Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Манита, Стохастическая синхронизация в большой системе однотипных частиц, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 1, 162–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2490>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 09:42:52

10. Сарымсаков Т. А. Введение в квантовую теорию вероятностей. Ташкент: ФАН, 1985, 184 с.
11. Холево А. С. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. М.: Наука, 1980, 320 с.
12. Бердикулов М. А. Новая порядковая структура действительных симметричных (2×2) -матриц. — Владикав. матем. журн., 2004, т. 6, в. 4, с. 12–24.

Поступила в редакцию
18.XI.2002

Исправленный вариант
25.I.2006

© 2008 г.

МАНИА А. Д.*

СТОХАСТИЧЕСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В БОЛЬШОЙ СИСТЕМЕ ОДНОТИПНЫХ ЧАСТИЦ¹⁾

Рассматривается базовая стохастическая модель системы N одинаковых частиц с изотропной k -частичной синхронизацией, $k \geq 2$. В пределе, когда число частиц N и время $t = t(N)$ растут к бесконечности, изучается асимптотика разброса частиц. Выделены три временные зоны изменения $t(N)$, где поведение системы имеет качественно различный характер. Кроме этого, обсуждается случай, когда диапазон начального расположения частиц растет с увеличением N .

Ключевые слова и фразы: системы взаимодействующих частиц, многомерные марковские процессы, стохастическая синхронизация, k -частичные взаимодействия, модели среднего поля.

1. Введение. Большой класс вероятностных моделей допускает интерпретацию в терминах систем стохастических частиц с взаимодействием типа синхронизации. В общих словах, речь идет о специальном классе скачкообразных марковских процессов $x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ с непрерывным временем и значениями в $\mathbf{R}^N$, динамика которых символически задается генератором вида $L = L_0 + L_s$. Переменная $x_i \in \mathbf{R}$ интерпретируется как координата i -й частицы, свободная динамика L_0 соответствует независимым перемещениям отдельных частиц, а L_s отвечает за синхронизирующие скачки $x = (x_1, \dots, x_N) \rightarrow x' = (x'_1, \dots, x'_N)$, которые в предшествующих работах [1]–[4] подчинены следующему общему правилу:

$$\{x'_1, \dots, x'_N\} \subset \{x_1, \dots, x_N\}, \quad \{x'_1, \dots, x'_N\} \neq \{x_1, \dots, x_N\}.$$

Первые математические статьи по стохастической синхронизации относились к случаю $N = 2$ (см., например, [6]). Многочастичные системы ($N > 2$), изученные к настоящему моменту, различаются, в частности, видом синхронизирующего взаимодействия. Так, в работах [1], [2] взаимодействие происходило в *парах*, а в работе [4] изучено *трехчастичное* взаимодействие. В настоящей заметке мы рассмотрим *общее k -частичное* симметризованное взаимодействие, которое определяется в терминах синхронизирующих отображений.

При исследовании коллективного поведения системы частиц мы сталкиваемся с наложением двух противоположных тенденций: с течением времени свободная динамика увеличивает «разброс» частиц, тогда как синхронизирующее взаимодействие

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: manita@mech.math.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 06-01-00662, 08-01-90431).

пытается его уменьшить. Цель работы — изучить качественный баланс между этими тенденциями в предельной ситуации, когда $N \rightarrow \infty$, $t = t(N) \rightarrow \infty$. Основной результат данной статьи (теорема 2) устанавливает в зависимости от скорости роста $t(N)$ три фазы различного поведения системы. Аналогичный результат был ранее получен в работе [3] для системы с двумя типами частиц и парным взаимодействием между различными типами.

2. Синхронизирующие отображения. Занумеруем частицы и будем обозначать их координаты $x_1, \dots, x_N$. Зафиксируем число k и целые числа $k_1 \geq 2, \dots, k_l \geq 2$ такие, что $k_1 + \dots + k_l = k$. Набор $(k_1, \dots, k_l)$ назовем *сигнатурой* и будем считать его неизменным на протяжении всей статьи. Пусть $\mathcal{J}$ — множество упорядоченных наборов $(i_1, \dots, i_k)$, состоящих из k различных элементов множества индексов $\mathcal{N}_N := \{1, \dots, N\}$. На множестве $\mathcal{J}$ определим отображение $\pi_{k_1, \dots, k_l}: (i_1, \dots, i_k) \mapsto (\Gamma_1, \dots, \Gamma_l)$, где $\Gamma_j = (g_j, \Gamma_j^\circ)$,

$$\begin{aligned} g_1 &= i_1, & \Gamma_1^\circ &= (i_2, \dots, i_{k_1}), \\ g_2 &= i_{k_1+1}, & \Gamma_2^\circ &= (i_{k_1+2}, \dots, i_{k_1+k_2}), \\ &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \\ g_l &= i_{k_1+\dots+k_{l-1}+1}, & \Gamma_l^\circ &= (i_{k_1+\dots+k_{l-1}+2}, \dots, i_{k_1+\dots+k_l}). \end{aligned}$$

Рассмотрим отображение $J_{k_1, \dots, k_l}^{(i_1, \dots, i_k)}: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$, определяемое следующим образом:

$$J_{k_1, \dots, k_l}^{(i_1, \dots, i_k)}: x = (x_1, \dots, x_N) \mapsto y = (y_1, \dots, y_N),$$

где

$$y_m = \begin{cases} x_m, & \text{если } m \notin (i_1, \dots, i_k), \\ x_{g_j}, & \text{если } m \in (i_1, \dots, i_k), \quad m \in \Gamma_j. \end{cases} \quad (1)$$

Такое отображение естественно называть синхронизацией поднабора частиц $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$, соответствующей сигнатуре $(k_1, \dots, k_l)$. Очевидно, что после отображения $J_{k_1, \dots, k_l}^{(i_1, \dots, i_k)}$ мы обнаружим в точке с координатой x_{g_j} , $j = 1, \dots, l$, (по меньшей мере) k_j частиц.

3. Многомерный марковский процесс с синхронизацией. Определим однородный марковский процесс $x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$, $t \geq 0$, с непрерывным временем на пространстве состояний $\mathbf{R}^N$ при помощи формального генератора $L = L_0 + L_s$. Свободная динамика L_0 соответствует независимым блужданиям и выбирается в виде

$$(L_0 f)(x) = \alpha \sum_{i=1}^N \int (f(x + ze_i) - f(x)) \rho(dz), \quad z \in \mathbf{R}, \quad e_i = (0, \dots, 1_i, \dots, 0),$$

т.е. каждая частица i независимо от других частиц с интенсивностью $\alpha > 0$ совершает независимый скачок вида $x_i \rightarrow x_i + z$, где z распределено по закону $\rho(dz)$, общему для всех частиц. Будем предполагать, что распределение ρ имеет конечный носитель и нетривиально в следующем смысле: $b_2 := \int x^2 \rho(dx) > 0$. Обозначим также $a := \int x \rho(dx)$.

Синхронизирующее взаимодействие L_s имеет вид

$$L_s f = \frac{\delta}{N^{[k]}} \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{J}} L_{s, (i_1, \dots, i_k)} f, \quad (2)$$

где $N^{[k]} := N(N-1) \dots (N-k+1)$, а

$$(L_{s, (i_1, \dots, i_k)} f)(x) = f(J_{k_1, \dots, k_l}^{(i_1, \dots, i_k)} x) - f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_N), \quad (3)$$

для ограниченных непрерывных функций f . Другими словами, независимо от свободной динамики через независимые промежутки времени, распределенные экспоненциально с параметром $\delta > 0$, с равной вероятностью выбирается один из наборов

$(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{J}$, и конфигурация частиц $x_1, \dots, x_N$ синхронизируется согласно отображению $J_{k_1, \dots, k_l}^{(i_1, \dots, i_k)}$. Таким образом, взаимодействие, соответствующее конкретному выбору $(i_1, \dots, i_k)$, заключается в мгновенном и одновременном перемещении частиц каждой из групп $x_{k_1+\dots+k_{j-1}+1}, \dots, x_{k_1+\dots+k_j}$, $j = 1, \dots, l$, в точку с координатой $x_{g_j} = x_{k_1+\dots+k_{j-1}+1}$.

Так как все слагаемые в сумме (2) входят с одинаковыми весами, настоящую задачу можно отнести к классу взаимодействий типа среднего поля.

4. Основные результаты. Рассмотрим функцию $V: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}_+$, заданную формулой

$$V(x) := \frac{1}{N(N-1)} \sum_{m < n} (x_m - x_n)^2.$$

Можно показать, что она совпадает с выборочной дисперсией S^2 , где

$$S^2 := \frac{1}{N-1} \sum_{m=1}^N (x_m - M(x))^2, \quad M(x) := \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N x_m.$$

Как показывают следующие леммы, действие генератора L на функции M и V может быть найдено в явном виде.

Лемма 1. Функция LM — постоянна, а именно, $(LM)(x) = \alpha a$ для всех $x = (x_1, \dots, x_N)$.

Лемма 2. Существует $\kappa > 0$ такое, что

$$LV = \alpha b_2 - \frac{\delta \kappa}{N(N-1)} V.$$

Из доказательства будет следовать, что $\kappa = \sum_{j=1}^l k_j^2 - k$.

Нас будут интересовать средние: $\mu_N(t) := \mathbf{E}M(x(t))$ и $R_N(t) := \mathbf{E}V(x(t))$. В нижеследующих утверждениях предполагается, что $N \rightarrow \infty$.

Теорема 1. Для любого $t > 0$ $\lim_N (\mu_N(t) - \mu_N(0))/t = \alpha a$. Более того, эта сходимость равномерна по t на множествах вида $t \geq t_0 > 0$. В частности, для любой функции $t(N) \rightarrow \infty$ имеет место сходимость $(\mu_N(t(N)) - \mu_N(0))/t(N) \rightarrow \alpha a$.

Теорема 2. Пусть $\sup_N |R_N(0)| < \infty$. Существуют три временных шкалы $t = t(N)$, на которых $R_N(t(N))$ ведет себя качественно различным образом.

- (i) Если $t(N)/N^2 \rightarrow 0$, то $R_N(t(N)) \sim \alpha b_2 t(N)$.
- (ii) Если $t(N) = cN^2$, то $R_N(t(N)) \sim \alpha b_2 (\delta \kappa)^{-1} (1 - \exp(-\delta \kappa c)) N^2$.
- (iii) Если $t(N)/N^2 \rightarrow \infty$, то $R_N(t(N)) \sim \alpha b_2 (\delta \kappa)^{-1} N^2$.

В [2] аналогичные последовательные шкалы были названы фазами начальной десинхронизации, критического затухания десинхронизации и финальной стабилизации соответственно. Видно, что в течение первой фазы синхронизация не дает вклада в асимптотику.

Теорема 3. Предположим, что $R_N(0) \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. Тогда добавочное условие $R_N(0)/t(N) \rightarrow 0$ достаточно для того, чтобы соответствующие утверждения теоремы 2 оставались верными.

5. Доказательство леммы 1. Прямая проверка показывает, что $(L_0 M)(x) \equiv \alpha a$, поэтому содержательной является лишь демонстрация того, что $(L_s M)(x) \equiv 0$. Покажем, что этот факт есть следствие симметричности синхронизирующего взаимодействия. При заданной сигнатуре взаимодействия $(k_1, \dots, k_l)$ зафиксируем некоторые подмножества

$$B_j \subset \mathcal{N}_N, \quad |B_j| = k_j \quad (j = 1, \dots, l), \quad B_{j_1} \cap B_{j_2} = \emptyset \quad (j_1 \neq j_2)$$

и определим $\mathcal{J}_{k_1, \dots, k_l}^{B_1, \dots, B_l} := \{(i_1, \dots, i_k): \{g_j\} \cup \Gamma_j^\circ = B_j \forall j = 1, \dots, l\}$, где g_j и Γ_j° определяются отображением $\pi_{k_1, \dots, k_l}$, примененным к $(i_1, \dots, i_k)$. Для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{J}_{k_1, \dots, k_l}^{B_1, \dots, B_l}} (M \circ J_{k_1, \dots, k_l}^{(i_1, \dots, i_k)} - M) = 0, \quad (4)$$

поскольку $\sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{J}} = \sum_{B_1, \dots, B_l} \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{J}_{k_1, \dots, k_l}^{B_1, \dots, B_l}}$. Легко видеть, что

$$M(J_{k_1, \dots, k_l}^{(i_1, \dots, i_k)} x) - M(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^l \sum_{h \in \Gamma_j^o} (x_{g_j} - x_h). \quad (5)$$

Подставляя правую часть (5) в сумму (4), мы видим, что так как в (4) g_j пробегает все множество B_j , то для любых двух индексов $u, v \in B_j$ ровно один раз появится разность $(x_u - x_v)$, когда $g_j = u$, и ровно один раз появится разность $(x_v - x_u)$, когда $g_j = v$. Следовательно, сумма (4) равна нулю.

6. Доказательство леммы 2. Определим функцию $f_{m,n}: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ формулой $f_{m,n}(x) = (N(N-1))^{-1}(x_n - x_m)^2$. В этих обозначениях $V(x) = \sum_{m < n} f_{m,n}(x)$. Непосредственная проверка показывает, что $L_0 f_{m,n}(x) = (N(N-1))^{-1} \cdot 2\alpha b_2$, следовательно, $(L_0 V)(x) \equiv \alpha b_2$.

Запишем

$$L_s V = \delta \sum_{m' < n'} \frac{1}{N[k]} \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{J}} L_{s, (i_1, \dots, i_k)} f_{m', n'}. \quad (6)$$

Рассмотрим одно слагаемое $L_{s, (i_1, \dots, i_k)} f_{m', n'}$. В силу (1) под действием отображения $J_{k_1, \dots, k_l}^{(i_1, \dots, i_k)}$ частица с номером m' перейдет в точку с координатой x_m , где

$$m = \begin{cases} m', & \text{если } m' \notin (i_1, \dots, i_k), \\ g_j, & \text{если } m' \in (i_1, \dots, i_k), \quad m' \in \Gamma_j. \end{cases} \quad (7)$$

Следовательно, $L_{s, (i_1, \dots, i_k)} f_{m', n'} = f_{m,n} - f_{m', n'}$ с некоторыми m и n , не обязательно отличными от m' и n' . Таким образом, найдутся такие $a_{mn}(N) \in \mathbf{R}$, что

$$(L_s V)(x) = \delta \sum_{m < n} a_{mn}(N) f_{m,n}(x). \quad (8)$$

Наша цель состоит в том, чтобы показать, что числа $a_{mn}(N)$ не зависят от m и n и что

$$a_{mn}(N) = -\frac{\varkappa}{N(N-1)} \quad (9)$$

для некоторой константы $\varkappa > 0$. Зафиксируем некоторую пару $\{m, n\}$ и вычислим $a_{mn}(N)$. Выбирая набор $(i_1, \dots, i_k)$, в котором происходит взаимодействие, мы тем самым выбираем $g_1, \dots, g_l$ и $\Gamma_1^o, \dots, \Gamma_l^o$. Обозначим $G = \{g_1, \dots, g_l\}$. При фиксированной паре $\{m, n\}$ множество $\mathcal{J}$ может быть разбито на непересекающиеся части следующим образом: $\mathcal{J} = \bigcup_{w=0}^3 \mathcal{J}_w^{m,n}$, где

$$\mathcal{J}_0^{m,n} := \left\{ (i_1, \dots, i_k): \{m, n\} \cap \left(\bigcup_j \Gamma_j \right) = \emptyset \right\},$$

$$\mathcal{J}_1^{m,n} := \left\{ (i_1, \dots, i_k): \{m, n\} \cap \left(\bigcup_j \Gamma_j^o \right) \neq \emptyset \right\},$$

$$\mathcal{J}_2^{m,n} := \{(i_1, \dots, i_k): \{m, n\} \subset G\},$$

$$\mathcal{J}_3^{m,n} := \{(i_1, \dots, i_k): |\{m, n\} \cap G| = 1\} \setminus \mathcal{J}_1^{m,n}.$$

В каждой из сумм

$$\Sigma^{(w)} := \frac{1}{N[k]} \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{J}_w^{m,n}} \sum_{m' < n'} (f_{m', n'} \circ J_{k_1, \dots, k_l}^{(i_1, \dots, i_k)} - f_{m', n'})$$

мы выделим лишь те слагаемые, в которых участвует функция $f_{m,n}$, и коэффициент при ней обозначим $a_{mn}^{(w)}(N)$. В силу представлений (6) и (8) можно записать $a_{mn}(N) = \sum_{w=0}^3 a_{mn}^{(w)}(N)$.

0) Так как при $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{J}_0^{m,n}$ отображение $J_{k_1, \dots, k_l}^{(i_1, \dots, i_k)}$ оставляет частицы с номерами m и n неподвижными, то $a_{mn}^{(0)}(N) = 0$.

1) Если $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{J}_1^{m,n}$, то слагаемое $f_{m,n}$ может входить в сумму $\Sigma^{(1)}$ только со знаком «минус» и только если $(m', n') = (m, n)$. Количество наборов $(i_1, \dots, i_k)$, которые составляют множество $\mathcal{J}_1^{m,n}$, равно $|\mathcal{J}_1^{m,n}| = N^{[k]} - (N-2)^{[k-l]}(N-(k-l))^{[l]}$. Таким образом,

$$a_{mn}^{(1)}(N) = (-1) \frac{N^{[k]} - (N-2)^{[k-l]}(N-(k-l))^{[l]}}{N^{[k]}}.$$

2) Для определенности рассмотрим в $\Sigma^{(2)}$ подсумму по такому подмножеству множества $\mathcal{J}_2^{m,n}$, в котором $m = g_i$, $n = g_j$. В результате действия $J_{k_1, \dots, k_l}^{(i_1, \dots, i_k)}$ каждая из функций f_{uv} , где $u \in \Gamma_i$, $v \in \Gamma_j$, перейдет в функцию f_{mn} . Поэтому в указанной подсумме мы обнаружим $k_i k_j$ слагаемых f_{mn} со знаком «плюс» и одно слагаемое (соответствующее случаю $(m', n') = (m, n)$) со знаком «минус». Следовательно,

$$a_{mn}^{(2)}(N) = \sum_{i,j=1, i \neq j}^l (k_i k_j - 1) \frac{(N-2)^{[k-2]}}{N^{[k]}}.$$

3) Зафиксируем $i \in \{1, \dots, l\}$ и рассмотрим в $\Sigma^{(3)}$ подсумму по тем $(i_1, \dots, i_k)$, для которых $m = g_i \in G$, $n \notin G$. Число наборов $(i_1, \dots, i_k)$, удовлетворяющих этому предположению, равно $(N-2)^{[k-1]}$. При этом каждая из k_i функций f_{un} , где $u \in \Gamma_i$, перейдет в функцию f_{mn} . Меняя местами роли m и n , заключаем, что

$$a_{mn}^{(3)}(N) = 2 \sum_{i=1}^l (k_i - 1) \frac{(N-2)^{[k-1]}}{N^{[k]}}.$$

Заметим, что величины $a_{mn}^{(1)}(N)$, $a_{mn}^{(2)}(N)$ и $a_{mn}^{(3)}(N)$ не зависят от m, n . Непосредственные вычисления приводят нас к следующим формулам:

$$a_{mn}^{(1)}(N) = -\frac{2(k-l)(N-k) + (k-l)(k+l-1)}{N(N-1)},$$

$$a_{mn}^{(2)}(N) = \frac{k^2 - l^2 + l - \sum_j k_j^2}{N(N-1)}, \quad a_{mn}^{(3)}(N) = \frac{2(k-l)(N-k)}{N(N-1)}.$$

Легко видеть, что $a_{mn}^{(1)}(N) < 0$, тогда как $a_{mn}^{(2)}(N) > 0$ и $a_{mn}^{(3)}(N) > 0$. Суммируя, получим

$$a_{nm}^{(1)}(N) + a_{nm}^{(2)}(N) + a_{nm}^{(3)}(N) = -\frac{\sum_j k_j^2 - k}{N(N-1)},$$

и утверждение (9) следует с константой $\varkappa = \sum_j k_j^2 - k > 0$.

7. Доказательство теорем. Метод доказательства аналогичен применявшемуся в работе [2] и основан на использовании вложенной цепи Маркова $\zeta_N(n, \omega) := x(\tau_n, \omega)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. По определению цепь $\zeta_N(n)$ задана на том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, развивается в дискретном времени и принимает значения в множестве $\mathbf{R}^N$, а последовательность $\tau_1(\omega) \leq \tau_2(\omega) \leq \dots$ состоит из моментов времени, в которые могут происходить скачки частиц, $\tau_0(\omega) \equiv 0$. Очевидно, что $\{\tau_{n+1} - \tau_n\}_{n=0}^\infty$ — последовательность независимых экспоненциально распределенных случайных величин с математическим ожиданием $\gamma_N = (\alpha N + \delta)^{-1}$. В дискретной цепи $\zeta_N(n)$ переходы за единицу времени устроены следующим образом: с вероятностью $\alpha \gamma_N$ частица с номером i совершает скачок $x_i \rightarrow x_i + z$, где z распределено по закону $\rho(dz)$, $i = 1, \dots, N$, или с вероятностью $\delta \gamma_N$ происходит синхронизация — наудачу выбирается набор индексов $(i_1, \dots, i_k)$ и затем конфигурация частиц x мгновенно превращается в конфигурацию $J_{k_1, \dots, k_l}^{(i_1, \dots, i_k)} x$. По закону больших чисел $\tau_n \sim \gamma_N n$ при $n \rightarrow \infty$, следовательно, асимптотическое поведение системы частиц $x(t)$, $t \geq 0$, может быть сведено к асимптотическим свойствам вложенной цепи $\zeta_N(n)$. Нас будут интересовать следующие последовательности: $s(n) := \mathbf{E}M(x(\tau_n))$ и $d(n) := \mathbf{E}V(x(\tau_n))$.

Непосредственные вычисления с использованием лемм 1 и 2 показывают, что справедливы соотношения

$$\mathbf{E}(M(\zeta_N(n+1)) \mid x(t), t \leq \tau_n) = M(\zeta_N(n)) + \gamma_N \alpha a,$$

$$\mathbf{E}(V(\zeta_N(n+1)) \mid x(t), t \leq \tau_n) = V(\zeta_N(n)) + \gamma_N \left(\alpha b_2 - \delta \frac{\kappa}{N(N-1)} V(\zeta_N(n)) \right).$$

Беря математическое ожидание от обеих частей, получим рекуррентные уравнения

$$s(n+1) = s(n) + \gamma_N \alpha a, \quad (10)$$

$$d(n+1) = d(n) \left(1 - \gamma_N \delta \frac{\kappa}{N(N-1)} \right) + \gamma_N \alpha b_2. \quad (11)$$

Из (10) легко получается утверждение теоремы 1. Итерируя уравнение (11), получим

$$d(n) = d(0) \left(1 - \gamma_N \delta \frac{\kappa}{N(N-1)} \right)^n + (\gamma_N \alpha b_2) \sum_{j=1}^{n-1} \left(1 - \gamma_N \delta \frac{\kappa}{N(N-1)} \right)^j. \quad (12)$$

Подставляя в это выражение $n = \gamma_N^{-1} t(N)$ и устремляя N к бесконечности, приходим к утверждению теоремы 2.

Теорема 3 доказывается на основе представления (12) непосредственной проверкой для каждой из временных зон отдельно.

8. Возможные обобщения и перспективы. Несомненно, что полученные результаты останутся верными, если в качестве синхронизации L_s будет выступать симметризованное полиномиальное взаимодействие произвольного порядка, представляющее собой конечную сумму (по индексу $k \geq 2$) k -частичных синхронизирующих взаимодействий. По-видимому, методы нашей работы нетрудно адаптировать и для других классов свободных эволюций L_0 , таких, например, как независимые броуновские движения.

Рассмотренная здесь стохастическая система частиц является базовым звеном для изучения в перспективе проблемы об общих закономерностях асимптотического поведения стохастических многокомпонентных моделей с синхронизацией. Утверждение теоремы 2 свидетельствует в пользу предположения о том, что полученный ранее в работе [2] результат о наличии нескольких фаз коллективного поведения, по-видимому, верен для широкого круга больших систем частиц с синхронизацией, а не обусловлен спецификой модели [2]. Как видно из настоящей работы, ключевыми моментами в доказательстве подобных результатов должны стать аналоги леммы 2. Трудности, которые возникают на этом пути, связаны с рассмотрением анизотропных синхронизаций, интересных для ряда приложений. Заметим, что в работах [1], [4], где представлены примеры анизотропных взаимодействий, изучено поведение систем лишь на гидродинамической шкале, тогда как в настоящей работе рассмотрены все возможные временные шкалы $t(N)$.

Отметим, однако, что важный класс каскадных синхронизаций [5] не может быть рассмотрен в рамках представленного в настоящей работе формализма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Manita A., Shcherbakov V. Asymptotic analysis of a particle system with mean-field interaction. — Markov Process. Related Fields, 2005, v. 11, №3, p. 489–518.
2. Малышев В. А., Манита А. Д. Фазовые переходы в модели синхронизации времени. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 1, с. 150–158.
3. Malyshev V., Manita A. Asymptotic behavior of the time synchronization model. — Representation Theory, Dynamical Systems, and Asymptotic Combinatorics. Providence: Amer. Math. Soc., 2006, p. 101–115. (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, v. 217.)
4. Малышкин А. Г. Предельная динамика для вероятностных моделей обмена информацией в сетях параллельных вычислений. — Проблемы передачи информации, 2006, т. 42, №3, с. 78–96.

5. Manita A., Simonot F. Clustering in stochastic asynchronous algorithms for distributed simulations. — Lecture Notes in Comput. Sci., 2005, v. 3777, p. 26–37.
6. Mitra D., Mitrani I. Analysis and optimum performance of two message-passing parallel processors synchronized by rollback. — Performance Evaluation, 1987, v. 7, № 2, p. 111–124.

Поступила в редакцию
2.VI.2006

Исправленный вариант
12.XI.2007

© 2008 г.

ОРЛОВ Д. В.*

О ДВУХ ОЦЕНКАХ ОДНОЙ МЕРЫ РИСКА

Изучается асимптотическое поведение двух различных эмпирических оценок когерентной меры риска (минимальный $V@R$), а именно функционала, имеющего вид

$$\text{MINV@R}_\alpha(X) = -\mathbf{E} \min(X_1, \dots, X_\alpha),$$

где $X_1, \dots, X_\alpha$ — независимые копии X .

Ключевые слова и фразы: взвешенный $V@R$, когерентные меры риска, минимальный $V@R$, предельные теоремы для L -статистик.

1. Введение. Когерентные меры риска были введены в работах Ф. Артинера, Ф. Делбаена, Ж.-М. Эбера и Д. Хиса [2], [3]. Общая *когерентная мера риска* — это функционал на пространстве ограниченных случайных величин (предполагается фиксированным некоторое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$), заданный по формуле

$$\rho(X) = - \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{D}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} X,$$

где $\mathcal{D}$ — некоторое множество вероятностных мер, абсолютно непрерывных относительно $\mathbf{P}$.

Этот класс функционалов очень широк. Для его практических применений необходимо иметь более узкие, аналитически удобные подклассы. Одним из таких подклассов является *взвешенный $V@R$* (Weighted Value at Risk):

$$\text{WV@R}(X) = - \int_{\mathbf{R}} x d(\Psi(F_X(x))),$$

где $\Psi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — вогнутая возрастающая функция такая, что $\Psi(0) = 0$, $\Psi(1) = 1$, а F_X обозначает функцию распределения случайной величины X . Эквивалентно, $\text{WV@R}(X) = -\mathbf{E}Y$, где Y — случайная величина с функцией распределения $F_Y = \Psi \circ F_X$.

Этот класс функционалов удобен по многим причинам (см. [4], [8]). В частности, он допускает простую эмпирическую оценку. Именно, если X имеет равномерное распределение на множестве $\{x_1, \dots, x_N\}$, то, как легко видеть,

$$\text{WV@R}(X) = - \sum_{n=1}^N x_{(n)} \left(\Psi\left(\frac{n}{N}\right) - \Psi\left(\frac{n-1}{N}\right) \right),$$

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: orloff.dmitri@gmail.com