Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Альбеверио, М. В. Козлов, О возвратности и транзиентности зависящих от состояния ветвящихся процессов в случайной среде, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 4, 641–660

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp249>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:56:40

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.

Выходит 4 раза в год

Москва • Наука • ТВП

Том 48

Выпуск 4, 2003 год

октябрь, ноябрь, декабрь

© 2003 г.

АЛЬБЕВЕРИО С.*, КОЗЛОВ М.В.**

О ВОЗВРАТНОСТИ И ТРАНЗИЕНТНОСТИ ЗАВИСЯЩИХ ОТ СОСТОЯНИЯ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ¹⁾

В работе рассматривается зависящий от состояния ветвящийся процесс в случайной среде Z_n — обобщение модели Смита–Вилкинсона. Критерий возвратности/транзиентности Ламперти–Керстинга для моделей роста применяется к процессу $X_n := \ln Z_n$, $Z_n \geq 3$.

Ключевые слова и фразы: ветвящиеся процессы, зависимость от состояния, случайная среда, суммы независимых величин, логарифмические моменты.

1. Введение. Предварительные соображения. В этой работе мы исследуем условия возвратности и транзиентности марковских цепей с множеством состояний $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ и вероятностями перехода (в.п.), которые являются смесями

$$p_{ij} := \int p_{ij}(y) \mu(dy) \quad (1.1)$$

в.п. $p_{ij}(y)$, $i, j \in \mathbf{N}_0$, соответствующих при каждом y из некоторого множества $\mathscr{Y}$, зависящему от состояния ветвящегося процессу Гальтона–Ватсона. Именно, мы предполагаем, что семейство в.п. $\{p_{ij}(y); y \in \mathscr{Y}\}$

* Институт прикладной математики, Университет Бонна, d-53115 Бонн, Германия; SFBG11; BiBoS; IZKS; CERFIM (Locarno); Асс. Arch.; e-mail: albeverio@uni-bonn.de

** Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: kozlov_mikhail@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке DFG (проект DFG № 436 RUS 113/534); а также при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 01-01-00649a).

определено соотношениями

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(y) s^j := f^i(s; y, i),$$

где

$$f(s; y, m) := \sum_{j=0}^{\infty} p_j(y, m) s^j, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

— семейство вероятностных производящих функций (п.ф.), зависящее от параметров $m \in \mathbf{N}_0$ и $y \in \mathcal{Y}$. Предполагаем, что в $\mathcal{Y}$ выделена σ -алгебра подмножеств $\mathfrak{B}$, п.ф. $f(s; y, m)$ являются $\mathfrak{B}$ -измеримыми функциями от y и μ — вероятностная мера на $\mathfrak{B}$. Марковская цепь (Z_n) с в.п.

$$\mathbf{P}\{Z_{n+1} = j \mid Z_n = i\} = p_{ij}, \quad (1.3)$$

определенными в (1.1), (1.2), трактуется как зависящий от состояния ветвящийся процесс в случайной среде.

Полезно дать непосредственное определение (Z_n) в терминах случайных величин (сл.в.). Введем последовательность

$$\boldsymbol{\eta} := (\eta_0 \equiv \eta, \eta_1, \eta_2, \dots) \quad (1.4)$$

независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных элементов в $(\mathcal{Y}, \mathfrak{B})$ с распределением вероятностей μ . Пусть для фиксированных $n, m \in \mathbf{N}_0$ сл.в.

$$\zeta_{in}(m), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.5)$$

— н.о.р. условно относительно среды (1.4) с условной п.ф.

$$\mathbf{E}(s^{\zeta_{in}(m)} \mid \boldsymbol{\eta}) = f(s; \eta_n, m) \quad \text{п.н.}$$

(так что условное распределение вероятностей $\zeta_{in}(m)$ зависит от η_n , но не от n), а для различных n последовательности (1.5) независимы (при этом неважно, есть ли какая-либо зависимость между последовательностями (1.5) для различных m). Процесс (Z_n) , определенный рекуррентно соотношениями

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \zeta_{in}(Z_n) \quad (1.6)$$

(где сумма по пустому множеству индексов полагается нулевой), таков же, как и задаваемый в.п. (1.3).

Последовательность (1.4) трактуется как случайно изменяющаяся во времени среда, действующая через свое значение η_n на размножение Z_n частиц в момент времени n ; потомство

$$\zeta_{in}(Z_n), \quad i = 1, 2, \dots, Z_n,$$

Z_n частиц n -го поколения представляет собой набор случайных величин, условно н.о.р. при условии η_n, Z_n . Устранив зависимость от Z_n , мы приходим к хорошо известной модели Смита–Вилкинсона [1]. Зависимость от состояния, насколько нам известно, в теории ветвящихся процессов в случайной среде ранее не рассматривалась. Наш подход состоит в замечании, что в силу условной формы закона больших чисел имеет место приближенное равенство по вероятности

$$Z_n^{-1} \sum_{i=1}^{Z_n} \zeta_{in}(Z_n) \cong f'(1; \eta_n, Z_n), \quad Z_n \gg 1.$$

Дж. Ламперти ([2]–[4]) был, по-видимому, первым, кто ввел критерии возвратности и транзиентности для неотрицательного процесса X_n , опирающиеся на асимптотику условных моментов

$$\mathbf{E}(\Delta X_n | X_n = x), \quad \mathbf{E}(\Delta X_n^2 | X_n = x), \quad \Delta X_n := X_{n+1} - X_n,$$

при $x \rightarrow \infty$. Позднее Г. Керстинг ([5]) значительно усовершенствовал критерии возвратности/транзиентности Ламперти. Для применения критериев Ламперти–Керстинга оказалось необходимым преобразовать процесс Z_n , переходя к $\ln Z_n$. Такого рода преобразование (точнее, $\ln(Z_n + 1)$) использовалось в работах второго автора ([6], [7]) при применении принципа инвариантности Ламперти ([4]) к модели Смита–Вилкинсона. Однако избежать неопределенности $\ln 0$ удобнее, полагая

$$X_n := L(Z_n), \quad L(z) = \begin{cases} \ln z & \text{для } z \geq e, \\ e^{-1}z & \text{для } z \leq e. \end{cases} \quad (1.7)$$

Значительное количество работ ряда авторов связано с моделями роста, представленными рекуррентными соотношениями

$$X_{n+1} = X_n + g(X_n) + \xi_{n+1} \geq 0$$

с некоторой функцией $g(x)$, $x \geq 0$, и квадратично интегрируемой мартингал-разностью ξ_n , условные вторые моменты которой

$$\sigma^2(X_n) := \mathbf{E}(\xi_{n+1}^2 | X_0, \dots, X_n)$$

зависят только от настоящего состояния процесса (X_n) . Предположим дополнительно, что для некоторого $C > 0$ и сколь угодно малого $\delta > 0$

$$\mathbf{E}(|\xi_{n+1}|^{2+\delta} | X_0, \dots, X_n) \leq C(\sigma(X_n))^{2+\delta} \quad \text{п.н.} \quad (1.8)$$

Положим

$$h(x) := 2xg(x)(\sigma(x))^{-2}. \quad (1.9)$$

Тогда (см. [5]):

$$\text{если } g^+(x) := \max(0, g(x)) = o(x), \quad x \rightarrow \infty, \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} h(x) < 1, \quad \text{то} \\ \mathbf{P}\{X_n \text{ сходится или } \varliminf_{n \rightarrow \infty} X_n \leq c\} = 1 \quad \text{для некоторого } c > 0; \quad (1.10)$$

$$\text{если } g(x) = O(x(\ln x)^{-\beta}), \quad x \rightarrow \infty, \quad \beta > \frac{2}{\delta}, \quad \varliminf_{x \rightarrow \infty} h(x) > 1, \quad \text{то} \\ \mathbf{P}\{X_n \rightarrow \infty\} > 0, \quad \mathbf{P}\{X_n \rightarrow \infty \text{ или } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n \leq c\} = 1 \\ \text{для некоторого } c > 0. \quad (1.11)$$

Мы закончим этот пункт, кратко изложив ход последующих рассуждений. Чтобы применить критерии (1.10), (1.11) к процессу (1.7), необходимо оценить

$$\mathbf{E}(\Delta X_n | Z_n = m), \quad \mathbf{D}(\Delta X_n | Z_n = m), \quad \mathbf{E}(|\Delta X_n|^{2+\delta} | Z_n = m).$$

Мы начинаем с оценки условных ожиданий $\mathbf{E}(\cdot | Z_n = m, \eta_n)$. Заметим, что $\mathbf{P}\{Z_{n+1} \leq z | Z_n = m, \eta_n\} =: F_m(z; \eta_n)$ для фиксированного $\eta_n = y$ является функцией распределения суммы $S_m = \sum_{i=1}^m \zeta_i$ независимых сл.в. ζ_i с общей п.ф. $f(s; y, m)$ (в п. 3 рассматриваются произвольные н.о.р. неотрицательные сл.в. ζ_i). Таким образом,

$$\mathbf{E}(L(Z_{n+1}) | Z_n = m, \eta_n = y) = \mathbf{E}L(S_m) = \int L(x) dF_m(x; y).$$

Ниже мы берем $m \geq 3$, так что $L(Z_n) = \ln m$ (см. (1.7)). Введем обозначения

$$\alpha_m(y) := f'(1; y, m), \quad \sigma_m^2(y) := f''(1; y, m) + \alpha_m(y) - \alpha_m^2(y). \quad (1.12)$$

Заменим $L(x)$ ее приближением по формуле Тейлора

$$L(x) \cong \ln x_0 + x_0^{-1}(x - x_0) - 2^{-1}x_0^{-2}(x - x_0)^2,$$

$x_0 = \alpha_m(y) m$, $|x| < \alpha_m(y) m/2$, отбрасывая остаточный член, и заметим, что

$$\int (x - x_0) dF_m(x; y) = 0, \quad \int (x - x_0)^2 dF_m(x; y) = \sigma_m^2(y) m. \quad (1.13)$$

В результате получаем следующие приближенные равенства (не принимающие во внимание остатки):

$$\mathbf{E}(\Delta X_n | Z_n = m, \eta_n = y) = \int L(x) dF_m(x; y) - \ln m \cong \ln \alpha_m(y), \quad (1.14)$$

$$\mathbf{E}(\Delta X_n | Z_n = m) = \int \mu(dy) \int L(x) dF_m(x; y) \cong \mathbf{E} \ln \alpha_m(\eta), \quad (1.15)$$

$$\mathbf{E}\left[(\Delta X_n - \ln \alpha_{Z_n}(\eta_n))^2 | Z_n = m, \eta_n\right] \cong \frac{\sigma_m^2(\eta_n)}{m \alpha_m^2(\eta_n)}. \quad (1.16)$$

После элементарных преобразований из (1.14), (1.16) получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\Delta X_n \mid Z_n = m) &= \mathbf{E}[\mathbf{E}(\Delta X_n^2 \mid Z_n = m, \eta_n) \mid Z_n = m] \\ &\quad - (\mathbf{E}(\Delta X_n \mid Z_n = m))^2 \cong \mathbf{D}(\ln \alpha_m(\eta)). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Таким образом, можно было бы ожидать, что для функции (см. (1.9))

$$h(\ln m) := 2 \ln m \frac{\mathbf{E}(\Delta X_n \mid X_n = \ln m)}{\mathbf{D}(\Delta X_n \mid X_n = \ln m)} \quad (1.18)$$

имеет место представление

$$h(\ln m) = 2 \ln m \frac{\mathbf{E} \ln \alpha_m(\eta)}{\mathbf{D} \ln \alpha_m(\eta)} + o(1), \quad m \rightarrow \infty. \quad (1.19)$$

Сюда, однако, необходимо внести поправку, которая связана с влиянием малых значений сл.в. $\alpha_m(\eta_n)$, как на величину моментов в (1.18), так и на свойство возвратности процесса. Введем события

$$\mathcal{A}_m(\eta) := \{\alpha_m(\eta) m > a\}, \quad (1.20)$$

где $a > 0$ — постоянная, о выборе которой будет сказано позже. Обозначим $\overline{\mathcal{A}}$ дополнение к событию $\mathcal{A}$ и $\chi(\mathcal{A})$ — индикатор события $\mathcal{A}$. В теореме 2.1 устанавливается (при определенных ограничениях) следующий точный вариант соотношений (1.15), (1.17):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\Delta X_n \chi(\mathcal{A}_m(\eta_n)) \mid Z_n = m) &= \mathbf{E}(\ln \alpha_m(\eta) \cdot \chi(\mathcal{A}_m(\eta))) \\ &\quad + o(1)(\ln m)^{-1} \mathbf{D}(\ln \alpha_m(\eta) \cdot \chi(\mathcal{A}_m(\eta))), \\ \mathbf{D}(\Delta X_n \chi(\mathcal{A}_m(\eta_n)) \mid Z_n = m) &\sim \mathbf{D}(\ln \alpha_m(\eta) \cdot \chi(\mathcal{A}_m(\eta))). \end{aligned}$$

Наши предположения таковы, что события $\overline{\mathcal{A}}_m(\eta_n)$ не влияют на асимптотику функции (1.18), именно

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\Delta X_n \chi(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta_n)) \mid Z_n = m) &= o(1)(\ln m)^{-1} \mathbf{D}(\ln \alpha_m(\eta) \cdot \chi(\mathcal{A}_m(\eta))), \\ \mathbf{D}(\Delta X_n \chi(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta_n)) \mid Z_n = m) &= o(1) \mathbf{D}(\ln \alpha_m(\eta) \cdot \chi(\mathcal{A}_m(\eta))). \end{aligned}$$

Все это приводит к следующему варианту представления (1.19):

$$h(\ln m) = 2 \ln m \frac{\mathbf{E}(\ln \alpha_m(\eta) \cdot \chi(\mathcal{A}_m(\eta)))}{\mathbf{D}(\ln \alpha_m(\eta) \cdot \chi(\mathcal{A}_m(\eta)))} + o(1).$$

В случае, когда сл.в. $\alpha_m(\eta)$ сходятся по распределению к 1 при $m \rightarrow \infty$, более эффективным может оказаться критерий Керстинга, применяемый непосредственно к процессу (Z_n) ; соответствующий результат содержится в теореме 2.2.

З а м е ч а н и е 1.1. В последующем используется специальный выбор $a = 2e$ постоянной в определении события (1.20). Наши построения сохраняются при произвольном выборе $a = 2x_0 > 0$ и замене функции $L(\cdot)$ (см. (1.7)) на

$$L(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) + 1 & \text{при } x \geq x_0, \\ \frac{x}{x_0} & \text{при } 0 \leq x \leq x_0. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 1.2. Представим на минуту, что

$$\mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta)) \geq \varepsilon > 0 \quad \text{для всех достаточно больших } m. \tag{1.21}$$

Тогда, как показывают следующие выкладки, условие (1.21) приводит к возвратности процесса вне непосредственной связи с асимптотикой условных моментов:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{Z_{n+1} = 0 \mid Z_n = m\} &= \mathbf{E}\mathbf{P}\{Z_{n+1} = 0 \mid Z_n = m, \eta_n\} \\ &= \mathbf{E}\left[(1 - \mathbf{P}(\zeta_{1n}(m) \geq 1 \mid \eta_n))^m\right] \geq \mathbf{E}\left[(1 - \mathbf{E}(\zeta_{1n}(m) \mid \eta_n))^m; \overline{\mathcal{A}}_m(\eta_n)\right] \\ &= \mathbf{E}\left[(1 - \alpha_m(\eta))^m; \overline{\mathcal{A}}_m(\eta)\right] \geq \left(1 - \frac{a}{m}\right)^m \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta)) \\ &\sim e^{-a} \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta)) \geq c > 0. \end{aligned}$$

Более того, как показано в лемме 4.1,

$$\mathbf{E}\left(\Delta X_n \chi(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta_n)) \mid Z_n = m\right) = (-\ln m + O(1)) \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta)).$$

В предположении (1.21) это соотношение может означать, что ожидание $\mathbf{E}(\Delta X_n \mid Z_n = m)$ окажется порядка $(-\ln m)$. Критерий Керстинга в части транзиентности в таком случае не применим ввиду требования, чтобы условное ожидание приращений процесса было $o(\ln m)$, а это требование нельзя исключить (см. [5, пример 3.А]).

Результаты работы приведены в п. 2, там же содержатся иллюстративные примеры. В п. 3 получены оценки логарифмических моментов сумм н.о.р. неотрицательных сл.в., которые применяются в п. 4 при доказательстве теоремы 2.1. Теорема 2.2 доказана в п. 5.

Второй автор выражает признательность за гостеприимство, оказанное ему в Институте прикладной математики Боннского университета во время пребывания там весной 2001 года.

2. Предположения, результаты, примеры. К уже введенным обозначениям добавим следующие:

$$\lambda_m(y) := \ln \alpha_m(y), \quad \beta_m^2(y) := \sigma_m^2(y) \alpha_m^{-2}(y), \tag{2.1}$$

$$p := 2 + \delta, \quad 0 < \delta \leq 1, \\ \rho_m^p(y) = \mathbf{E}(|\zeta_{in}(m) - \alpha_m(\eta_n)|^p \mid \eta_n = y) \alpha_m^{-p}(y), \quad (2.2)$$

$$\hat{X} := X \cdot \chi(\mathcal{A}_m(\eta)) \quad (\mathcal{A}_m(\eta) = \{\alpha_m(\eta) m > 2e\}), \quad (2.3)$$

$$\mathbf{E}_m X := \mathbf{E}(X \mid Z_n = m), \quad \mathbf{D}_m X := \mathbf{E}_m(X - \mathbf{E}_m X)^2, \quad (2.4)$$

где в качестве X будут выступать различные связанные с процессом (X_n) сл.в. Будем писать $a_m \sim b_m$, когда $a_m/b_m \rightarrow 1$ при $m \rightarrow \infty$.

Первое предположение

$$(A1) \quad \mathbf{E}[\ln^p(\alpha_m(\eta) m) \hat{\rho}_m^p(\eta)] < \infty \quad \text{для всех } m$$

в совокупности со следующим:

$$(A2) \quad 0 < \mathbf{D} \hat{\lambda}_m(\eta) < \infty \quad \text{для всех } m,$$

обеспечивает конечность появляющихся ниже математических ожиданий. Именно, принимая во внимание моментное неравенство

$$(\mathbf{E}|X|^q)^{1/q} \leq (\mathbf{E}|X|^p)^{1/p}, \quad 0 < q < p, \quad (2.5)$$

получаем, что $\beta_m(y) \leq \rho_m(y)$ (в предположении $\alpha_m(y) > 0$), а отсюда, с учетом того, что

$$\ln(\alpha_m(\eta) m) > 1 \quad \text{при } \alpha_m(\eta) m > 2e, \quad (2.6)$$

находим

$$\mathbf{E} \hat{\beta}_m^2(\eta) \leq \mathbf{E}[\ln(\alpha_m(\eta) m) \hat{\beta}_m^2(\eta)] \leq \mathbf{E}[\ln^2(\alpha_m(\eta) m) \hat{\beta}_m^2(\eta)] < \infty. \quad (2.7)$$

Вторая группа предположений имеет форму, подобную условиям критерия Керстинга, если заменить там приращение ΔX_n на его аппроксимацию $\lambda_{Z_n}(\eta_n)$:

$$(B1) \quad \mathbf{E}|\hat{\lambda}_m(\eta) - \mathbf{E} \hat{\lambda}_m(\eta)|^p = O(1)(\mathbf{D}(\hat{\lambda}_m(\eta)))^{p/2},$$

$$(B2a) \quad \mathbf{E} \hat{\lambda}_m(\eta) = o(1) \ln m,$$

$$(B2b) \quad \mathbf{E} \hat{\lambda}_m(\eta) = O(1) \ln m \cdot (\ln \ln m)^{-\beta}, \quad \beta > 2\delta^{-1}.$$

Третья группа предположений обеспечивает необходимую точность приближения моментов приращений ΔX_n при условии $Z_n = m$ соответствующими моментами сл.в. $\hat{\lambda}_m(\eta)$:

$$(C1) \quad \mathbf{E}[\ln^2(\alpha_m(\eta) m) \hat{\beta}_m^2(\eta)] m^{-1} \ln m = o(1) \mathbf{D} \hat{\lambda}_m(\eta),$$

$$(C2) \quad \ln^2 m \cdot \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta)) = o(1) \mathbf{D}\widehat{\lambda}_m(\eta),$$

$$(C3) \quad \ln^p m \cdot \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta)) + \mathbf{E}\left(\ln^p(\alpha_m(\eta) m) \widehat{\rho}_m^p(\eta)\right) m^{-p/2} = O(1)(\mathbf{D}\widehat{\lambda}_m(\eta))^{p/2}.$$

З а м е ч а н и е 2.1. Предположение (A1) является следствием (C3), (A2) и выделено нами для ясности.

Теорема 2.1. В предположениях (A), (B1), (B2a), (C) имеют место соотношения:

$$\mathbf{E}_m \Delta X_n = \mathbf{E}\widehat{\lambda}_m(\eta) + o(1)(\ln m)^{-1} \mathbf{D}\widehat{\lambda}_m(\eta), \quad (2.8)$$

$$\mathbf{D}_m(\Delta X_n) \sim \mathbf{D}\widehat{\lambda}_m(\eta), \quad (2.9)$$

$$\mathbf{E}_m |\Delta X_n - \mathbf{E}_m \Delta X_n|^p = O(1)(\mathbf{D}\widehat{\lambda}_m(\eta))^{p/2}, \quad (2.10)$$

$$h(\ln m) = 2 \ln m \cdot \frac{\mathbf{E}\widehat{\lambda}_m(\eta)}{\mathbf{D}\widehat{\lambda}_m(\eta)} + o(1). \quad (2.11)$$

Возвратность и транзитивность процесса (X_n) (в смысле, указанном в (1.10), (1.11)) осуществляется, соответственно, в случаях

$$\varlimsup_{m \rightarrow \infty} h(\ln m) < 1 \quad \text{и} \quad \varliminf_{m \rightarrow \infty} h(\ln m) > 1,$$

где в последнем случае условие (B2a) заменяется на (B2b).

В последующих примерах берутся бернуллиевская случайная среда (1.4):

$$\eta_j = +1 \quad \text{с вер.} \quad 0 < \gamma < 1, \quad \eta_j = -1 \quad \text{с вер.} \quad 1 - \gamma, \quad (2.12)$$

и дробно-линейная п.ф. для (условного) распределения вероятностей числа потомков:

$$f(s; y, m) = 1 - (1 - s) \alpha_m(y) \left(1 + \frac{b_m(y)}{2\alpha_m(y)}(1 - s)\right)^{-1}, \quad (2.13)$$

$b_m(y) > 0$, $\alpha_m(y) \geq 0$. Заметим, что при $b_m(y) = 2\alpha_m^2(y)$ п.ф. (2.13) соответствует геометрическому распределению вероятностей.

П р и м е р 2.1. Положим

$$b_m(y) = 2\alpha_m^2(y), \quad \alpha_m(1) = a \left(1 + \frac{\theta}{\ln m}\right), \quad m > 1, \quad \alpha_m(-1) = a^{-1},$$

и пусть $a > 1$, $\gamma = \frac{1}{2}$ (см. (2.12)). Из соотношений

$$\ln \alpha_m(1) = \ln a + \frac{\theta}{\ln m} + o\left(\frac{1}{\ln m}\right), \quad \ln \alpha_m(-1) = -\ln a,$$

$$\mathbf{E} \ln \alpha_m(\eta) = \frac{\theta}{2 \ln m} + o\left(\frac{1}{\ln m}\right), \quad \mathbf{D} \ln \alpha_m(\eta) \rightarrow \ln^2 a,$$

$$h(\ln m) \rightarrow \frac{\theta}{\ln^2 a}$$

вытекает, что все предположения теоремы 2.1 выполняются и, тем самым, возвратность или транзиентность имеют место, соответственно, при верхнем или нижнем знаке неравенства $\theta \leq \theta_{\text{cr}} := \ln^2 a$. В данном случае применим также критерий Ламперти [2], который вместо (1.8) налагает более жесткое требование

$$\mathbf{E}_m |\Delta X_n - \mathbf{E}_m \Delta X_n|^p \leq B < \infty. \quad (2.14)$$

Оно, как нетрудно убедиться, здесь выполняется. Также легко проверить, что при $\theta = \theta_{\text{cr}}$ справедливо соотношение (3.13) из [2] (со знаком равенства), и, тем самым, $\theta = \theta_{\text{cr}}$ соответствует возвратности.

Пример 2.2. Положим в (2.13)

$$b_m(y) = 2\alpha_m^2(y), \quad \alpha_m(1) = \theta e^{a_m}, \quad \alpha_m(-1) = e^{-a_m},$$

$a_m = \sqrt{\ln m}$, $\theta > 0$, и пусть $\gamma = \frac{1}{2}$ (см. (2.12)). Тогда

$$\mathbf{E} \ln \alpha_m(\eta) = 2^{-1} \ln \theta, \quad \mathbf{D} \ln \alpha_m(\eta) \sim \ln m, \quad h(\ln m) \rightarrow \ln \theta,$$

так что $\theta_{\text{cr}} = e$. Поскольку условие (2.14) здесь, очевидно, не выполняется, то применим только критерий Керстинга, и возвратность/транзиентность имеет место при верхнем/нижнем знаке в неравенстве $\theta \leq e$, при $\theta = e$ требуется дополнительное исследование.

Замечание 2.2. Обсудим возможность применения критерия Керстинга непосредственно к процессу (Z_n) , минуя его логарифмическое преобразование. Имеем

$$\mathbf{E}_m(\Delta Z_n | \eta_n) = m(\alpha_m(\eta_n) - 1), \quad \mathbf{E}_m \Delta Z_n = m(\mathbf{E} \alpha_m(\eta) - 1), \quad (2.15)$$

а воспользовавшись формулой

$$\mathbf{D}X = \mathbf{E}\mathbf{D}(X | Y) + m\mathbf{D}\mathbf{E}(X | Y) \quad \text{при } X = \Delta Z_n, Y = \eta_n,$$

получаем

$$\mathbf{D}_m \Delta Z_n = m\mathbf{E}\sigma_m^2(\eta) + m^2\mathbf{D}\alpha_m(\eta), \quad (2.16)$$

так что

$$h(m) = 2m(\mathbf{E}\alpha_m(\eta) - 1) \left(\mathbf{E}\sigma_m^2(\eta) + m\mathbf{D}(\alpha_m(\eta)) \right)^{-1}. \quad (2.17)$$

В примерах 2.1, 2.2 критерий, основанный на функции (2.17), неприменим, так как нарушено условие $\mathbf{E}_m \Delta Z_n = o(m)$ при $\mathbf{E}_m \Delta Z_n > 0$. Таким образом, для применимости критерия необходимо условие $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E}\alpha_m(\eta) \leq 1$. Наиболее интересным представляется случай

$\mathbf{E}\alpha_m(\eta) \rightarrow 1$, $m \rightarrow \infty$, при этом граница между возвратностью и транзитностью приходится на ситуацию, когда

$$h(m) \rightarrow 1, \quad \text{т.е.} \quad 2m(\mathbf{E}\alpha_m(\eta) - 1) \sim \mathbf{E}\sigma_m^2(\eta) + m\mathbf{D}\alpha_m(\eta).$$

При этом условии

$$\mathbf{D}\alpha_m(\eta) = O(1)(\mathbf{E}\alpha_m(\eta) - 1) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Как показывает следующий пример, в подобной ситуации модель оказывается мало отличимой в отношении возвратности от соответствующего зависящего от состояния процесса Гальтона–Ватсона, т.е. случайность среды на свойство возвратности влияния не оказывает.

Пример 2.3. В (2.13) положим

$$b_m(y) = 2\alpha_m^2(y), \quad \alpha_m(1) = 1 + \Delta_m, \quad \Delta_m > 0, \quad \Delta_m \rightarrow 0, \quad \alpha_m(-1) = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \ln \alpha_m(\eta) &= \gamma \Delta_m + O(\Delta_m^2), \quad \mathbf{D} \ln \alpha_m(\eta) \sim \gamma(1 - \gamma) \Delta_m^2, \\ h(\ln m) &\sim 2 \ln m \cdot ((1 - \gamma) \Delta_m)^{-1} \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Предположения (А), (В), (С2), очевидно, выполняются. Предположения (С1), (С3) сводятся к следующим:

$$m^{-1} \ln^3 m = o(1) \Delta_m^2, \quad m^{-p/2} \ln^p m = O(1) \Delta_m^p,$$

из которых второе вытекает из первого. Таким образом, в случае, когда

$$m^{-1/2} (\ln m)^{3/2} = o(1) \Delta_m, \quad (2.18)$$

имеет место транзитность. Если же условие (2.18) не выполнено, то теорема 2.1 не приложима. Однако, применение критерия Керстинга непосредственно к процессу (Z_n) оказывается вполне эффективным. Имеем (см. замечание 2.2):

$$\mathbf{E}_m \Delta Z_n = \gamma m \Delta_m, \quad \mathbf{D}_m \Delta Z_n = 2m + \gamma(1 - \gamma) m^2 \Delta_m^2 + O(\Delta_m), \quad (2.19)$$

$$\mathbf{E}_m (|Z_{n+1} - m - \gamma m \Delta_m|^p \mid \eta_n = 1)$$

$$\leq 2^p \mathbf{E}_m (|Z_{n+1} - m(1 + \Delta_m)|^p \mid \eta_n = 1)$$

$$+ 2^p ((1 - \gamma) m \Delta_m)^p = O(1)(m^{p/2} + (m \Delta_m)^p) = O(1)(\mathbf{D}_m \Delta Z_n)^{p/2},$$

где использованы неравенства (4.3), (3.6). Аналогичные выкладки верны при $\eta_n = -1$. Таким образом, можно воспользоваться критерием, основанным на функции (2.17):

$$h(m) \sim 2\gamma m \Delta_m \cdot [2 + \gamma(1 - \gamma) m \Delta_m^2]^{-1}.$$

В частности, положив $\Delta_m = \theta m^{-1}$, находим значение $\theta_{\text{cr}} = \gamma^{-1}$, так что возвратность/транзиентность имеет место, соответственно, при $\theta < \gamma^{-1}/\theta > \gamma^{-1}$.

Наконец, отметим, что зависящий от состояния процесс Гальтона–Ватсона с п.ф.

$$f(s; m) = 1 - \frac{(1-s)\alpha_m}{1 + \alpha_m(1-s)}, \quad \alpha_m := 1 + \gamma\Delta_m, \quad \Delta_m = \frac{\theta}{m},$$

имеющий такое же, как и в (2.19), среднее, и дисперсию, асимптотически эквивалентную дисперсии в (2.19), имеет и то же самое значение $\theta_{\text{cr}} = \gamma^{-1}$.

Введем предположения:

$$(A3) \quad 0 < \mathbf{E}\sigma_m^2(\eta) + \mathbf{D}\alpha_m(\eta) < \infty \quad \text{для всех } m;$$

$$(B3) \quad \mathbf{E}|\alpha_m(\eta) - \mathbf{E}\alpha_m(\eta)|^p = O(1)(\mathbf{D}\alpha_m(\eta))^{p/2};$$

$$(B4) \quad \mathbf{E}\sigma_m^p(\eta) = O(1)(\mathbf{E}\sigma_m^2(\eta))^{p/2};$$

$$(B5) \quad m^{1-p'/2} \mathbf{E}(\rho_m^{p'}(\eta) \alpha_m^{p'}(\eta) \sigma_m^{p-p'}(\eta)) = O(1)(\mathbf{E}\sigma_m^2(\eta))^{p/2},$$

где $p' > p$ — свободный параметр;

$$(B6a) \quad \mathbf{E}\alpha_m(\eta) - 1 = o(1);$$

$$(B6b) \quad \mathbf{E}\alpha_m(\eta) - 1 = O(1)(\ln m)^{-\beta}, \quad \beta > \frac{2}{\delta}.$$

Теорема 2.2. При условиях (A3), (B3)–(B5) возвратность и транзиентность процесса (Z_n) (в смысле, указанном в (1.10), (1.11)) осуществляются, соответственно, в случаях

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} h(m) < 1 \quad \text{и} \quad \underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} h(m) > 1$$

при, соответственно, условиях (B6a) и (B6b); функция $h(m)$ определена в (2.17).

Пример 2.4. Модифицируем условия примера 2.3, положив $b_m(1) =: b_m \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, и оставив другие параметры модели без изменения. Тем самым, для $h(\ln m)$ остается прежняя асимптотика, а возможность применения критерия, основанного на $h(\ln m)$, зависит, как и выше, от выполнения условий (C1), (C3). Имеем:

$$\sigma_m^2(1) = b_m + \alpha_m(1) - \alpha_m^2(1) \sim b_m,$$

$$\rho_m^p(1) = \sum_{k=0}^{\infty} |k - \alpha_m(1)|^p p_k(1, m) (\alpha_m(1))^{-p},$$

где $p_k(1, m)$ — коэффициенты степенного ряда для функции (2.13) при $y = 1$ — имеют вид

$$p_k(1, m) = \alpha_m(1) \left(1 + \frac{b_m}{2\alpha_m(1)}\right)^{-2} \left(\frac{b_m}{b_m + 2\alpha_m(1)}\right)^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Применяя тауберову теорему для степенных рядов, получаем $\rho_m^p(1) \sim c_p b_m^{p-1}$, $c_p = \text{const} > 0$. Тем самым, условия (C1), (C3) принимают вид

$$m^{-1} \ln^3 m \cdot b_m = o(1) \Delta_m^2, \quad m^{-p/2} \ln^p m \cdot b_m^{p-1} = O(1) \Delta_m^p. \quad (2.20)$$

Записав второе из соотношений (2.20) в виде $m^{-1} \ln^2 m \cdot b_m^{2(p-1)/p} = O(1) \Delta_m^2$ и учитывая, что $2(p-1)/p > 1$, заключаем, что в предположении $\ln m = O(b_m)$ первое из условий (2.20) вытекает из второго. В частности, при

$$b_m = m^\kappa, \quad 0 < \kappa < 1, \quad (2.21)$$

и условии

$$m^{-1/2} m^{\kappa(1-1/p)} \ln m = O(\Delta_m) \quad (2.22)$$

имеет место транзиентность процесса (p можно взять сколь угодно близким к 2). Таким образом, как и в примере 2.3, теорема 2.1 не дает полной картины асимптотического поведения процесса. Однако применение критерия Керстинга непосредственно к процессу (Z_n) оказывается эффективным, для чего воспользуемся теоремой 2.2. Имеем:

$$\mathbf{E} \alpha_m(\eta) = 1 + \gamma \Delta_m, \quad \mathbf{E} |\alpha_m(\eta) - \mathbf{E} \alpha_m(\eta)|^p = c_{\gamma,p} \Delta_m^p,$$

$$\mathbf{D} \alpha_m(\eta) = \gamma(1 - \gamma) \Delta_m^2,$$

$$\mathbf{E} \sigma_m^2(\eta) \sim \gamma b_m, \quad \mathbf{E} \left(\rho_m^{p'}(\eta) \alpha_m^{p'}(\eta) \sigma_m^{p-p'}(\eta) \right) \sim c_{p'} b_m^{p-1}.$$

Тем самым, условия (A3), (B3), (B4), (B6a) выполняются, условие (B5) приобретает вид

$$m^{1-p'/2} b_m^{p-1} = O(1) b_m^{p/2} \quad \text{или} \quad b_m = O(1) m^{(p'-2)/(p-2)}. \quad (2.23)$$

Выбирая b_m в виде (2.21) (так что (2.23) выполняется) и полагая $\Delta_m = \theta m^{-1+\kappa}$ (при этом (B6b) также выполняется), получим

$$h(m) \sim 2\gamma m \Delta_m [\gamma b_m + \gamma(1 - \gamma) m \Delta_m^2]^{-1} \longrightarrow 2\theta, \quad m \rightarrow \infty,$$

и $\theta_{\text{cr}} = \frac{1}{2}$. Таким образом, при $\theta \leq \frac{1}{2}$ имеем, соответственно, возвратность и транзиентность, для $\theta = \frac{1}{2}$ теорема 2.2 ответа не дает.

Отметим, что, как и выше, зависящий от состояния процесс Гальтона–Ватсона с п.ф.

$$f(s; m) = 1 - (1 - s) \alpha_m \left(1 + \frac{\gamma b_m}{2\alpha_m} (1 - s)\right)^{-1}, \quad \alpha_m = 1 + \gamma \Delta_m,$$

имеет то же самое значение $\theta_{\text{cr}} = \frac{1}{2}$.

З а м е ч а н и е 2.3. Вероятностные процессы в случайной среде, зависящие от состояния, представляют собой весьма широкий класс марковских цепей, к асимптотическому анализу которых можно применить теорию суммирования независимых случайных величин. В настоящей работе сделан первый шаг — выделен подкласс процессов, возвратность/транзиентность которых определяется условным при условии среды распределением вероятностей среднего числа потомков.

З а м е ч а н и е 2.4. Формальное обобщение модели с заменой (1.1) на

$$p_{ij} := \int p_{ij}(y) \mu_i(dy),$$

где меры μ_i зависят, таким образом, от состояния процесса, не приводит, как нетрудно видеть, к расширению класса процессов, но может оказаться удобным в приложениях. Все наши результаты, тем самым, сохраняются, а переформулировка утверждений облегчается, если ввести в качестве случайной среды матрицу независимых сл.в. $\eta_n(m)$ с распределением μ_m , не зависящим от n .

3. Логарифмические моменты сумм н.о.р. сл.в. В этом пункте оцениваются моменты (см. (1.7)) сл.в. $L(S_m)$, $S_m := \sum_{i=1}^m \zeta_i$, где ζ_i , $i = 1, 2, \dots$, — н.о.р. неотрицательные сл.в. Мы следующим образом трансформируем обозначения пункта 2:

$$\alpha := \mathbf{E}\zeta_i, \quad \sigma^2 := \mathbf{D}\zeta_i, \quad \beta := \sigma\alpha^{-1}, \quad \rho^p := \mathbf{E}|\zeta_i - \alpha|^p \alpha^{-p},$$

предполагая, что $\sigma > 0$, $\rho < \infty$, $p > 2$. Ввиду неравенства $0 \leq L^k(x) \leq c_k x$ все моменты у $L(S_n)$ конечны. Положим

$$F_m(x) := \mathbf{P}\{S_m \leq x\}, \quad F_m^0(x) := F_m(x + \alpha m).$$

Предложение 3.1. *Имеют место следующие неравенства: при $m \geq 2$, $\alpha m \geq 2\epsilon$*

$$\left| \int (L(x) - \ln(\alpha m)) dF_m(x) \right| \leq B_1 \ln(\alpha m) \beta^2 m^{-1}, \quad (3.1)$$

$$\int (L(x) - \ln(\alpha m))^2 dF_m(x) \leq B_2 \ln^2(\alpha m) \beta^2 m^{-1}, \quad (3.2)$$

$$\int |L(x) - \ln(\alpha m)|^p dF_m(x) \leq B_p \ln^p(\alpha m) \rho^p m^{-p/2}, \quad (3.3)$$

где B_k — абсолютные постоянные.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Далее мы используем равенство $L(x) = \ln x$ для $x \geq \alpha m/2$ ($\geq \epsilon$) и неравенства

$$\int_{|x| \geq y} |x| dF_m^0(x) \leq \sigma^2 m y^{-1}, \quad (3.4)$$

$$\int_{|x| \geq y} dF_m^0(x) \leq \begin{cases} \sigma^2 m y^{-2}, \\ A_p \rho^p \alpha^p m^{p/2} y^{-p}, \end{cases} \quad (3.5)$$

где $y > 0$. Верхнее соотношение в (3.5) есть неравенство Чебышева, а нижнее вытекает из неравенства (см. [8, гл. III, теорема 20])

$$\mathbf{E}|S_m - \alpha m|^p \leq A_p \rho^p \alpha^p m^{p/2}, \quad (3.6)$$

где A_p — абсолютные постоянные.

Интегралы в (3.1)–(3.3), взятые по интервалу $\mathcal{A} \subseteq [0, \infty)$, обозначим $I_k(\mathcal{A})$, соответственно, при $k = 1, 2, p$ и введем разбиение области интегрирования $[0, \infty)$ на части

$$\mathcal{A}_1 := \left[0, \frac{\alpha m}{2}\right], \quad \mathcal{A}_2 := \left(\frac{\alpha m}{2}, \frac{3\alpha m}{2}\right), \quad \mathcal{A}_3 := \left[\frac{3\alpha m}{2}, \infty\right).$$

Начнем с оценки $I_1(\mathcal{A}_2)$. Интегрируя разложение Тейлора

$$\ln(\alpha m + x) - \ln \alpha m = (\alpha m)^{-1}x - (\alpha m + \theta x)^{-2}x^2, \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

по интервалу $|x| < \alpha m/2$ и принимая во внимание (1.13), имеем:

$$\begin{aligned} I_1(\mathcal{A}_2) &= \int_{|x| < \alpha m/2} (\ln(\alpha m + x) - \ln(\alpha m)) dF_m^0(x) \\ &= -(\alpha m)^{-1} \int_{|x| \geq \alpha m/2} x dF_m^0(x) \\ &\quad - 2^{-1} \int_{|x| < \alpha m/2} (\alpha m + \theta x)^{-2} x^2 dF_m^0(x). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Заменяя в (3.7) $(\alpha m + \theta x)^{-2}$ на $(\alpha m/2)^{-2}$ и используя (1.13), получаем

$$2^{-1} \int_{|x| < \alpha m/2} (\alpha m + \theta x)^{-2} x^2 dF_m^0(x) \leq 2\sigma^2 \alpha^{-2} m^{-1}. \quad (3.8)$$

Далее, имеем:

$$(\alpha m)^{-1} \int_{|x| \geq \alpha m/2} x dF_m^0(x) \leq (\alpha m)^{-1} \sigma^2 m \left(\frac{\alpha m}{2}\right)^{-1} = 2\sigma^2 \alpha^{-2} m^{-1}. \quad (3.9)$$

Подставляя (3.8), (3.9) в (3.7), получаем

$$|I_1(\mathcal{A}_2)| \leq 4\beta^2 m^{-1}. \quad (3.10)$$

Отметим, что оценка (3.8) по порядку достаточно точна: нижняя граница интеграла (3.8) есть

$$\begin{aligned} &2^{-1} \left(\frac{3\alpha m}{2}\right)^{-2} \left(\sigma^2 m - \int_{|x| \geq \alpha m/2} x^2 dF_m^0(x)\right) \\ &\geq \frac{2}{9} (1 - 2^{p-2} A_p \beta^{-2} \rho^p m^{1-p/2}) \sigma^2 \alpha^{-2} m^{-1}. \end{aligned}$$

Это означает, что для остальных интегралов $I_1(\mathcal{A}_1)$, $I_1(\mathcal{A}_3)$ достаточно получить оценки, близкие по порядку к (3.10).

Используя неравенство

$$0 \leq \ln(\alpha m + x) - \ln(\alpha m) \leq (\alpha m)^{-1} x \quad \text{при } x \geq 0, \quad (3.11)$$

получаем оценку

$$I_1(\mathcal{A}_3) \leq (\alpha m)^{-1} \int_{x \geq \alpha m/2} x dF_m^0(x) \leq 2\beta^2 m^{-1}. \quad (3.12)$$

Для интеграла $I_1(\mathcal{A}_1)$ имеем границу

$$(0 \geq) I_1(\mathcal{A}_1) \geq -\ln(\alpha m) F_m^0\left(-\frac{\alpha m}{2}\right) \geq -4 \ln(\alpha m) \beta^2 m^{-1}. \quad (3.13)$$

Теперь (3.1) следует из (3.10), (3.12), (3.13).

В случае $I_2(\mathcal{A}_2)$ из разложения Тейлора получаем:

$$\begin{aligned} (\ln(\alpha m + x) - \ln(\alpha m))^2 &= \frac{1 + \ln(\alpha m) - \ln(\alpha m + \theta x)}{(\alpha m + \theta x)^2} x^2 \\ &\leq (1 + \ln 2)(\alpha m)^{-2} x^2 \quad \text{при } |x| < \frac{\alpha m}{2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Интегрируя (3.14) по интервалу $|x| < \alpha m/2$, находим

$$I_2(\mathcal{A}_2) \leq 4(1 + \ln 2) \beta^2 m^{-1}.$$

Как и выше, имеем

$$I_2(\mathcal{A}_3) \leq \beta^2 m^{-1}, \quad I_2(\mathcal{A}_1) \leq 2^p A_p \ln^2(\alpha m) \rho^p m^{-p/2},$$

откуда следует (3.2).

Наконец, возводя в степень $p/2$ обе части неравенства (3.14), получим оценку

$$I_p(\mathcal{A}_2) \leq 2^p (1 + \ln 2)^{p/2} A_p \rho^p m^{-p/2},$$

которая вместе с оценками

$$I_p(\mathcal{A}_3) \leq A_p \rho^p m^{-p/2}, \quad I_p(\mathcal{A}_1) \leq 2^p A_p \ln^p(\alpha m) \rho^p m^{-p/2}$$

дает неравенство (3.3).

4. Оценки условных моментов. В последующем без оговорок предполагаются выполненными предположения (A1), (A2) пункта 2.

Лемма 4.1. Для $m \geq 2$ и $1 \leq \kappa \leq p$

$$\mathbf{E}_m(L^\kappa(Z_{n+1}); \overline{\mathcal{A}}_m(\eta_n)) \leq C_p \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta)) \quad (4.1)$$

с некоторой абсолютной постоянной $C_p > 1$.

Доказательство. Применяя неравенство Иенсена, запишем:

$$\int L(x) dF_m(x; y) \leq L\left(\int x dF_m(x; y)\right) = L(\alpha_m(y) m).$$

Интегрируя это соотношение по области $\{y: \alpha_m(y) m \leq 2e\}$, получим следующую границу для выражения (4.1) при $\kappa = 1$:

$$\int_{\alpha_m(y) m \leq 2e} \mu(dy) \int L(x) dF_m(x; y) \leq \ln(2e) \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta)).$$

Для $\kappa > 1$ имеем

$$(\ln^\kappa x)'' = \kappa(\kappa - 1 - \ln x) \ln^{\kappa-2} x \cdot x^{-2} < 0 \quad \text{при } x > e^{\kappa-1},$$

так что функция $\ln^\kappa(x + e^{\kappa-1}) > L(x)^\kappa$, $x \geq 0$, выпукла вверх и по неравенству Иенсена

$$\int L^\kappa(x) dF_m(x; y) \leq \ln^\kappa(\alpha_m(y) m + e^{\kappa-1}).$$

Отсюда, как и выше, получаем (4.1) для $\kappa > 1$.

Следствие 4.1. Для $m \geq 3$ и $1 \leq \kappa \leq p$

$$\mathbf{E}_m(|\Delta X_n|^\kappa; \overline{\mathcal{A}}_m(\eta)) \leq 2^p (C_p + \ln^\kappa m) \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta)). \quad (4.2)$$

Действительно, используя элементарное неравенство

$$|u + v|^\kappa \leq 2^\kappa (|u|^\kappa + |v|^\kappa) \quad (4.3)$$

с $u = L(Z_{n+1})$, $v = -L(m)$ и применяя (4.1), приходим к (4.2).

Лемма 4.2. Для $m \geq 2$

$$\left| \mathbf{E}_m \widehat{\Delta X}_n - \mathbf{E} \widehat{\lambda}_m(\eta) \right| \leq B_1 \mathbf{E} \left(\ln(\alpha_m(\eta) m) \widehat{\beta}_m^2(\eta) \right) m^{-1}. \quad (4.4)$$

Доказательство следует из соотношения (3.1) после замены $F_m(x)$, α , β , ρ на соответственно $F_m(x; y)$, $\alpha_m(y)$, $\beta_m(y)$, $\rho_m(y)$ и интегрирования относительно $\mu(dy)$ по области $\{y: \alpha_m(y) m > 2e\}$.

Следствие 4.2. Для $m \geq 3$

$$|\mathbf{E}_m \Delta X_n - \mathbf{E} \widehat{\lambda}_m(\eta)| \leq B'_1 \left[\mathbf{E}(\ln(\alpha_m(\eta)) \widehat{\beta}_m^2(\eta)) m^{-1} + \ln m \cdot \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta)) \right]. \quad (4.5)$$

Лемма 4.3. Для $m \geq 3$

$$\left| \mathbf{E}_m (\widehat{\Delta X}_n)^2 - \mathbf{E} \widehat{\lambda}_m^2(\eta) \right| \leq B'_2 \mathbf{E} \left(\ln^2(\alpha_m(\eta) m) \widehat{\beta}_m^2(\eta) \right) m^{-1} \ln m. \quad (4.6)$$

До к а з а т е л ь с т в о. Интегрируя тождество

$$\begin{aligned} & \int (L(x) - \ln m)^2 dF_m(x; y) - \ln^2 \alpha_m(y) \\ &= \int (L(x) - \ln(\alpha_m(y) m))^2 dF_m(x; y) \\ &+ 2 \ln \alpha_m(y) \cdot \int (L(x) - \ln(\alpha_m(y) m)) dF_m(x; y) \end{aligned} \quad (4.7)$$

относительно меры $\mu(dy)$ по области $\{y: \alpha_m(y) m > 2e\}$ и применяя к интегралам в правой части (4.7) оценки (3.1), (3.2) (ср. с леммой 4.2), получаем для левой части соотношения (4.6) границу

$$B_2 \mathbf{E}(\ln^2(\alpha_m(\eta) m) \hat{\beta}_m^2(\eta)) m^{-1} + 2B_1 \mathbf{E}(|\ln \alpha_m(\eta)| \ln(\alpha_m(\eta) m) \hat{\beta}_m^2(\eta)) m^{-1}. \quad (4.8)$$

Здесь можно полагать, что $\ln(\alpha_m(\eta) m) \geq \ln(2e) > 1$, а потому

$$\begin{aligned} |\ln \alpha_m(\eta)| \ln(\alpha_m(\eta) m) &\leq \ln^2(\alpha_m(\eta) m) + \ln m \cdot \ln(\alpha_m(\eta) m) \\ &\leq (1 + \ln m) \ln^2(\alpha_m(\eta) m). \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (4.8), получаем границу вида (4.6).

Лемма 4.4. Для $m \geq 3$

$$\begin{aligned} |\mathbf{D}_m \Delta X_n - \mathbf{D} \hat{\lambda}_m(\eta)| &\leq B \max(\ln m, |\mathbf{E} \hat{\lambda}_m(\eta)|) \\ &\times \left[\mathbf{E}(\ln^2(\alpha_m(\eta) m) \hat{\beta}_m^2(\eta)) m^{-1} + \ln m \cdot \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta)) \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

До к а з а т е л ь с т в о. Представим левую часть (4.9) как модуль суммы

$$[\mathbf{E}_m(\hat{\Delta} X_n)^2 - \mathbf{E} \hat{\lambda}_m^2(\eta)] + \mathbf{E}_m(\Delta X_n^2; \overline{\mathcal{A}}_m(\eta)) + \mathbf{E}[(\hat{\lambda}_m(\eta))^2 - (\mathbf{E}_m \Delta X_n)^2]. \quad (4.10)$$

Последний член в (4.10) оценивается величиной

$$|\mathbf{E}_m \Delta X_n - \mathbf{E} \hat{\lambda}_m(\eta)| \cdot 2 \max(|\mathbf{E}_m \Delta X_n|, |\mathbf{E} \hat{\lambda}_m(\eta)|). \quad (4.11)$$

Применяя неравенство Иенсена (ср. с леммой 4.1), имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbf{E}_m L(Z_{n+1}) = \int \mu(dy) \int L(x) dF_m(x; y) \leq \int L\left(\int x dF_m(x; y)\right) \mu(dy) \\ &= \mathbf{E} L(\alpha_m(\eta) m) = \mathbf{E} \hat{\lambda}_m(\eta) + \ln m \cdot \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta)) + \mathbf{E}(L(\alpha_m(\eta) m); \overline{\mathcal{A}}_m(\eta)) \\ &\leq \mathbf{E} \hat{\lambda}_m(\eta) + \ln m + \ln(2e). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Из (4.12) при $m \geq 6$ получаем

$$|\mathbf{E}_m \Delta X_n| \leq \max(\ln m + \ln(2e), |\mathbf{E} \hat{\lambda}_m(\eta)|). \quad (4.13)$$

Подставляя (4.13) в (4.11) и применяя оценку (4.5) к первому сомножителю в (4.11), получаем для выражения (4.11) границу

$$B'_1 \left[\mathbf{E}(\ln(\alpha_m(\eta) m) \hat{\beta}_m^2(\eta)) m^{-1} + \ln m \cdot \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta)) \right] \\ \times 2 \max(\ln m + \ln(2e), |\mathbf{E} \hat{\lambda}_m(\eta)|). \quad (4.14)$$

Оценка (4.14) и оценки (4.6), (4.2) для двух первых слагаемых в представлении (4.10) дают для левой части (4.9) при $m \geq 6$ границу

$$B'_2 \left[\mathbf{E}(\ln^2(\alpha_m(\eta) m) \hat{\beta}_m^2(\eta)) m^{-1} \ln m + 4(C_2 + \ln^2 m) \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta)) \right] \\ + B'_1 \left[\mathbf{E}(\ln(\alpha_m(\eta) m) \hat{\beta}_m^2(\eta)) m^{-1} + \ln m \cdot \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta)) \right] \\ \times 2 \max(\ln m + \ln(2e), |\mathbf{E} \hat{\lambda}_m(\eta)|). \quad (4.15)$$

Полагая, что $\ln(\alpha_m(\eta) m) > 1$, приведем оценку (4.9) к форме (4.10).

Лемма 4.5. Для $m \geq 3$

$$\mathbf{E}_m |\Delta X_n - \mathbf{E}_m \Delta X_n|^p \\ \leq B'_p \left[\mathbf{E}(\ln^p(\alpha_m(\eta) m) \hat{\rho}_m^p(\eta)) m^{-p/2} \right. \\ \left. + \mathbf{E} |\hat{\lambda}_m(\eta) - \mathbf{E} \hat{\lambda}_m(\eta)|^p + \ln^p m \cdot \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta)) \right]. \quad (4.16)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим левую часть (4.16) в виде

$$\mathbf{E}_m \left| \left[(L(Z_{n+1}) - \ln(\alpha_m(\eta_n) m)) \chi(\mathcal{A}_m(\eta_n)) \right] + \left[L(Z_{n+1}) \chi(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta_n)) \right] \right. \\ \left. + \left[\ln \alpha_m(\eta_n) \cdot \chi(\mathcal{A}_m(\eta_n)) - \mathbf{E}(\ln \alpha_m(\eta) \chi(\mathcal{A}_m(\eta))) \right] \right. \\ \left. + \left[\ln m \cdot (\chi(\mathcal{A}_m(\eta_n)) - \mathbf{P}(\mathcal{A}_m(\eta))) \right] \right. \\ \left. - \left[\mathbf{E}_m(L(Z_{n+1}) - \ln(\alpha_m(\eta_n) m); \mathcal{A}_m(\eta_n)) \right] \right. \\ \left. - \left[\mathbf{E}_m(L(Z_{n+1}); \overline{\mathcal{A}}_m(\eta_n)) \right] \right|^p \\ =: \mathbf{E}_m |V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - V_5 - V_6|^p \leq 6^p \sum_{i=1}^6 \mathbf{E}_m |V_i|^p, \quad (4.17)$$

где члены в квадратных скобках в левой части соотношения (4.17) обозначены последовательно V_i , $i = 1, \dots, 6$, а на последнем шаге в (4.17) применено элементарное неравенство типа (4.3). Для членов $\mathbf{E}_m |V_2|^p$ и $\mathbf{E}_m |V_6|^p$ имеем по неравенству (4.1) границу $C_p^p \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta))$. Заметив, что $V_5 = \mathbf{E}_m V_1$, и применяя моментное неравенство (2.5), получаем

$$\mathbf{E}_m |V_5|^p \equiv |V_5|^p = |\mathbf{E}_m V_1|^p \leq \mathbf{E}_m |V_1|^p. \quad (4.18)$$

Для правой части соотношения (4.18) имеем оценку (см. (3.3))

$$B_p \mathbf{E}(\ln^p(\alpha_m(\eta) m) \widehat{\rho}_m(\eta)) m^{-p/2}.$$

Наконец, $\mathbf{E}_m |V_4|^p \leq \ln^p m \cdot \mathbf{P}(\overline{\mathcal{A}}_m(\eta))$. Собирая оценки, приходим к (4.16).

Доказательство теоремы 2.1. Применяя предположения (C1), (C2) к соотношению (4.5), получаем (2.8). Применяя (B2a), (C1) к соотношению (4.9), получаем (2.9). Подставляя (2.8), (2.9) в (1.18), получаем (2.11). Применяя (B1), (C3) к соотношению (4.16), получаем (2.10), что и заканчивает доказательство теоремы.

5. Доказательство теоремы 2.2. С учетом рассуждений, проведенных в замечании 2.2, необходимо только проверить выполнение условия (см. (1.8), (2.16)):

$$\mathbf{E}_m |\Delta Z_n - \mathbf{E}_m \Delta Z_n|^p = O(1)(m \mathbf{E} \sigma_m^2(\eta) + m^2 \mathbf{D} \alpha_m(\eta))^{p/2}. \quad (5.1)$$

Запишем для левой части (5.1) оценку сверху в виде суммы

$$\mathbf{E} \mathbf{E}_m (|\Delta Z_n - \mathbf{E}_m(\Delta Z_n | \eta_n)|^p | \eta_n) + \mathbf{E} |\mathbf{E}_m(\Delta Z_n | \eta_n) - \mathbf{E}_m \Delta Z_n|^p \quad (5.2)$$

с общим множителем 2^p (ср. с примером 2.3). Второе слагаемое в (5.2) ввиду (2.15) равно

$$m^p \mathbf{E} |\alpha_m(\eta) - \mathbf{E} \alpha_m(\eta)|^p = O(1) m^p (\mathbf{D} \alpha_m(\eta))^{p/2}, \quad (5.3)$$

где учтено предположение (B3). Первое слагаемое в (5.2) представим в интегральной форме:

$$\int \mu(dy) \int |x|^p dF_m^0(x; y) = \int (\sigma_m(y) \sqrt{m})^p \left[\int |x|^p dF_m^*(x; y) \right] \mu(dy), \quad (5.4)$$

$$F_m^*(x; y) := \mathbf{P}((\Delta Z_n - \mathbf{E}_m(\Delta Z_n | \eta_n))(\sigma_m(\eta_n) \sqrt{m})^{-1} \leq x | \eta_n = y).$$

Положим

$$\Delta_m(x; y) := F_m^*(x; y) - \Phi(x), \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

и выпишем для $\Delta_m(x; y)$ оценку (см. [8, гл. V, § 8, п. 8]):

$$|\Delta_m(x; y)| \leq A_{p'} \rho_m^{p'}(y) \alpha_m^{p'}(y) \sigma_m^{-p'}(y) (1 + |x|)^{-p'} m^{1-p'/2}. \quad (5.5)$$

Внутренний интеграл в правой части (5.4) представим в виде суммы

$$\int |x|^p d\Phi(x) + p \int_0^\infty x^{p-1} (\Delta_m(x; y) + \Delta_m(-x; y)) dx. \quad (5.6)$$

Второе слагаемое в (5.6) оценим с помощью неравенства (5.5) величиной

$$2p A_{p'} \int_0^\infty x^{p-1} (1+x)^{-p'} dx \cdot \rho_m^{p'}(y) \alpha_m^{p'}(y) \sigma_m^{-p'}(y) m^{1-p'/2}. \quad (5.7)$$

Подставляя последовательно (5.7) в (5.6) и результат в (5.4), получим для выражения (5.4) оценку сверху в виде

$$C_p \left[m^{p/2} \mathbf{E} \sigma_m^p(\eta) + m^{1-p'/2+p/2} \mathbf{E}(\rho_m^{p'}(\eta) \alpha_m^{p'}(\eta) \sigma_m^{p-p'}(\eta)) \right]. \quad (5.8)$$

Соотношения (5.3), (5.8) с учетом предположений (B4), (B5) приводят к соотношению (5.1), и теорема 2.2 доказана.

Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Smith W. L., Wilkinson W. E.* On branching processes in random environments. — Ann. Math. Statist., 1969, v. 40, № 3, p. 814–827.
2. *Lamperti J.* Criteria for the recurrence or transience of stochastic processes. I. — J. Math. Anal. Appl., 1960, v. 1, p. 314–330.
3. *Lamperti J.* Criteria for stochastic processes. II. Passage-time moments. — J. Math. Anal. Appl., 1963, v. 7, p. 127–145.
4. *Lamperti J.* A new class of probability limit theorems. — J. Math. Mech., 1962, v. 11, № 5, p. 749–772.
5. *Kersting G.* On recurrence and transience of growth models. — J. Appl. Probab., 1986, v. 23, p. 614–625.
6. *Козлов М. В.* Принцип инвариантности для критического ветвящегося процесса в случайной среде с иммиграцией. — Фундаментальные проблемы математики и механики: математика. М.: Изд-во МГУ, 1994, с. 133–139.
7. *Козлов М. В.* Условная функциональная предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. — Докл. АН РАН, 1995, т. 314, № 1, с. 12–15.
8. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.

Поступила в редакцию
19.IV.2002

Исправленный вариант
29.XI.2002