Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Л. Пресман, Оценка константы в неравенстве Буркхольдера для супермартингалов и мартингалов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 1, 172–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2492>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:36:59

3. Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. Coherent measures of risk. — Math. Finance, 1999, v. 9, № 3, p. 203–228.
4. Cherny A. S. Weighted V@R and its properties. — Finance Stoch., 2006, v. 10, № 2, p. 367–393.
5. Cherny A. S., Madan D. B. Coherent measurement of factor risks. <http://arxiv.org:math/0605062v1>
6. Jung J. On linear estimates defined by a continuous weight function. — Ark. Mat., 1956, v. 3, p. 199–209.
7. Lehmann E. L. Some concepts of dependence. — Ann. Math. Statist., 1966, v. 37, p. 1137–1153.
8. Föllmer H., Schied A. Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time. Berlin: de Gruyter, 2004, 459 p.
9. Stigler S. M. Linear functions of order statistics with smooth weight functions. — Ann. Statist., 1974, v. 2, № 4, p. 676–693; corrections: *ibid.*, 1979, v. 7, № 2, p. 466.

Поступила в редакцию
29.VI.2007

© 2008 г.

ПРЕСМАН Э. Л.*

ОЦЕНКА КОНСТАНТЫ В НЕРАВЕНСТВЕ БУРКХОЛЬДЕРА ДЛЯ СУПЕРМАРТИНГАЛОВ И МАРТИНГАЛОВ¹⁾

Доказывается моментное неравенство типа Буркхольдера для супермартингалов и мартингалов. Доказательство сводится к усовершенствованию соответствующих рассуждений С.В. Нагаева, который получил это неравенство с большим значением константы.

Ключевые слова и фразы: математическое ожидание, мартингал, супермартингал, неравенство Буркхольдера, моменты.

1. Формулировка и обсуждение результатов. Пусть последовательность случайных величин $S_n = \sum_{k=0}^n X_k$, $n \geq 0$, образует супермартингал, заданный на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_k)_{k \geq 0}, \mathbf{P})$, где $X_0 = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, так что $\mathbf{E}\{X_{k+1} | \mathcal{F}_k\} \leq 0$, $k \geq 0$. Положим

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\{X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}\}, \quad \bar{X}_n = \max_{0 \leq k \leq n} X_k, \quad \bar{S}_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k.$$

Теорема 1. При $t \geq 1$ справедливо следующее неравенство:

$$\frac{(\mathbf{E}\bar{S}_n^t)^{1/t}}{(\mathbf{E}\bar{X}_n^t)^{1/t} + (\mathbf{E}B_n^t)^{1/t}} \leq c_t := \inf_{\alpha > 1} \varphi_t(\alpha),$$

где

$$\varphi_t(\alpha) = \alpha \frac{\exp(2t^{-1}(\alpha(\ln \alpha - 1) + 1))}{[\exp((t+1)^{-1}(\alpha(\ln \alpha - 1) + 1)) - 1]^{(t+1)/t}}.$$

Доказательство этой теоремы проводится в п. 2 усовершенствованием рассуждений из работы С.В. Нагаева [1], где, в частности, доказывалось соответствующее неравенство с другой функцией, которая, как показано ниже, заведомо больше c_t .

Пусть S_k , $k \geq 0$, — мартингал, $\hat{S}_n = \max_{1 \leq k \leq n} |S_k|$, $D_t = \mathbf{E}(\max_{1 \leq k \leq n} |X_k|^t)$.

Стандартным видоизменением доказательства теоремы 1 (см., например, [1]) получаем следующее утверждение.

* Центральный экономико-математический институт РАН, ул. Красикова, 47, 117418 Москва, Россия; e-mail: presman@cemi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 07-01-00541.а и 08-01-90252-Узб.а).

Следствие 1. Если $S_k, k \geq 0$, — мартингал, то

$$(\mathbf{E}\hat{S}_n^t)^{1/t} \leq c_t(D_t^{1/t} + 2^{1/t}(\mathbf{E}B_n^t)^{1/t}).$$

Это неравенство получил в 1973 г. Д. Л. Буркхольдер [2] без явного указания функции c_t . В 1990 г. П. Хитченко [3] показал, что при $t \geq 2$ справедливо неравенство

$$(\mathbf{E}\hat{S}_n^t)^{1/t} < K \frac{t}{\ln t} (D_t^{1/t} + (\mathbf{E}B_n^t)^{1/t}), \quad (1)$$

где K — абсолютная постоянная. В 1997 г. Р. Ибрагимов и Ш. Шарахметов [4] показали, что если X_k — независимые симметрично распределенные случайные величины, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{t} \frac{(\mathbf{E}\hat{S}_n^t)^{1/t}}{D_t^{1/t} + (\mathbf{E}B_n^t)^{1/t}} = \frac{1}{e}. \quad (2)$$

Подробный обзор моментных неравенств для мартингалов см. в [5].

С учетом соотношений (1) и (2) представляет интерес рассмотреть функцию

$$K_t := \frac{\ln t}{t} \inf_{\alpha > 1} \varphi_t(\alpha).$$

Теорема 2. (а) При каждом $t > 0$ существует такое число $a_t > 1$, что функция $\varphi_t(\alpha)$ убывает при $1 < \alpha < a_t$ и возрастает при $\alpha > a_t$; функция a_t является единственным решением уравнения

$$-a + 1 + tx_t(a) - (1+t)(\ln(1+2x_t(a)) - \ln(1+x_t(a))) = 0, \quad (3)$$

где $x_t(a) = (a \ln a)/t$, при этом

$$\frac{a_t(\ln t)^2}{t} = \frac{2}{3} \left(1 + 4 \frac{\ln \ln t}{\ln t} + \frac{28/27 + \ln(9/4)}{\ln t} + O\left(\frac{(\ln \ln t)^2}{(\ln t)^2}\right) \right) \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (4)$$

(б) Функция $K_t = (\ln t) \varphi_t(a_t)/t$ убывает при $t \geq 2$ от $K_2 \approx 9.46$ до 1.

Доказательство этой теоремы проводится в п. 3.

Отметим, что соответствующая K_t функция, фигурирующая в [1], которую мы обозначаем $\tilde{K}_t$, убывает на интервале $2 < t < 20.1$, возрастает на интервале $20.1 < t < 49.94$ и убывает при $t > 49.94$ до значения 1.77.

В приводимой ниже таблице сравниваются значения упомянутых функций.

t	2	3	8	20	50	200	1000	10^5	10^{18}	∞
K_t	9.46	8.86	6.70	5.33	4.43	3.56	2.93	2.10	1.29	1
$\tilde{K}_t$	28.74	23.09	14.96	12.76	13.47	5.95	4.09	2.78	1.98	1.77

2. Доказательство теоремы 1. Для доказательства нам понадобятся два предложения, которые приведены в [1] в несколько иной формулировке.

Пусть $Q(x) = \mathbf{P}\{\bar{X}_n > x\} + \mathbf{P}\{B_n > x\}$.

Предложение 1. При всех $x > 0, y > 0, \alpha > 1$ выполняется неравенство

$$\mathbf{P}\{\bar{S}_n \geq x + \alpha y\} < \mathbf{P}\{\bar{S}_n \geq x\} e^{-(\alpha(\ln \alpha - 1) + 1)} + Q(y).$$

Именно это предложение доказано в [1], однако в формулировке там вместо множителя $e^{-(\alpha(\ln \alpha - 1) + 1)}$, который всегда меньше единицы, фигурирует $e^{-\alpha(\ln \alpha - 1)}$.

Предложение 2. Пусть неотрицательная функция $A(x)$ не возрастает при $x > 0$, имеет конечный предел при $x \downarrow 0$ и

$$A(t, x) = \frac{1}{x^t} \int_0^x A(u) u^{t-1} du = \int_0^1 A(xu) u^{t-1} du. \quad (5)$$

Если функция $B(x)$ имеет конечный верхний предел при $x \downarrow 0$ и существуют такие $\alpha > 0$ и $0 < p < 1$, что при всех $x, y > 0$ выполняется неравенство

$$B(x + \alpha y) \leq pB(x) + A(y), \quad (6)$$

то для любого $x > 0$ и любых таких ε и $\tilde{p}$, что $p \leq \tilde{p} < 1$ и $1 + \alpha\varepsilon < 1/\tilde{p}$, справедливо

$$B(x) \leq \frac{1}{\alpha\varepsilon\tilde{p}^2} A\left(-\frac{\ln\tilde{p}}{\ln(1+\alpha\varepsilon)}, \varepsilon x\right). \quad (7)$$

Доказательство. Неравенство (7) доказано в [1] для $\tilde{p} = p = e^{-\alpha(\ln\alpha-1)}$ и для конкретных $A(x) = Q(x)$ и $B(x) = P\{\bar{S}_n \geq x\}$, для которых, согласно предложению 1, неравенство (6) выполняется при любом $\alpha > 1$ и $p = e^{-\alpha(\ln\alpha-1)}$, при этом вместо $\alpha\varepsilon\tilde{p}^2$ там фигурирует $\alpha\varepsilon\tilde{p}^3$. Приводимое ниже доказательство лишь незначительно отличается от доказательства из [1].

Очевидно, что достаточно рассмотреть случай $p = \tilde{p}$. Пусть ε и x фиксированы. Фиксируем целое число $m > 1$ и рассмотрим последовательность

$$y_k = (1 + \alpha\varepsilon)^{k-m}x, \quad k \geq 0, \quad (8)$$

для которой $y_m = x$. Очевидно, что

$$y_k - y_{k-1} = \alpha\varepsilon y_{k-1}. \quad (9)$$

Подставляя в правую часть (6) в качестве аргумента первого слагаемого y_{k-1} , а в качестве аргумента второго слагаемого εy_{k-1} и используя (9), получаем

$$B(y_k) \leq B(y_{k-1})p + A(\varepsilon y_{k-1}).$$

Отсюда следует, что

$$B(x) = B(y_m) \leq \sum_{k=1}^{m-1} A(\varepsilon y_k) p^{m-k-1} + B(y_1) p^{m-1}. \quad (10)$$

Положим

$$s := -\frac{\ln p}{\ln(1+\alpha\varepsilon)} > 1. \quad (11)$$

Используя сначала (9), затем (8) и, наконец, равенство $1/p = (1+\alpha\varepsilon)^s$, которое следует из (11), получим

$$\frac{1}{x^s} (y_{k-1})^{s-1} (y_k - y_{k-1}) = \alpha\varepsilon \left(\frac{y_{k-1}}{x}\right)^s = \alpha\varepsilon ((1+\alpha\varepsilon)^s)^{k-1-m} = \alpha\varepsilon p^{m-k+1}. \quad (12)$$

Из этого равенства и того, что функции $A(x)$ и x^{s-1} не возрастают, следует, что

$$A(\varepsilon y_k) p^{m-k-1} = \frac{1}{\alpha\varepsilon p^2} \frac{1}{x^s} A(\varepsilon y_k) (y_{k-1})^{s-1} (y_k - y_{k-1}) \leq \frac{1}{\alpha\varepsilon p^2} \frac{1}{x^s} \int_{y_{k-1}}^{y_k} A(\varepsilon u) u^{s-1} du.$$

Отсюда, а также из (10) и неотрицательности функции $A(x)$ следует

$$B(x) \leq \frac{1}{\alpha\varepsilon p^2} \frac{1}{x^s} \int_0^x A(\varepsilon u) u^{s-1} du + B(y_1) p^{m-1}. \quad (13)$$

Используя ограниченность величины $\limsup_{x \downarrow 0} B(x)$, в соотношении (13) можно перейти к пределу при $m \rightarrow \infty$, что завершает доказательство предложения 2.

Отметим, что в работе [1] рассматривалась последовательность $y_k = \beta(1 + \alpha\varepsilon)^k$ для такого β , что $y_m \leq x < y_{m+1}$, а в равенстве (12) вместо x фигурировало y_{m+1} . Именно за счет этого там получалось p^3 вместо p^2 . Кроме того, в работе [1] использовалась монотонность функции $B(x)$, которую мы не требуем.

Согласно второму равенству в (5), функция $A(t, x)$ не возрастает по t . Поэтому если $1 + \alpha\varepsilon \leq p^{-1/(t+1)}$, то можно взять $\tilde{p} = e^{-(t+1)\ln(1+\alpha\varepsilon)}$, а значит,

$$B(x) \leq \frac{(1 + \alpha\varepsilon)^{2(t+1)}}{\alpha\varepsilon} \frac{1}{(\varepsilon x)^{t+1}} \int_0^{\varepsilon x} A(u) u^t du \quad (14)$$

при $1 + \alpha\varepsilon \leq p^{-1/(t+1)}$. Домножая (14) на x^{t-1} , интегрируя по x от 0 до ∞ и меняя в правой части порядок интегрирования, получаем следующий результат.

Следствие 2. Если $t > 0$, а $A(x)$ и $B(x)$ удовлетворяют условиям предложения 2, то для любого такого ε , что $\varepsilon > 0$, $1 + \alpha\varepsilon \leq p^{-1/(t+1)}$, выполняется неравенство

$$\int_0^\infty B(x) x^{t-1} dx \leq \frac{(1 + \alpha\varepsilon)^{2(t+1)}}{(\alpha\varepsilon)^{t+1}} \alpha^t \int_0^\infty A(x) x^{t-1} dx. \quad (15)$$

Рассмотрим теперь случай $B(x) = \mathbf{P}\{\bar{S}_n \geq x\}$, $A(x) = Q(x)$, когда неравенство (6) выполняется для любого $\alpha > 1$ при $p = p(\alpha) = e^{-(\alpha(\ln \alpha - 1) + 1)}$. В этом случае при фиксированном t коэффициент при интеграле в правой части (15) можно рассматривать как функцию двух переменных $x = \alpha\varepsilon$ и α , которая при фиксированном x достигает минимума при минимально возможном значении α , а значит, минимум по области достигается на ее границе, т.е. на кривой $1 + \alpha\varepsilon = (p(\alpha))^{-1/(t+1)}$. Домножая неравенство (15) на t , возводя обе части в степень $1/t$ и используя элементарное неравенство, связывающее момент суммы и сумму моментов, получаем утверждение теоремы.

Заметим, что в работе [1] при фиксированном t рассматривались не оптимальные, а некоторые конкретные значения α_t и ε_t . Поэтому наша константа заведомо не хуже константы, полученной в работе [1].

3. Доказательство теоремы 2. Функцию $\varphi_t(\alpha)$ можно представить в виде

$$\varphi_t(a) = a f^{(t+1)/t}(u_t(a)), \quad \text{где} \quad f(u) = \frac{u^2}{u-1}, \quad u_t(a) = \exp\left(\frac{a(\ln a - 1) + 1}{t+1}\right). \quad (16)$$

Используя это представление, переходя к логарифмам и учитывая равенства

$$\frac{d}{du} \ln f(u) = \frac{u-2}{(u-1)u} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_t(a)}{\partial a} = \frac{\ln a}{t+1} u_t(a),$$

получаем

$$\frac{1}{\varphi_t(a)} \frac{\partial}{\partial a} \varphi_t(a) = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{a \ln a}{t} \frac{u_t(a) - 2}{u_t(a) - 1}\right) = \frac{1}{a} \frac{1 + (2a \ln a)/t}{u_t(a) - 1} \left[\exp\left(\frac{b_t(a)}{t+1}\right) - 1\right], \quad (17)$$

где

$$b_t(a) = b_t(a, x_t(a)), \quad x_t(a) = \frac{a \ln a}{t}, \quad (18)$$

$$b_t(a, x) = -a + 1 + tx - (t+1)(\ln(1+2x) - \ln(1+x)). \quad (19)$$

Поскольку $\partial x_t(a)/\partial a = (1 + \ln a)/t$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} b_t(a) &= -1 + \left(1 - \frac{t+1}{t} \frac{1}{1+2x_t(a)} \frac{1}{1+x_t(a)}\right) (1 + \ln a) \\ &= \ln a \left[1 - \frac{1 + \ln a}{\ln a} \frac{t+1}{t} \frac{1}{1+2x_t(a)} \frac{1}{1+x_t(a)}\right]. \end{aligned}$$

При возрастании a от 1 до $+\infty$ выражение в квадратных скобках растет от $-\infty$ до 1, а поскольку $b_t(1) = 0$, то функция $b_t(a)$ сначала убывает и отрицательна, а потом возрастает до $+\infty$. А значит, существует такое a_t , что

$$b_t(a_t) \equiv 0, \quad b_t(a) < 0 \quad \text{при} \quad 1 < a < a_t, \quad b_t(a) > 0 \quad \text{при} \quad a > a_t. \quad (20)$$

Эта точка является точкой минимума функции $\varphi_t(a)$. Тем самым доказаны существование a_t и тот факт, что a_t является единственным решением уравнения (3).

Пусть

$$\tilde{a}_t = \frac{2t}{3(\ln t)^2} \left(1 + 4 \frac{\ln \ln t}{\ln t} + \frac{c}{\ln t}\right), \quad (21)$$

где c ограничено. Тогда

$$\begin{aligned} x_t(\tilde{a}_t) &= \frac{a_t \ln a_t}{t} = \frac{2}{3(\ln t)^2} \left(1 + 4 \frac{\ln \ln t}{\ln t} + \frac{c}{\ln t}\right) \left(\ln t + \ln \frac{2}{3} - 2 \ln \ln t + O\left(\frac{\ln \ln t}{\ln t}\right)\right) \\ &= \frac{2}{3 \ln t} \left(1 + 2 \frac{\ln \ln t}{\ln t} + \frac{c + \ln(2/3)}{\ln t} + O\left(\frac{\ln \ln t}{(\ln t)^2}\right)\right), \end{aligned} \quad (22)$$

$$x_t^2(\tilde{a}_t) = \frac{4}{9(\ln t)^2} \left(1 + 4 \frac{\ln \ln t}{\ln t} + 2 \frac{c + \ln(2/3)}{\ln t} + O\left(\frac{(\ln \ln t)^2}{(\ln t)^2}\right)\right). \quad (23)$$

Используя формулу Тейлора до членов третьего порядка, получаем из (18) и (19), что

$$b_t(a) = -a + 1 + \frac{3}{2}(t+1)x_t^2(a) \left(1 - \frac{14}{9}x_t(a) + O(x_t^2(a))\right) - x_t(a). \quad (24)$$

Подставляя (21)–(23) в (24), получаем, что $b_t(\tilde{a}_t) \cdot 3(\ln t)^3/(2t) = c - \frac{28}{27} - 2\ln(3/2) + O((\ln \ln t)^2/\ln t)$. Отсюда с учетом (21) и (20) получаем (4), что завершает доказательство л. (а) теоремы 2.

Перейдем к доказательству п. (б). Заметим сначала, что из представления (16) после перехода к логарифмам с учетом того, что $d \ln f(u)/du = (u-2)/((u-1)u)$ и $\partial u_t(a)/\partial t = -u_t(a)(a_t(\ln a_t - 1) + 1)/(t+1)^2$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi_t(a_t)} \frac{\partial \varphi_t(a)}{\partial t} \Big|_{a=a_t} &= \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t+1}{t} \ln f(u_t(a)) \right) \right] \Big|_{a=a_t} \\ &= \left[-\frac{1}{t^2} \ln \frac{u_t^2(a_t)}{u_t(a_t) - 1} - \frac{t+1}{t} \frac{u_t(a_t) - 2}{u_t(a_t) - 1} \frac{a_t(\ln a_t - 1) + 1}{(t+1)^2} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Положим $u_t = u_t(a_t)$, $x_t = (a_t \ln a_t)/t$. Из первого соотношения в (20) и из (17) следует, что $[\partial \varphi_t(a)/\partial a]_{a=a_t} = 0$. Отсюда и из первого соотношения в (17) получаем

$$\frac{u_t - 2}{u_t - 1} = -\frac{1}{x_t}, \quad u_t = \frac{1 + 2x_t}{1 + x_t}, \quad u_t - 1 = \frac{x_t}{1 + x_t}, \quad \frac{a_t(\ln a_t - 1) + 1}{t + 1} = \ln \frac{1 + 2x_t}{1 + x_t}, \quad (26)$$

при этом последнее равенство следует из (18), (19) и первого равенства в (20).

Подставляя первые три равенства из (26) в (25) и учитывая, что $a_t \ln a_t = tx_t$, получаем

$$\frac{\partial \varphi_t(a)}{\partial t} \Big|_{a=a_t} = \frac{\varphi_t(a_t)}{t} \left[\frac{1}{x_t} \frac{tx_t - a_t + 1}{t + 1} - \frac{1}{t} \ln \frac{(1 + 2x_t)^2}{x_t(1 + x_t)} \right]. \quad (27)$$

Дифференцирование равенства $K_t = (\varphi_t(a_t) \ln t)/t$ дает

$$\frac{dK_t}{dt} = \frac{1 - \ln t}{t^2} \varphi_t(a_t) + \frac{\ln t}{t} \left(\frac{\partial \varphi_t(a)}{\partial t} \Big|_{a=a_t} + \frac{\partial \varphi_t(a)}{\partial a} \Big|_{a=a_t} \frac{da_t}{dt} \right). \quad (28)$$

С учетом (27) и того, что $[\partial \varphi_t(a)/\partial a]_{a=a_t} = 0$, получаем, что $dK_t/dt = \varphi_t(a_t)(1 - \Psi_t)/t^2$, где

$$\frac{\Psi_t}{\ln t} = 1 - \frac{1}{x_t} \frac{tx_t - a_t + 1}{t + 1} + \frac{1}{t} \ln \frac{(1 + 2x_t)^2}{x_t(1 + x_t)} = \frac{a_t - 1}{tx_t} + \frac{tx_t - a_t + 1}{t(t + 1)x_t} + \frac{1}{t} \ln \frac{(1 + 2x_t)^2}{x_t(1 + x_t)}. \quad (29)$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем, что $(t+1)^{-1} = t^{-1} - (t(t+1))^{-1}$.

Таким образом, для доказательства убывания функции K_t при $t > 2$ достаточно показать, что $\Psi_t > 1$ при $t > 2$. Положим

$$\begin{aligned} \Psi_1(y) &= \frac{y \ln y}{y - 1} \quad \text{при } y > 1, \\ \Psi_2(y) &= \frac{1}{y} \ln \frac{1 + 2y}{1 + y}, \quad \Psi_3(y) = \ln \frac{(1 + 2y)^2}{y(1 + y)} \quad \text{при } y > 0, \\ \Psi_t(a, x) &= \frac{\ln t}{\Psi_1(a)} + \frac{\ln t}{t} (\Psi_2(x) + \Psi_3(x)). \end{aligned} \quad (30)$$

Подставляя в правую часть (29) последнее равенство из (26), с учетом равенства $a_t \ln a_t = tx_t$ получаем, что

$$\Psi_t = \Psi_t(a_t, x_t). \quad (31)$$

Отметим, что функции $\Psi_i(y)$, $i = 1, 2, 3$, положительны, функция $\Psi_1(y)$ возрастает, а функции $\Psi_2(y)$ и $\Psi_3(y)$ убывают. Отсюда и из соотношений (31) и (31) вытекает, что если нам удастся построить такую функцию $\hat{a}_t$, что

$$\hat{a}_t > a_t, \quad \Psi_t(\hat{a}_t, x_t(\hat{a}_t)) > 1, \quad (32)$$

то убывание функции K_t при $t > 2$ будет доказано.

Мы утверждаем, что при $t \geq 2.1$ функция $\bar{a}_t = (t+5)/\ln(t+5)$ удовлетворяет (32). Покажем сначала, что для $\hat{a}_t = \bar{a}_t$ первое неравенство в (32) выполняется при $t \geq 2$. Из (18)–(20) следует, что для этого достаточно доказать, что $b_t(\bar{a}_t, x_t(\bar{a}_t)) > 0$. Заметим сначала, что $\bar{x}_t := x_t((t+5)/\ln(t+5)) = (1+5/t)(1 - (\ln \ln(t+5))/\ln(t+5))$.

Из того, что функция $(\ln x)/x$ при $x = e$ достигает максимума, равного $1/e$, следует, что $\bar{x}_t \geq 1 - (1/e) > 0.632$. В рассматриваемом случае

$$\bar{b}_t = b_t(\bar{a}_t, \bar{x}_t) = -\frac{t+5}{\ln(t+5)} + 1 - \ln \frac{1+2\bar{x}_t}{1+\bar{x}_t} + t \left(\bar{x}_t - \ln \frac{1+2\bar{x}_t}{1+\bar{x}_t} \right). \quad (33)$$

Из полученной оценки для $\bar{x}_t$ и возрастания функций $x - \ln((1+2x)/(1+x))$ и $\ln((1+2x)/(1+x))$ следует, что $\bar{b}_t \geq -(t+5)/\ln(t+5) + 1 - \ln 2 + t[0.632 - \ln((1+1.264)/(1+0.632))]$. Функция в правой части последнего неравенства положительна при $t \geq 34$.

Нетрудно проверить, что функция $\bar{x}_t$ убывает на интервале $[2, 34]$. Отсюда, из (33) и возрастания функций $x/\ln x$, $x - \ln((1+2x)/(1+x))$ и $\ln((1+2x)/(1+x))$ получаем, что если $k < t \leq k+1$, то

$$\bar{b}_t > -\frac{k+1+5}{\ln(k+1+5)} + 1 - \ln \frac{1+2\bar{x}_{k+1}}{1+\bar{x}_{k+1}} + k \left(\bar{x}_k - \ln \frac{1+2\bar{x}_k}{1+\bar{x}_k} \right) =: c_k.$$

Непосредственное вычисление (например, с использованием EXCEL) показывает, что $c_k > 0$ при $2 \leq k < 34$. Это завершает доказательство первого неравенства в (32).

Для доказательства второго неравенства в (32) покажем, что $(\ln t)/\Psi_1(\bar{a}_t) > 1$ при $t \geq 11$. Из положительности функций $\Psi_2(x)$ и $\Psi_3(x)$ и из (31) следует, что отсюда будет вытекать выполнение второго неравенства в (32) при $t \geq 11$. Неравенство $(\ln t)/\Psi_1(\bar{a}_t) > 1$ эквивалентно неравенству $\ln \ln(t+5) - \ln(1+5/t) - (\ln t \ln(t+5))/(t+5) > 0$, которое, очевидно, вытекает из неравенства $\ln \ln(t+5) - \ln(1+5/t) - (\ln(t+5))^2/(t+5) > 0$. Функция, стоящая в левой части последнего неравенства, возрастает и при $t = 11$ принимает значение 0.069. Тем самым доказано выполнение второго неравенства в (32) при $t \geq 11$. Доказательство для $2.1 \leq t < 11$ проводится аналогично доказательству того, что $\bar{b}_t > 0$ на отрезке $[2, 34]$, при этом надо учитывать функции $\Psi_2(x)$ и $\Psi_3(x)$.

Заметим теперь, что непосредственный подсчет показывает, что $\Psi_2 \approx 1.002$, $\Psi_{2.1} \approx 1.004$, в то время как $\Psi_2(\bar{a}_2, x_2(\bar{a}_2)) \approx 0.962$, $\Psi_{2.1}(\bar{a}_{2.1}, x_{2.1}(\bar{a}_{2.1})) \approx 1.003$. Таким образом при $2 < t < 2.1$ в качестве $\hat{a}_t$ нужно использовать функцию, отличную от $\bar{a}_t$. Можно использовать линейное приближение. Доказательство носит аналогичный характер, и мы его опускаем. Тем самым доказано, что K_t убывает при $t > 2$.

Значение K_2 получается из того, что $a_2 \approx 3.18$. Последний факт следует из того, что это значение обращает в нуль функцию $b_2(a, x_2(a))$ из (18).

Осталось показать, что $\lim_{t \rightarrow \infty} K_t = 1$. Из определения функции K_t , представления (16) и соотношений (26) получаем, что

$$K_t = \frac{\ln t}{t} a_t \left(\frac{(1+2x_t)^2}{x_t(1+x_t)} \right)^{(t+1)/t}.$$

Подстановка в это выражение главных частей из (21) и (8) завершает доказательство теоремы 2.

Автор выражает благодарность С. В. Нагаеву за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нагаев С. В. О вероятностных и моментных неравенствах для супермартингалов и мартингалов. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, в. 2, с. 391–400.
2. Burkholder D. L. Distribution function inequalities for martingales. — Ann. Probab., 1973, v. 1, p. 19–42.
3. Hitczenko P. Best constants in martingale version of Rosenthal's inequality. — Ann. Probab., 1990, v. 18, № 4, p. 1656–1668.

4. Ибрагимов Р., Шараметов Ш. Точная константа в неравенстве Розенталя для случайных величин с нулевым средним. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 1, с. 134–138.
5. Пешкир Г., Ширяев А. Н. Неравенства Хинчина и мартингальное расширение сферы их действия. — Успехи матем. наук, 1995, т. 50, № 5, с. 3–62.

Поступила в редакцию
15.VIII.2006

© 2008 г.

ПУГАЧЕВ О. В.*

ЕМКОСТИ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ МЕРЫ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ¹⁾

Доказывается плотность емкостей, порожденных соболевскими классами любого порядка в широком классе локально выпуклых пространств. Эти емкости применяются при построении поверхностных мер на множествах уровня соболевских функций и локальных соболевских функций.

Ключевые слова и фразы: дифференцируемая мера, соболевские классы в локально выпуклых пространствах, плотность емкости, поверхностная мера, формула Остроградского–Гаусса, локальные соболевские функции.

1. Введение. Поверхностные меры и емкости в бесконечномерных пространствах представляют интерес как для самой аналитической и геометрической теории меры, так и для ее приложений в нелинейном анализе, в теории случайных процессов, в теории линейных дифференциальных уравнений относительно функций и мер.

Первый подход к построению поверхностных мер в бесконечномерных пространствах берет начало в книге А. В. Скорохода [1], затем он был существенно развит в работах А. В. Угланова [2]–[4]. Он основан на построении локальных поверхностных мер в достаточно малых окрестностях точек поверхности.

Совершенно другой подход, реализованный Э. Эро и П. Маллявэном в работе [5] для винеровской меры и В. И. Богачевым [6]–[8] для дифференцируемых мер, в дальнейшем был развит автором. В этом методе мера строится сразу на всей поверхности, а условия гладкости поверхности связаны не с геометрией объемлющего пространства, а с геометрией подпространства Камерона–Мартина, причем функция, задающая поверхность, принадлежит соболевскому классу, она даже не обязана быть непрерывной (таковы типичные функции, появляющиеся в теории случайных процессов).

В приложениях иногда встречаются функции, не являющиеся соболевскими глобально, но обладающие подобными свойствами локально. Цель данной работы – обобщить результаты, полученные в [9], [10], для локальных соболевских функций и задаваемых ими поверхностей.

Новизна данной работы по сравнению с [9]–[11] также и в том, что результаты получены для более широкого класса локально выпуклых пространств.

2. Соболевские классы. Пусть X — локально выпуклое пространство; пусть сепарабельное гильбертово пространство H непрерывно вложено в X . Обозначим через $\langle \cdot; \cdot \rangle$ скалярное произведение в H , через $|\cdot|$ — норму в H . Тогда формула

$$j_H: X^* \rightarrow H^* = H, \quad \langle j_H(l); h \rangle = l(h) \quad \forall h \in H,$$

* Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, 2-я Бауманская ул., 5, 105005 Москва, Россия; e-mail: opugachev@yandex.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 07-01-00536 и DFG 436 RUS 113/343/0(R).