Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Орлов, О двух оценках одной меры риска,
Теория вероятн. и ее примен., 2008, том 53, вы-
пуск 1, 168–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2491>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 14:54:39

5. Manita A., Simonot F. Clustering in stochastic asynchronous algorithms for distributed simulations. — Lecture Notes in Comput. Sci., 2005, v. 3777, p. 26–37.
6. Mitra D., Mitrani I. Analysis and optimum performance of two message-passing parallel processors synchronized by rollback. — Performance Evaluation, 1987, v. 7, № 2, p. 111–124.

Поступила в редакцию
2.VI.2006

Исправленный вариант
12.XI.2007

© 2008 г.

ОРЛОВ Д. В.*

О ДВУХ ОЦЕНКАХ ОДНОЙ МЕРЫ РИСКА

Изучается асимптотическое поведение двух различных эмпирических оценок когерентной меры риска (минимальный $V@R$), а именно функционала, имеющего вид

$$\text{MINV@R}_\alpha(X) = -\mathbf{E} \min(X_1, \dots, X_\alpha),$$

где $X_1, \dots, X_\alpha$ — независимые копии X .

Ключевые слова и фразы: взвешенный $V@R$, когерентные меры риска, минимальный $V@R$, предельные теоремы для L -статистик.

1. Введение. Когерентные меры риска были введены в работах Ф. Артинера, Ф. Делбаена, Ж.-М. Эбера и Д. Хиса [2], [3]. Общая *когерентная мера риска* — это функционал на пространстве ограниченных случайных величин (предполагается фиксированным некоторое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$), заданный по формуле

$$\rho(X) = - \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{D}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} X,$$

где $\mathcal{D}$ — некоторое множество вероятностных мер, абсолютно непрерывных относительно $\mathbf{P}$.

Этот класс функционалов очень широк. Для его практических применений необходимо иметь более узкие, аналитически удобные подклассы. Одним из таких подклассов является *взвешенный $V@R$* (Weighted Value at Risk):

$$\text{WV@R}(X) = - \int_{\mathbf{R}} x d(\Psi(F_X(x))),$$

где $\Psi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — вогнутая возрастающая функция такая, что $\Psi(0) = 0$, $\Psi(1) = 1$, а F_X обозначает функцию распределения случайной величины X . Эквивалентно, $\text{WV@R}(X) = -\mathbf{E}Y$, где Y — случайная величина с функцией распределения $F_Y = \Psi \circ F_X$.

Этот класс функционалов удобен по многим причинам (см. [4], [8]). В частности, он допускает простую эмпирическую оценку. Именно, если X имеет равномерное распределение на множестве $\{x_1, \dots, x_N\}$, то, как легко видеть,

$$\text{WV@R}(X) = - \sum_{n=1}^N x_{(n)} \left(\Psi\left(\frac{n}{N}\right) - \Psi\left(\frac{n-1}{N}\right) \right),$$

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: orloff.dmitri@gmail.com

где $x_{(1)}, \dots, x_{(N)}$ — набор $x_1, \dots, x_N$, упорядоченный по возрастанию. Отсюда вытекает, что для произвольной случайной величины X , имеющей некоторые реализации $X_1, \dots, X_N$, ее эмпирической оценкой служит статистика

$$\widehat{WV@R}(X; N) = - \sum_{n=1}^N X_{(n)} \left(\Psi\left(\frac{n}{N}\right) - \Psi\left(\frac{n-1}{N}\right) \right),$$

где $X_{(1)}, \dots, X_{(N)}$ — порядковые статистики, построенные по выборке $X_1, \dots, X_N$.

Класс $WV@R$ широк, и для практического его применения выделяют некоторых представителей (обычно это однопараметрические семейства). Одним из таких представителей является *хвостовой* $V@R$ (Tail Value at Risk), определяемый как взвешенный $V@R$, соответствующий $\Psi_\lambda(x) = \lambda^{-1}x \wedge 1$. Если случайная величина X имеет непрерывное распределение, то

$$TV@R_\lambda(X) = -E(X \mid X \leq q_\lambda(X)),$$

где $q_\lambda(X)$ обозначает (правую) λ квантиль X (см. [8, раздел 4.4]).

В работе Д. Б. Мадана и А. С. Черного [5] был предложен другой интересный представитель класса $WV@R$, получивший название *минимальный* $V@R$ и обозначаемый $MINV@R$. Это есть взвешенный $V@R$, соответствующий $\Psi_\alpha(x) = 1 - (1 - x)^\alpha$. Очевидно, что при $\alpha \in \mathbf{N}$

$$MINV@R_\alpha(X) = -E \min(X_1, \dots, X_\alpha), \quad (1)$$

где $X_1, \dots, X_\alpha$ — независимые копии X .

Полученное выше представление дает прозрачное и интуитивно ясное описание меры $MINV@R$. Но кроме того, оно дает очень простую эмпирическую оценку $MINV@R$. Именно, пусть $\alpha \in \mathbf{N}$ и имеются независимые реализации $X_1, \dots, X_N$, где N кратно α . Тогда эмпирической оценкой $MINV@R$ служит

$$\widehat{MINV@R}_\alpha^1(X; N) = -\frac{\alpha}{N} \sum_{k=1}^{N/\alpha} \min\{X_{\alpha k+1}, \dots, X_{\alpha(k+1)}\}. \quad (2)$$

Но поскольку $MINV@R$ является подклассом семейства $WV@R$, то его также можно оценивать при помощи описанной выше оценки $WV@R$, что дает оценку

$$\widehat{MINV@R}_\alpha^2(X; N) = - \sum_{n=1}^N X_{(n)} \left(\left(\frac{N-n+1}{N} \right)^\alpha - \left(\frac{N-n}{N} \right)^\alpha \right). \quad (3)$$

Возникает вопрос: какая из оценок, (2) или (3), лучше? Этот вопрос является основным для настоящей работы. Ответом на него служит следующая теорема, являющаяся нашим главным результатом. В этой теореме мы используем расширение функционала $MINV@R$ на множество интегрируемых случайных величин, определяемое формулой (1).

Теорема 1. Пусть случайная величина $X \in L^2$ обладает непрерывной функцией плотности $f(x)$. Тогда

$$\sqrt{N}(\widehat{MINV@R}_\alpha^1(X; N) - MINV@R_\alpha(X)) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{law} \mathcal{N}(0, \sigma_1^2), \quad (4)$$

$$\sqrt{N}(\widehat{MINV@R}_\alpha^2(X; N) - MINV@R_\alpha(X)) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{law} \mathcal{N}(0, \sigma_2^2), \quad (5)$$

где $\mathcal{N}(t, \sigma^2)$ обозначает нормальное распределение со средним t и дисперсией σ^2 , а

$$\sigma_1^2 = \alpha D \min(X_1, \dots, X_\alpha), \quad (6)$$

$$\sigma_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi'_\alpha(F_X(x)) \Psi'_\alpha(F_X(y)) (F_X(\min(x, y)) - F_X(x) F_X(y)) dx dy \quad (7)$$

и D обозначает дисперсию. При этом $\sigma_2^2 < \sigma_1^2$.

Итак, эта теорема показывает, что обе оценки (2) и (3) являются асимптотически нормальными со средним $MINV@R_\alpha(X)$ и асимптотическими дисперсиями порядка $N^{-1/2}$. Но при этом у оценки (3) асимптотическая дисперсия меньше, чем у оценки (2), т.е. оценка (3) является более точной.

2. Доказательство теоремы 1. Для доказательства теоремы 1 нам потребуется ряд утверждений. Доказательство утверждения 1 можно найти в [7]. Доказательства утверждений 2 и 3 изложены в [9]. Доказательство утверждения 4 можно найти в [6].

Утверждение 1. Пусть X, Y — две случайные величины, принимающие значения в $\mathbf{R}$, $F(x, y) = \mathbf{P}\{X \leq x, Y \leq y\}$, $G(x) = F(x, \infty)$, $H(y) = F(\infty, y)$. Тогда если существуют $\mathbf{E}(XY)$, $\mathbf{E}X$, $\mathbf{E}Y$, то

$$\text{cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F(x, y) - G(x)H(y)) dx dy.$$

Пусть $\{X_n\}_{i=1}^{\infty}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Для некоторой функции $J: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ определим

$$S_N = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{(i)} J\left(\frac{i}{N+1}\right). \quad (8)$$

Определим $F_X^{-1}(\lambda) = \inf\{x: F_X(x) > \lambda\}$. Рассмотрим меру μ на $[0, 1]$ такую, что $\mu((a, b]) = F_X^{-1}(b) - F_X^{-1}(a)$ для любых $a, b \in [0, 1]$, $a < b$. Очевидно, что определение корректно.

Утверждение 2. Предположим, что $\mathbf{E}X^2 < \infty$, а также что J ограничена и непрерывна на $[0, 1] \setminus A$, где $\mu(A) = 0$. Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \mathbf{D}S_N = \sigma^2(J, F),$$

где

$$\sigma^2(J, F) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J(F_X(x)) J(F_X(y)) (F_X(\min(x, y)) - F_X(x)F_X(y)) dx dy. \quad (9)$$

Утверждение 3. Предположим, что $\mathbf{E}X^2 < \infty$ и что J ограничена и непрерывна на $[0, 1] \setminus A$, где $\mu(A) = 0$. Тогда если $\sigma^2(J, F) > 0$, то

$$\frac{S_N - \mathbf{E}S_N}{\mathbf{D}S_N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{law}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Утверждение 4. Предположим, что X обладает непрерывной плотностью f (т.е. $F_X \in C^1(\mathbf{R})$) и $\mathbf{E}X^2 < \infty$. Предположим также, что J ограничена и имеет по меньшей мере четыре производных, которые также ограничены на $(0, 1)$. Тогда

$$\mathbf{E}S_N = \int_0^1 F_X^{-1}(u) J(u) du + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Доказательство теоремы 1. Шаг 1. Докажем справедливость (4) и (6). Пусть $X_1, \dots, X_\alpha$ — независимые копии X . Рассмотрим последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимых одинаково распределенных случайных величин таких, что $\xi_1 \stackrel{\text{law}}{=} -\min(X_1, \dots, X_\alpha)$. Тогда согласно центральной предельной теореме

$$\sqrt{\alpha k} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \xi_i - \text{MINV@R}_\alpha(X) \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{law}} \mathcal{N}(0, \alpha \mathbf{D}\xi_1).$$

Первый шаг доказательства завершен.

Шаг 2. Докажем справедливость (5) и (7). Для функции $J(u) = \Psi'(u)$ рассмотрим случайную величину S_N , определенную в (8). Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\widehat{\text{MINV@R}}_\alpha^2(X; N) - S_N)^2 &= \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^N X_{(i)} \left(\int_{(i-1)/N}^{i/N} \Psi'_\alpha(x) dx - \frac{1}{N} \Psi'_\alpha\left(\frac{i}{N+1}\right) \right) \right)^2 \\ &\leq \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^N |X_{(i)}| \frac{C_1}{N^2} \right)^2 \leq C_2 \frac{\mathbf{E}X^2}{N^2}. \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что $\sqrt{N}(\widehat{\text{MINV@R}}_\alpha^2(X) - S_N) \xrightarrow{\text{law}} 0$ при $N \rightarrow \infty$. В силу утверждения 4 и определения MINV@R_α получаем, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N}(\mathbf{E}S_N - \text{MINV@R}_\alpha(X)) = 0.$$

Из результатов утверждений 2 и 3 следует, что $\sqrt{N}(S_N - \mathbf{E}S_N) \xrightarrow{\text{law}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\Psi'_\alpha, F_X))$ при $N \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sqrt{N}(\widehat{\text{MINV@R}}_\alpha^2(X; N) - \text{MINV@R}_\alpha(X)) &= \sqrt{N}(\widehat{\text{MINV@R}}_\alpha^2(X; N) - S_N) \\ &+ \sqrt{N}(S_N - \mathbf{E}S_N) + \sqrt{N}(\mathbf{E}S_N - \text{MINV@R}_\alpha(X)) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{law}} \mathcal{N}(0, \sigma_2^2). \end{aligned}$$

Шаг 3. Докажем, что $\sigma_2^2 < \sigma_1^2$. Для случайной величины ξ_1 из первого шага доказательства верно

$$\mathbf{D}(\widehat{\text{MINV@R}}_\alpha^1(X; N)) = \frac{\alpha}{N} \mathbf{D}\xi_1.$$

Поскольку X не имеет атомов, то $\mathbf{P}\{\xi_1 \leq x\} = 1 - (1 - F_X(x))^\alpha$. Тогда, применяя утверждение 1 к паре (ξ_1, ξ_1) , получим

$$\begin{aligned} \alpha \mathbf{D}\xi_1 &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - (1 - F_X(\min(x, y)))^\alpha \right. \\ &\quad \left. - (1 - (1 - F_X(x))^\alpha)(1 - (1 - F_X(y))^\alpha) \right) dx dy \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y (1 - F_X(y))^\alpha (1 - (1 - F_X(x))^\alpha) dx dy \\ &\quad + \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \int_y^{\infty} (1 - F_X(x))^\alpha (1 - (1 - F_X(y))^\alpha) dx dy. \end{aligned}$$

С другой стороны, учитывая (9), находим, что

$$\begin{aligned} \sigma^2(\Psi'_\alpha, F_X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y \alpha^2 F_X(x) (1 - F_X(x))^{\alpha-1} (1 - F_X(y))^\alpha dx dy \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_y^{\infty} \alpha^2 F_X(y) (1 - F_X(y))^{\alpha-1} (1 - F_X(x))^\alpha dx dy. \end{aligned}$$

Поскольку для любого x такого, что $F_X(x) > 0$, имеем строгое неравенство

$$\alpha(1 - (1 - F_X(x))^\alpha) > \alpha^2 F_X(x) (1 - F_X(x))^{\alpha-1},$$

то, в силу гладкости $F_X(x)$, получаем неравенство $\sigma_2^2 < \sigma_1^2$.

З а м е ч а н и е. С помощью рассуждений, проведенных на втором шаге доказательства, легко видеть, что

$$N\mathbf{E}(\widehat{\text{MINV@R}}_\alpha^2(X; N) - \text{MINV@R}_\alpha(X))^2 \rightarrow \sigma^2(\Psi', F_X), \quad N \rightarrow \infty.$$

Поскольку для любых N , кратных α , имеем

$$N\mathbf{D}(\widehat{\text{MINV@R}}_\alpha^1(X)) = \sigma_1^2,$$

то мы видим, что оценка (3) также асимптотически лучше оценки (2) в терминах среднеквадратического отклонения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черный А. С. Нахождение справедливой цены на основе когерентных мер риска. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 3, с. 506–540.
2. Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. Thinking coherently. — Risk, 1997, v. 10, № 11, p. 68–70.

3. Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. Coherent measures of risk. — Math. Finance, 1999, v. 9, № 3, p. 203–228.
4. Cherny A. S. Weighted V@R and its properties. — Finance Stoch., 2006, v. 10, № 2, p. 367–393.
5. Cherny A. S., Madan D. B. Coherent measurement of factor risks. <http://arxiv.org:math/0605062v1>
6. Jung J. On linear estimates defined by a continuous weight function. — Ark. Mat., 1956, v. 3, p. 199–209.
7. Lehmann E. L. Some concepts of dependence. — Ann. Math. Statist., 1966, v. 37, p. 1137–1153.
8. Föllmer H., Schied A. Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time. Berlin: de Gruyter, 2004, 459 p.
9. Stigler S. M. Linear functions of order statistics with smooth weight functions. — Ann. Statist., 1974, v. 2, № 4, p. 676–693; corrections: *ibid.*, 1979, v. 7, № 2, p. 466.

Поступила в редакцию
29.VI.2007

© 2008 г.

ПРЕСМАН Э. Л.*

ОЦЕНКА КОНСТАНТЫ В НЕРАВЕНСТВЕ БУРКХОЛЬДЕРА ДЛЯ СУПЕРМАРТИНГАЛОВ И МАРТИНГАЛОВ¹⁾

Доказывается моментное неравенство типа Буркхольдера для супермартингалов и мартингалов. Доказательство сводится к усовершенствованию соответствующих рассуждений С.В. Нагаева, который получил это неравенство с большим значением константы.

Ключевые слова и фразы: математическое ожидание, мартингал, супермартингал, неравенство Буркхольдера, моменты.

1. Формулировка и обсуждение результатов. Пусть последовательность случайных величин $S_n = \sum_{k=0}^n X_k$, $n \geq 0$, образует супермартингал, заданный на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_k)_{k \geq 0}, \mathbf{P})$, где $X_0 = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, так что $\mathbf{E}\{X_{k+1} | \mathcal{F}_k\} \leq 0$, $k \geq 0$. Положим

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\{X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}\}, \quad \bar{X}_n = \max_{0 \leq k \leq n} X_k, \quad \bar{S}_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k.$$

Теорема 1. При $t \geq 1$ справедливо следующее неравенство:

$$\frac{(\mathbf{E}\bar{S}_n^t)^{1/t}}{(\mathbf{E}\bar{X}_n^t)^{1/t} + (\mathbf{E}B_n^t)^{1/t}} \leq c_t := \inf_{\alpha > 1} \varphi_t(\alpha),$$

где

$$\varphi_t(\alpha) = \alpha \frac{\exp(2t^{-1}(\alpha(\ln \alpha - 1) + 1))}{[\exp((t+1)^{-1}(\alpha(\ln \alpha - 1) + 1)) - 1]^{(t+1)/t}}.$$

Доказательство этой теоремы проводится в п. 2 усовершенствованием рассуждений из работы С.В. Нагаева [1], где, в частности, доказывалось соответствующее неравенство с другой функцией, которая, как показано ниже, заведомо больше c_t .

Пусть S_k , $k \geq 0$, — мартингал, $\hat{S}_n = \max_{1 \leq k \leq n} |S_k|$, $D_t = \mathbf{E}(\max_{1 \leq k \leq n} |X_k|^t)$.

Стандартным видоизменением доказательства теоремы 1 (см., например, [1]) получаем следующее утверждение.

* Центральный экономико-математический институт РАН, ул. Красикова, 47, 117418 Москва, Россия; e-mail: presman@cemi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 07-01-00541.а и 08-01-90252-Узб.а).