Q, \quad \operatorname{im}^+ R = \ker^+ Q.$$

Проектор R называется *P -проектором*, если он по норме не превосходит 1, гладкий и обладает гладким квазидополнением с нормой, не большей 1.

* Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта, г. Ташкент, Узбекистан; e-mail: musulmonqul@mail.ru

Заметим, что гладкое квазидополнение к P -проектору R всегда единственно и будем обозначать его через R' .

Элементы множества $U = \{u = Re: R \text{ есть } P\text{-проектор}\}$ называются *проективными единицами*.

2. Марковские процессы на пространствах с порядковой единицей.

Пусть (A, e) — пространство с порядковой единицей.

О п р е д е л е н и е 2.1. Линейный оператор $T: A \rightarrow A$ называется *марковским*, если

- а) T положителен, т.е. $Ta \geq 0$ для $a \geq 0$;
- б) $Te = e$;
- в) $Ta_n \nearrow Ta$ при $a_n \nearrow a$, $a_n, a \in A$, $n = 1, 2, \dots$.

П р и м е р ы. 1. Пусть (A, e) — произвольное пространство с порядковой единицей, R — некоторый P -проектор на A . Тогда отображение $T = R + R'$ является марковским оператором, где R' — квазидополнение R .

2. Пусть $A = \mathbf{R} + E$ — обобщенный спин-фактор [8], где E — банахово пространство. Произвольный ограниченный линейный положительный оператор $T: A \rightarrow A$ со свойством $Te = e$ имеет вид $T(\alpha + x) = \alpha + Sx$, где S — линейный ограниченный оператор, отображающий E в себя. В этом случае T является марковским тогда и только тогда, когда $\|S\| \leq 1$.

Пусть V^+ — множество всех нормальных положительных функционалов на A , $S(A)$ — множество всех нормальных состояний на A , т.е. $S(A) = \{\rho \in V^+: \|\rho\| = \rho(e) = 1\}$. Очевидно, $S(A) \subset V^+ \subset A^*$, где A^* — сопряженное пространство к A .

Любой марковский оператор T порождает сопряженный оператор из A^* в A^* , определенный равенством $(\rho T)(a) = \rho(Ta)$, где $\rho \in A^*$, $a \in A$. Очевидно, если $\rho \in V^+$ (или $\rho \in S(A)$), то $\rho T \in V^+$ (соответственно $\rho T \in S(A)$).

Будем говорить, что на пространстве с порядковой единицей A задан *марковский процесс*, если на A определено семейство $\{T_{st}\}_{0 \leq s < t < +\infty}$ марковских операторов, обладающее обобщенным полугрупповым свойством (уравнения Колмогорова–Чепмена)

$$T_{rt} = T_{rs}T_{st}, \quad r \leq s \leq t, \quad (1)$$

причем $T_{ss} = I$, где I — тождественный оператор.

Если $T_{s+r, t+r} = T_{st}$ для любых s, t ($s \leq t$) и $r \geq 0$, то процесс назовем *однородным*. В этом случае T_{st} зависит только от разности $t - s$ и достаточно ограничиться одним параметром: T_r ($r = t - s$). Тогда уравнение (1) имеет вид

$$T_s T_t = T_{s+t}. \quad (2)$$

В примере разд. 3 будет задан марковский процесс, когда задана полугруппа ограниченных операторов в банаховом пространстве E .

О п р е д е л е н и е 2.2. Марковский процесс $\{T_{st}\}$ назовем *регулярным*, если существует $\rho_0 \in S(A)$ такое, что для любых $\mu \in S(A)$, $s > 0$ справедливо соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu T_{st}(a) = \rho_0(a) \quad (3)$$

для любого $a \in A$.

Пусть каждому $t \in \mathbf{R}^+$ поставлен в соответствие нормальный положительный функционал $\varphi_t \in V^+$ на A . При каждом фиксированном $a \in A$ величина $\varphi_t(a)$ является числовой функцией числового аргумента t , причем если $a \geq 0$, то $\varphi_t(a)$ — неотрицательная функция.

Рассмотрим следующее условие, являющееся обобщением условия (A_0) из [3] и условия (A) из [1]:

(A_1) . Существует семейство функционалов $\varphi_t \neq 0$ такое, что для любых $s > 0$ и $\mu \in S(A)$ найдется $t_0 > s$ такое, что

$$\mu T_{st} \geq \varphi_s \quad \text{для всех } t \geq t_0,$$

где $\mu_1 \geq \mu_2$ ($\mu_1, \mu_2 \in V^+$) означает, что $\mu_1(u) \geq \mu_2(u)$ для любой проективной единицы $u \in U$.

Теорема 2.1. Пусть марковский процесс $\{T_{st}\}$ удовлетворяет условию (A_1) . Если числовая функция $\varphi_t(e)$ ограничена снизу некоторым числом $c > 0$, то процесс $\{T_{st}\}$ регулярен. Более того, сходимость к предельному состоянию ν_0 равномерна, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mu T_{st} - \nu_0\|^* = 0$$

для любых $s \geq 0$ и $\mu \in S(A)$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $\varphi_t(e) \equiv c$.

В самом деле, если в условии (A_1) вместо семейства φ_t рассмотреть семейство $\varphi_t^0 = c\varphi_t/\varphi_t(e) \leq \varphi_t$, то это условие остается в силе, причем $\varphi_t^0(e) \equiv c$. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $\varphi_t(e) \equiv c$, где $0 < c < 1$.

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма. В условиях теоремы 2.1 для любых $\mu, \nu \in S(A)$ и $s > 0$ справедливо соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mu T_{st} - \nu T_{st}\|^* = 0.$$

Доказательство. Пусть $\mu, \nu \in S(A)$ и $s > 0$. В силу условия (A_1) существует такое $t_0 > s$, что $\mu T_{st_0} \geq \varphi_s$, $\nu T_{st_0} \geq \varphi_s$ при $t \geq t_0$.

Следовательно,

$$\mu_1 = \frac{\mu T_{st_0} - \varphi_s}{1 - c} \in S(A), \quad \nu_1 = \frac{\nu T_{st_0} - \varphi_s}{1 - c} \in S(A).$$

Отсюда $\mu T_{st_0} = (1 - c)\mu_1 + \varphi_s$; $\nu T_{st_0} = (1 - c)\nu_1 + \varphi_s$, т.е.

$$\mu T_{st_0} - \nu T_{st_0} = (1 - c)(\mu_1 - \nu_1).$$

Применяя условие (A_1) к состояниям $\mu_1, \nu_1 \in S(A)$ и моменту t_0 , аналогичным образом построим $\mu_2, \nu_2 \in S(A)$ и $t_1 > t_0$ такие, что

$$\mu_1 T_{t_0 t_1} - \nu_1 T_{t_0 t_1} = (1 - c)(\mu_2 - \nu_2).$$

С учетом уравнений Колмогорова-Чепмена (1) имеем

$$\begin{aligned} \mu T_{st_1} - \nu T_{st_1} &= \mu T_{st_0} \circ T_{t_0 t_1} - \nu T_{st_0} \circ T_{t_0 t_1} = (\mu T_{st_0} - \nu T_{st_0}) T_{t_0 t_1} \\ &= (1 - c)(\mu_1 - \nu_1) T_{t_0 t_1} = (1 - c)(\mu_1 T_{t_0 t_1} - \nu_1 T_{t_0 t_1}) \\ &= (1 - c)^2(\mu_2 - \nu_2). \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, через k шагов получим, что существуют последовательность $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1}$ и состояния $\mu_k, \nu_k \in S(A)$ такие, что

$$\mu T_{st_{k-1}} - \nu T_{st_{k-1}} = (1 - c)^k(\mu_k - \nu_k),$$

причем в силу (A_1) можно считать, что $t_i > t_{i-1} + 1$. Далее, $\|\mu T_{st_{k-1}} - \nu T_{st_{k-1}}\|^* = (1 - c)^k \|\mu_k - \nu_k\|^* \leq 2(1 - c)^k$.

Так как $t_i > t_{i-1} + 1$, то для любого сколь угодно большого t существует номер k такой, что $t_k \leq t < t_{k+1}$. Поэтому $\|\mu T_{st} - \nu T_{st}\|^* = \|(\mu T_{st_k} - \nu T_{st_k}) T_{t_k t}\|^* \leq \|\mu T_{st_k} - \nu T_{st_k}\|^* \leq 2(1 - c)^{k+1}$. Следовательно, так как $k \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mu T_{st} - \nu T_{st}\|^* = 0.$$

Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 2.1. Пусть $\mu \in S(A)$ и $s > 0$ произвольны. В силу условия (A_1) , существует $t_0 > s$ такое, что $\mu T_{st} \geq \varphi_s$, т.е. $\mu_1 = (\mu T_{st} - \varphi_s)/(1 - c) \in S(A)$ при $t \geq t_0$.

Применив условие (A_1) к состоянию μ_1 и моменту t_0 , найдем $t_1 > t_0 + 1$ такое, что $\mu_1 T_{t_0 t_1} \geq \varphi_{t_0}$, т.е.

$$\frac{\mu T_{st_1} - \varphi_s T_{t_0 t_1}}{1 - c} = \frac{\mu T_{st_0} - \varphi_s}{1 - c} T_{t_0 t_1} \geq \varphi_{t_0}.$$

Значит, $\mu T_{st_1} - \varphi_s T_{t_0 t_1} - (1-c)\varphi_{t_0} \in V^+$, т.е.

$$\mu_2 = \frac{\mu T_{st_1} - \varphi_s T_{t_0 t_1} - (1-c)\varphi_{t_0}}{(1-c)^2} \in S(A).$$

Применив условие (A_1) к состоянию μ_2 и моменту t_1 , найдем $t_2 > t_1 + 1$ такое, что $\mu_2 T_{t_1 t_2} \geq \varphi_{t_1}$. Подставив значение μ_2 , будем иметь

$$\mu T_{st_2} - \varphi_s T_{t_0 t_2} - (1-c)\varphi_{t_0} T_{t_1 t_2} \geq (1-c)^2 \varphi_{t_1},$$

т.е. $\mu T_{st_2} \geq \varphi_s T_{t_0 t_2} + (1-c)\varphi_{t_0} T_{t_1 t_2} + (1-c)^2 \varphi_{t_1}$.

Продолжая этот процесс, через k шагов получим

$$\begin{aligned} \mu T_{st_k} &\geq \varphi_s T_{t_0 t_k} + (1-c)\varphi_{t_0} T_{t_1 t_k} + (1-c)^2 \varphi_{t_1} T_{t_2 t_k} + \dots \\ &\quad + (1-c)^{k-1} \varphi_{t_{k-2}} T_{t_{k-1} t_k} + (1-c)^k \varphi_{t_{k-1}}. \end{aligned}$$

Нормальный функционал в правой части этого неравенства обозначим ν_k . Тогда в силу (A_1) при $t \geq t_k$ получим $\mu T_{st} \geq \nu_k$. Легко подсчитать, что

$$\nu_k(e) = c \sum_{i=0}^k (1-c)^i = 1 - (1-c)^{k+1}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно, k_0 таково, что $(1-c)^{k_0+1} < \varepsilon/2$. Тогда при $t \geq t_{k_0}$, в силу положительности функционала $\mu T_{st} - \nu_{k_0}$, имеем

$$\|\mu T_{st} - \nu_{k_0}\|^* = (\mu T_{st} - \nu_{k_0})(e) = (1-c)^{k_0+1} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4)$$

Значит, для любых $m, n \geq k_0$

$$\|\mu T_{st_m} - \mu T_{st_n}\|^* \leq \|\mu T_{st_m} - \nu_{k_0}\|^* + \|\mu T_{st_n} - \nu_{k_0}\|^* < \varepsilon,$$

так как $t_m, t_n \geq t_{k_0}$. Согласно последнему соотношению, последовательность $\{\mu T_{st_k}\}_{k=1}^\infty$ фундаментальна по норме в $A^* = V$.

В силу полноты V , существует $\nu_0 \in V$ такое, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu T_{st_k} - \nu_0\|^* = 0.$$

Так как все μT_{st_k} , $k = 1, 2, \dots$, являются нормальными состояниями, то в силу аналога теоремы Витали–Хана–Сакса для пространств с порядковой единицей [9] ν_0 также нормальное состояние на A , т.е. $\nu_0 \in S(A)$.

В силу неравенства (4), при $n \geq k_0$ имеем $\|\mu T_{st_n} - \nu_{k_0}\|^* < \varepsilon/2$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим, что $\|\nu_0 - \nu_{k_0}\|^* \leq \varepsilon/2$. Следовательно, при $t \geq t_{k_0}$

$$\|\mu T_{st} - \nu_0\|^* \leq \|\mu T_{st} - \nu_{k_0}\|^* + \|\nu_{k_0} - \nu_0\|^* < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

В силу произвольности ε , отсюда следует существование предела.

Покажем, что ν_0 не зависит от выбора $\mu \in S(A)$ и $s > 0$. Независимость ν_0 от μ вытекает из леммы.

Пусть $s_1, s_2 \geq 0$ произвольны и $s_1 < s_2$. Построим ν_0 по s_2 и покажем, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mu T_{s_1 t} - \nu_0\|^* = 0,$$

и этим будет доказана независимость ν_0 от s .

Положим $\mu' = \mu T_{s_1 s_2} \in S(A)$. В силу независимости ν_0 от μ имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mu T_{s_1 t} - \nu_0\|^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mu T_{s_1 s_2} \circ T_{s_2 t} - \nu_0\|^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mu' T_{s_2 t} - \nu_0\|^* = 0.$$

Теорема 2.1 доказана.

Пусть теперь марковский процесс однороден, т.е. задан однопараметрической полугруппой стохастических операторов $\{T_t\}_{t>0}$ на A . Тогда в условии (A_1) семейство функционалов заменяется одним функционалом; т.е.

(A_0) : существует ненулевое $\mu_0 \in V^+$ такое, что для любого $\mu \in S(A)$ найдется t_0 такое, что $\mu T_t \geq \mu_0$ при $t \geq t_0$.

О п р е д е л е н и е 2.3. Нормальное состояние $\nu \in S(A)$ называется *стационарным распределением* для процесса $\{T_t\}$, если $\nu T_t = \nu$ для любого $t \geq 0$.

Теорема 2.2. Пусть однородный марковский процесс $\{T_t\}$ удовлетворяет условию (A_0) . Тогда существует единственное стационарное распределение $\nu_0 \in S(A)$, такое, что для любого $\mu \in S(A)$ справедливо соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mu T_t - \nu_0\|^* = 0. \quad (5)$$

Доказательство. Существование нормального состояния ν_0 , удовлетворяющего условию (5), вытекает из теоремы 2.1. Необходимо лишь установить инвариантность ν_0 относительно полугруппы $\{T_t\}$. Для любого $a \in A$ и $s > 0$ имеем в силу (5)

$$\nu_0 T_s(a) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\mu T_t)(T_s(a)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu T_{s+t}(a) = \nu_0(a),$$

т.е. $\nu_0 T_s(a) = \nu_0(a)$ для любого $a \in A$, или $\nu_0 T_s = \nu_0$. Покажем, что других стационарных распределений нет. Если $\nu_1 \in S(A)$ — инвариантное состояние, то $\nu_1 T_t = \nu_1$ для любого $t \geq 0$ и, значит, в силу (5)

$$\nu_1(a) = \lim_{t \rightarrow \infty} \nu_1(T_t(a)) = \nu_0(a)$$

для всех $a \in A$. Теорема 2.2 доказана.

Идея рассмотрения марковских операторов на пространствах с порядковой единицей, которое, вообще говоря, не является алгеброй, была подсказана академиком Т. А. Сарымсаковым.

3. Цепи Маркова на матричных пространствах. Цепи Маркова на матричных алгебрах представляют собой аналог классических цепей Маркова с конечным числом состояний [10]. В [11] показано, что статистическая модель квантовой механики может быть построена на основе алгебры фон Неймана — алгебры ограниченных операторов в гильбертовом пространстве.

Как известно, эрмитова матрица положительно определена, если она является квадратом некоторой другой эрмитовой матрицы. Это означает, что алгебраическая структура тесно связана с порядком.

В [12] дано одно новое определение положительной определенности эрмитовой матрицы размера 2×2 , называемой p -порядком, для $p > 1$, которое не согласуется с алгебраической структурой матричных алгебр при $p \neq 2$. То есть, существует эрмитова матрица, квадрат которой не является p -положительно определенной. Пространство матриц с p -порядком не является нормированной алгеброй относительно p -порядковой нормы. p -порядковая норма совпадает с операторной нормой в случае $p = 2$. Пространство (2×2) -матриц является пространством с порядковой единицей с p -порядком.

В данной работе изучены марковские операторы на пространстве (2×2) -матриц с p -порядком. Показано, что методы квантовой теории вероятностей, как отмечено в [11], не исчерпываются рассмотрением алгебраических объектов.

Пусть $M_2(\mathbb{C})$ — алгебра комплексных (2×2) -матриц над $\mathbb{C}$. Множество эрмитовых матриц обозначим $M_2(\mathbb{C})_{sa}$. Произвольная эрмитова матрица T имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} a & b + ic \\ b - ic & d \end{pmatrix}$$

Определение 3.1. Пусть $p > 1$. Числа, определенные формулой

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(a + d \pm (|2b|^p + |2c|^p + |a - d|^p)^{1/p} \right)$$

назовем p -собственными значениями матрицы T .

При $p = 2$ эти числа совпадают с обычными собственными значениями матрицы T .

Определение 3.2. Матрицу $T \in M_2(\mathbb{C})_{sa}$ назовем p -положительно определенной, если $\lambda_{1,2} \geq 0$. В этом случае будем писать $T \geq_p \theta$, где θ — нуль матрица.

Если T — p -положительно определенная матрица, то очевидно $a \geq 0$, $d \geq 0$.

Будем говорить, что $T \geq_p S$ для $T, S \in M_2(\mathbb{C})_{sa}$, если $T - S \geq_p \theta$. Обозначим M_p^+ множество p -положительно определенных матриц.

Аналогично, как и в [12], можно показать, что M_p^+ является порождающим конусом в пространстве $M_2(\mathbb{C})_{sa}$. Пространства $M_2(\mathbb{C})_{sa}$ с p -порядком обозначим через $M_p^2(\mathbb{C})_{sa}$. Единичная матрица E будет p -порядковой единицей в $M_p^2(\mathbb{C})_{sa}$ и норма, определенная равенством

$$\|T\|_p = \frac{1}{2}(|a+d| + (|2b|^p + |2c|^p + |a-d|^p)^{1/p}), \quad (6)$$

совпадает с p -порядковой нормой в $M_2(\mathbb{C})_{sa}$.

Пространство $M_2(\mathbb{C})_{sa}$ не является нормированной алгеброй относительно этой нормы. Это означает, что хотя в $M_2(\mathbb{C})_{sa}$ определено умножение, как йорданово умножение эрмитовых матриц, однако, норма (6) произведений не удовлетворяет аксиомам нормированной алгебры.

Например, при $p = 3$ для матрицы $T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ имеем $\|T\|_p = 2 + \sqrt[3]{65}$, $\|T^2\|_p = 21 + 4\sqrt[3]{65}$ и $\|T^2\|_p > \|T\|_p^2$, что противоречит аксиоме $\|TS\|_p \leq \|T\|_p \|S\|_p$ нормированных алгебр.

Пусть $A = M_p^2(\mathbb{C})_{sa}$ — пространство комплексных эрмитовых (2×2) -матриц с p -порядком, являющееся пространством с порядковой единицей.

О п р е д е л е н и е 3.3. Линейный оператор $P: A \rightarrow A$ будем называть *марковским*, если он обладает следующими свойствами:

(i) $P(E) = E$, E — единичная матрица;

(ii) $P(T) \geq_p \theta$, если $T \geq_p \theta$.

В этом случае условие в) в определении 2.1 автоматически выполняется в силу конечномерности P .

Нетрудно заметить, что суперпозиция марковских операторов также будет марковским оператором.

П р и м е р ы. 1. $P: \begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

$$2. P: \begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & b+ic \\ b-ic & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Пусть t, t', t'', s, s', s'' такие числа, что $|t|^p + |t'|^p + |t''|^p = 1$, $|s|^q + |s'|^q + |s''|^q = 1$, где $p \geq 1$, $q \geq 1$ и $1/p + 1/q = 1$ с условием $ts + t's' + t''s'' = 1$. Положим

$$P(T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+d + ((a-d)s + (bs' + cs''))t & ((a-d)s + 2(bs' + cs''))(t' + it'') \\ ((a-d)s + 2(bs' + cs''))(t' - it'') & a+d - ((a-d)s + 2(bs' + cs''))t \end{pmatrix}.$$

p -положительность этого оператора вытекает из неравенства Гельдера.

Заметим, что марковский оператор P представляется как матрица размера 4×4 . Обозначим e_1, e_2, e_3, e_4 базисные матрицы в $M_p^2(\mathbb{C})_{sa}$.

Пусть $(p_{ij})_{i,j=1}^4$ — матрица оператора P . Ограничимся рассмотрением случая, когда коэффициенты p_{ij} вещественны. Матрицы e_i имеют вид:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $e_1 \geq_p \theta$. По свойству (ii) марковского оператора $Pe_1 \geq_p \theta$. С другой стороны, $Pe_1 = p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + p_{31}e_3 + p_{41}e_4$.

Значит,

$$Pe_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{31} \\ p_{41} & p_{21} \end{pmatrix}$$

p -положительно определено, т.е.

$$p_{31} = p_{41}, \quad p_{11} \geq 0, \quad p_{21} \geq 0, \quad p_{11} + p_{21} \geq (|2p_{31}|^p + |p_{11} - p_{21}|^p)^{1/p}.$$

Аналогично, с помощью e_2 получаем

$$p_{32} = p_{42}, \quad p_{12} \geq 0, \quad p_{22} \geq 0, \quad p_{12} + p_{22} \geq (|2p_{32}|^p + |p_{12} - p_{22}|^p)^{1/p}.$$

Далее, матрица E может быть записана в виде: $E = e_1 + e_2$. Следовательно,
 $P(E) = P e_1 + P e_2 = (p_{11} + p_{12}) e_1 + (p_{21} + p_{22}) e_2 + (p_{31} + p_{32}) e_3 + (p_{41} + p_{42}) e_4 = E$.
 Отсюда имеем

$$p_{11} + p_{12} = 1, \quad p_{21} + p_{22} = 1, \quad p_{31} + p_{32} = 0, \quad p_{41} + p_{42} = 0, \quad \text{т.е. } p_{32} = -p_{31}.$$

Так как P переводит эрмитову матрицу в эрмитову, то должно выполняться условие $(P e_3)^* = P e_4$. Из этого вытекает, что $p_{13} = p_{14}$, $p_{43} = p_{34}$, $p_{33} = p_{44}$, $p_{23} = p_{24}$. Таким образом, матрица марковского оператора P имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{23} \\ p_{31} & -p_{31} & p_{33} & p_{34} \\ p_{31} & -p_{31} & p_{34} & p_{33} \end{pmatrix} \quad (7)$$

с условиями $p_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, 2$, $p_{11} + p_{12} = 1$, $p_{21} + p_{22} = 1$ и $|2p_{31}|^p \leq \min\{|p_{11} + p_{21}|^p - |p_{11} - p_{21}|^p, |p_{12} + p_{22}|^p - |p_{12} - p_{22}|^p\}$.

Одним из основных вопросов теории марковских операторов является исследование предельного поведения итераций P^n данного оператора при $n \rightarrow \infty$. Имеет место следующий результат.

Теорема 3.1. Пусть P — марковский оператор в A . Тогда

- (i) $\|P(T)\|_p \leq \|T\|_p$ для любого $T \in A$;
- (ii) для любого $T \in A$ последовательность $P^n(T)$, $n = 1, 2, \dots$, ограничена по норме;
- (iii) матричные элементы p_{ij}^n оператора P^n , $n = 1, 2, \dots$, ограничены в совокупности;
- (iv) если $\lambda \in \mathbb{C}$ — собственное значение оператора P , то $|\lambda| \leq 1$.

Доказательство. (i) Пусть $T \in A$. Так как E — p -порядковая единица, имеем $-\|T\|_p E \leq_p T \leq_p \|T\|_p E$. Применив к этим неравенствам оператор P , получим

$$-\|T\|_p E \leq_p P(T) \leq_p \|T\|_p E.$$

Это означает, что $\|P(T)\|_p \leq \|T\|_p$.

(ii) Так как оператор P^n является марковским оператором, то по (i) имеем $\|P^n(T)\|_p \leq \|T\|_p$ для всех $n = 1, 2, \dots$.

(iii) вытекает из пункта (ii).

(iv) Пусть $T \in A$, $T \neq \theta$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $P(T) = \lambda T$. Тогда $P^n(T) = \lambda^n T$, $n = 1, 2, \dots$. Следовательно, $\|P^n(T)\|_p = |\lambda|^n \|T\|_p$. Поскольку $\|T\|_p \neq 0$ и последовательность $\|P^n(T)\|_p$, $n = 1, 2, \dots$, ограничена, то $|\lambda| \leq 1$.

Определение 3.4. Будем говорить, что марковский оператор P , заданный на A , является *регулярным*, если существует состояние μ на A такое, что для любого $T \in A$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(T) = \mu(T) E.$$

Здесь предел берется по p -порядковой норме.

Теорема 3.2. Пусть P — марковский оператор в A . Для того чтобы оператор P был регулярным, необходимо и достаточно, чтобы собственные значения оператора P удовлетворяли условиям $\lambda_1 = 1$, $|\lambda_i| < 1$, $i = 2, 3, 4$.

Так как при доказательстве этой теоремы понятие положительной определенности матрицы не играет никакой роли, то доказательство аналогично доказательству теоремы 2.9 из [10].

Определение 3.5. Будем говорить, что марковский оператор P является *правильным*, если для любого $T \in A$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(T).$$

Теорема 3.3. Пусть P — марковский оператор в A . Для того чтобы оператор P был правильным, необходимо и достаточно, чтобы собственные значения оператора P удовлетворяли условиям $\lambda_1 = 1$, $|\lambda_i| \leq 1$, $i = 2, 3, 4$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.11 из [10].

О п р е д е л е н и е 3.6. Марковский оператор P называется *периодическим* периода $d > 1$, если

- а) P^d является правильным;
- б) число d является наименьшим среди целых чисел, для которых выполнено условие а).

Следствие. Для того чтобы марковский оператор P был периодическим периода d , необходимо и достаточно, чтобы

- а') все собственные значения оператора P , по модулю равные единице, были корнями степени d из единицы;
- б') число d являлось наименьшим среди целых чисел, для которых выполнено условие а').

Марковские операторы, приведенные в примерах 1 и 2 этого раздела являются периодическими с периодом 2 и соответствующие им матрицы имеют вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приведем достаточные условия, при которых матрица вида (7) определяет марковский оператор в $A = M_p^2(\mathbb{C})_{sa}$.

Матрицы вида

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+t & t' \\ t' & 1-t \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где t, t' — такие действительные числа, что $|t|^p + |t'|^p = 1$, являются базисными в $M_p^2(\mathbb{C})_{sa}$ [12].

Для того чтобы оператор P был марковским достаточно, чтобы для любой матрицы U вида (8) матрица

$$\begin{aligned} P(U) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t_+ p_{11} + t_- p_{12} + 2p_{13} t' & t_+ p_{31} - t_- p_{31} + (p_{33} + p_{34}) t' \\ t_+ p_{31} - t_- p_{31} + (p_{33} + p_{34}) t' & t_+ p_{21} + t_- p_{22} + 2p_{23} t' \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (p_{11} - p_{12}) t + 2p_{13} t' & 2p_{31} t + (p_{33} + p_{34}) t' \\ 2p_{31} t + (p_{33} + p_{34}) t' & 1 + (p_{21} - p_{22}) t + 2p_{23} t' \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $t_+ = (1+t)$, $t_- = (1-t)$, была p -положительно определенной. Из того, что $P(U) \geq_p \theta$ имеем

$$1 + (p_{11} - p_{12}) t + 2p_{13} t' \geq 0, \quad (9)$$

$$1 + (p_{21} - p_{22}) t + 2p_{23} t' \geq 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (2 + (p_{11} - p_{12} + p_{21} - p_{22}) t + 2(p_{13} + p_{23}) t')^p &\geq |4p_{13} t + 2(p_{33} + p_{34}) t'|^p \\ &+ |(p_{11} - p_{12} - p_{21} + p_{22}) t + 2(p_{13} - p_{23}) t'|^p. \end{aligned} \quad (11)$$

В силу произвольности t и t' , неравенства (9), (10) эквивалентны соответственно неравенствам

$$|(p_{11} - p_{12}) t + 2p_{13} t'| \leq 1, \quad |(p_{21} - p_{22}) t + 2p_{23} t'| \leq 1.$$

По неравенству Гельдера они вытекают соответственно из следующих неравенств:

$$|p_{13} - p_{12}|^q + |2p_{13}|^q \leq 1, \quad |p_{21} - p_{22}|^q + |2p_{23}|^q \leq 1. \quad (12)$$

Здесь q — число, определяемое из равенства $1/p + 1/q = 1$.

Аналогично, неравенство (11) вытекает из неравенства

$$\begin{aligned} (2 + (p_{11} - p_{12} + p_{21} - p_{22}) t + 2(p_{13} + p_{23}) t')^p \\ \geq (|4p_{13} t + 2(p_{33} + p_{34}) t'|^q + |(p_{11} - p_{12} - p_{21} + p_{22}) t + 2(p_{13} - p_{23}) t'|^q)^p. \end{aligned}$$

В силу произвольности t и t' , а также так как $p_{11} + p_{12} = 1$ и $p_{21} + p_{22} = 1$, имеем

$$(1 + p_{13} + p_{23})^p \geq (|2p_{13}|^q + |(p_{33} + p_{34})^q)^p + (|1 - p_{12} - p_{21}|^q + |p_{13} - p_{23}|^q)^p, \quad (13)$$

$$(2 - p_{12} - p_{22})^p \geq (|2p_{13}|^q + |(p_{33} + p_{34})^q)^p + (|1 - p_{12} - p_{21}|^q + |p_{13} - p_{23}|^q)^p, \quad (14)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.4. Пусть P — линейный оператор в A , определенный матрицей (7). Если элементы P удовлетворяют соотношениям (12), (13) и (14), то P — марковский оператор.

Кроме того, имеет место следующий результат.

Теорема 3.5. Если матричные элементы P удовлетворяют соотношениям (12), (13) и (14), причем все неравенства являются строгими, то P — регулярный марковский оператор.

Используя эти теоремы, можно с помощью матричных коэффициентов марковского оператора сделать следующие выводы.

Пусть P — марковский оператор, определенный матрицей (7). Рассмотрим характеристическое уравнение $\det(p_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0$. Прибавим к первому столбцу определителя $\det(p_{ij} - \lambda \delta_{ij})$ второй столбец. Тогда

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & p_{12} & p_{13} & p_{13} \\ 1 - \lambda & p_{22} - \lambda & p_{23} & p_{23} \\ 0 & -p_{31} & p_{33} - \lambda & p_{34} \\ 0 & -p_{31} & p_{34} & p_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда после несложных преобразований получим

$$(1 - \lambda)(p_{33} - p_{34} - \lambda)((p_{22} - p_{12} - \lambda)(p_{33} + p_{34} - \lambda) + 2p_{31}(p_{23} - p_{13})) = 0.$$

Предположим, что выполнено хотя бы одно из двух условий: $p_{23} = p_{13}$, $p_{31} = 0$. В этом случае собственные значения оператора P имеют вид $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = p_{22} - p_{12}$, $\lambda_{3,4} = p_{33} \pm p_{34}$.

По теореме 3.1, $|\lambda_i| \leq 1$, $i = 1, 2, 3, 4$. Поэтому возможны лишь следующие случаи:

- 1) $|p_{22} - p_{12}| < 1$, $|p_{33} \pm p_{34}| < 1$. По теореме 3.2 оператор P является регулярным.
- 2) $p_{22} - p_{12} \neq -1$, $p_{33} \pm p_{34} \neq -1$. По теореме 3.3 оператор P является правильным.
- 3) Хотя бы одно из чисел $p_{22} - p_{12}$, $p_{33} \pm p_{34}$ равно 1. В этом случае, в силу следствия, оператор P является периодическим периода 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сарымсаков Т. А. Полуполя и теория вероятностей. Ташкент: ФАН, 1981, 89 с.
2. Сарымсаков Т. А. Некоммутативные вероятностные пространства на O^* -алгебрах. — Докл. АН СССР, 1978, т. 241, № 2, с. 297–300.
3. Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А. Регулярность цепей Маркова на O^* -алгебрах. — Докл. АН УзССР, 1979, № 4, с. 3–5.
4. Аюпов Ш. А. Эргодические теоремы для цепей Маркова на O^* -алгебрах. — Докл. АН УзССР, 1978, № 7, с. 11–13.
5. Аюпов Ш. А. Независимость и марковские процессы в вероятностных пространствах на йордановых алгебрах. — В сб. «Предельные теоремы для случайных процессов и смежные вопросы». Ташкент: ФАН, 1982, с. 28–41.
6. Сарымсаков Т. А., Зимаков Н. П. Эргодический принцип для марковских полугрупп в упорядоченных нормированных пространствах с базой. — Докл. АН СССР, 1986, т. 289, № 3, с. 554–558.
7. Alfsen E. M., Shultz F. W. Noncommutative spectral theory for affine functions spaces on convex sets. — Mem. Amer. Mat. Soc., 172. Providence, R.I.: AMS, 1976, 122 p.
8. Бердикулов М. А., Одилов С. Обобщенные спин-факторы. — Узб. матем. журн., 1995, № 1, с. 12–17.
9. Бердикулов М. А., Жураев И. М. Нормальные положительные функционалы на пространствах с порядковой единицей. — Узб. матем. журн., 1996, № 4, с. 22–28.

10. Сарымсаков Т. А. Введение в квантовую теорию вероятностей. Ташкент: ФАН, 1985, 184 с.
11. Холево А. С. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. М.: Наука, 1980, 320 с.
12. Бердикулов М. А. Новая порядковая структура действительных симметричных (2×2) -матриц. — Владикав. матем. журн., 2004, т. 6, в. 4, с. 12–24.

Поступила в редакцию
18.XI.2002

Исправленный вариант
25.I.2006

© 2008 г.

МАНИА А. Д.*

СТОХАСТИЧЕСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В БОЛЬШОЙ СИСТЕМЕ ОДНОТИПНЫХ ЧАСТИЦ¹⁾

Рассматривается базовая стохастическая модель системы N одинаковых частиц с изотропной k -частичной синхронизацией, $k \geq 2$. В пределе, когда число частиц N и время $t = t(N)$ растут к бесконечности, изучается асимптотика разброса частиц. Выделены три временные зоны изменения $t(N)$, где поведение системы имеет качественно различный характер. Кроме этого, обсуждается случай, когда диапазон начального расположения частиц растет с увеличением N .

Ключевые слова и фразы: системы взаимодействующих частиц, многомерные марковские процессы, стохастическая синхронизация, k -частичные взаимодействия, модели среднего поля.

1. Введение. Большой класс вероятностных моделей допускает интерпретацию в терминах систем стохастических частиц с взаимодействием типа синхронизации. В общих словах, речь идет о специальном классе скачкообразных марковских процессов $x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ с непрерывным временем и значениями в $\mathbf{R}^N$, динамика которых символически задается генератором вида $L = L_0 + L_s$. Переменная $x_i \in \mathbf{R}$ интерпретируется как координата i -й частицы, свободная динамика L_0 соответствует независимым перемещениям отдельных частиц, а L_s отвечает за синхронизирующие скачки $x = (x_1, \dots, x_N) \rightarrow x' = (x'_1, \dots, x'_N)$, которые в предшествующих работах [1]–[4] подчинены следующему общему правилу:

$$\{x'_1, \dots, x'_N\} \subset \{x_1, \dots, x_N\}, \quad \{x'_1, \dots, x'_N\} \neq \{x_1, \dots, x_N\}.$$

Первые математические статьи по стохастической синхронизации относились к случаю $N = 2$ (см., например, [6]). Многочастичные системы ($N > 2$), изученные к настоящему моменту, различаются, в частности, видом синхронизирующего взаимодействия. Так, в работах [1], [2] взаимодействие происходило в *парах*, а в работе [4] изучено *трехчастичное* взаимодействие. В настоящей заметке мы рассмотрим *общее k -частичное* симметризованное взаимодействие, которое определяется в терминах синхронизирующих отображений.

При исследовании коллективного поведения системы частиц мы сталкиваемся с наложением двух противоположных тенденций: с течением времени свободная динамика увеличивает «разброс» частиц, тогда как синхронизирующее взаимодействие

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: manita@mech.math.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 06-01-00662, 08-01-90431).