Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Пугачев, Емкости и поверхностные меры в локально выпуклых пространствах, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 1, 178–189

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2493>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 15:42:11

4. Ибрагимов Р., Шараметов Ш. Точная константа в неравенстве Розенталя для случайных величин с нулевым средним. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 1, с. 134–138.
5. Пешкир Г., Ширяев А. Н. Неравенства Хинчина и мартингальное расширение сферы их действия. — Успехи матем. наук, 1995, т. 50, № 5, с. 3–62.

Поступила в редакцию
15.VIII.2006

© 2008 г.

ПУГАЧЕВ О. В.*

ЕМКОСТИ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ МЕРЫ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ¹⁾

Доказывается плотность емкостей, порожденных соболевскими классами любого порядка в широком классе локально выпуклых пространств. Эти емкости применяются при построении поверхностных мер на множествах уровня соболевских функций и локальных соболевских функций.

Ключевые слова и фразы: дифференцируемая мера, соболевские классы в локально выпуклых пространствах, плотность емкости, поверхностная мера, формула Остроградского–Гаусса, локальные соболевские функции.

1. Введение. Поверхностные меры и емкости в бесконечномерных пространствах представляют интерес как для самой аналитической и геометрической теории меры, так и для ее приложений в нелинейном анализе, в теории случайных процессов, в теории линейных дифференциальных уравнений относительно функций и мер.

Первый подход к построению поверхностных мер в бесконечномерных пространствах берет начало в книге А. В. Скорохода [1], затем он был существенно развит в работах А. В. Угланова [2]–[4]. Он основан на построении локальных поверхностных мер в достаточно малых окрестностях точек поверхности.

Совершенно другой подход, реализованный Э. Эро и П. Маллявэном в работе [5] для винеровской меры и В. И. Богачевым [6]–[8] для дифференцируемых мер, в дальнейшем был развит автором. В этом методе мера строится сразу на всей поверхности, а условия гладкости поверхности связаны не с геометрией объемлющего пространства, а с геометрией подпространства Камерона–Мартина, причем функция, задающая поверхность, принадлежит соболевскому классу, она даже не обязана быть непрерывной (таковы типичные функции, появляющиеся в теории случайных процессов).

В приложениях иногда встречаются функции, не являющиеся соболевскими глобально, но обладающие подобными свойствами локально. Цель данной работы – обобщить результаты, полученные в [9], [10], для локальных соболевских функций и задаваемых ими поверхностей.

Новизна данной работы по сравнению с [9]–[11] также и в том, что результаты получены для более широкого класса локально выпуклых пространств.

2. Соболевские классы. Пусть X — локально выпуклое пространство; пусть сепарабельное гильбертово пространство H непрерывно вложено в X . Обозначим через $\langle \cdot; \cdot \rangle$ скалярное произведение в H , через $|\cdot|$ — норму в H . Тогда формула

$$j_H: X^* \rightarrow H^* = H, \quad \langle j_H(l); h \rangle = l(h) \quad \forall h \in H,$$

* Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, 2-я Бауманская ул., 5, 105005 Москва, Россия; e-mail: opugachev@yandex.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 07-01-00536 и DFG 436 RUS 113/343/0(R).

задает непрерывное отображение с плотным множеством значений. Если функция f дифференцируема в точке $x \in X$ в каком-либо смысле (Гато, Фреше или Соболева), то вектор $D_H f(x) = j_H(f'(x))$ (градиент вдоль H) соответствует линейному функционалу $f'(x) \in X^*$.

Если μ — мера на X и функция g является μ -измеримой, то $g \cdot \mu$ будет обозначать меру с плотностью g относительно μ .

Пусть E — сепарабельное гильбертово пространство. Обозначим $\mathcal{H}_1(H, E)$ класс операторов Гильберта–Шмидта из H в E , наделенный нормой Гильберта–Шмидта

$$\|T\|_{\mathcal{H}_1(H, E)}^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|Te_m\|_E^2,$$

где $\{e_m\}$ — ортонормированный базис в H . Классы операторов Гильберта–Шмидта высших порядков определяются индуктивно:

$$\mathcal{H}_n(H, E) = \mathcal{H}_1(H, \mathcal{H}_{n-1}(H, E)), \quad n = 2, 3, \dots,$$

они наделены нормами

$$\|T\|_{\mathcal{H}_n(H, E)}^2 = \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_n=1}^{\infty} \|T(e_{m_1}, \dots, e_{m_n})\|_E^2.$$

При $n = 0$ естественно положить $\mathcal{H}_0(H, E) = E$.

Функция $f: X \rightarrow E$ называется гладкой цилиндрической, если она имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=1}^n u_k(l_1(x), \dots, l_m(x))y_k,$$

где $n, m \in \mathbf{N}$, $u_k \in C_b^\infty(\mathbf{R}^m)$, $l_j \in X^*$, $y_k \in E$. Обозначим класс таких функций $\mathcal{FC}_b^\infty(X, E)$. Легко видеть, что любая гладкая цилиндрическая функция f непрерывна и бесконечно дифференцируема по Фреше; ее градиент r -го порядка вдоль H принадлежит $\mathcal{H}_r(H, E)$ в любой точке $x \in X$, и его норма Гильберта–Шмидта $\|D_H^r f(x)\|_{\mathcal{H}_r(H, E)}$ равномерно ограничена.

Всюду далее в случае $E = \mathbf{R}$ мы будем опускать индекс E в обозначениях классов функций.

О п р е д е л е н и е 2.1. Мера μ на X дифференцируема в смысле Фомина вдоль вектора $h \in X$, если существует знакопеременная мера $d_h \mu$ такая, что для любого борелевского множества $B \subset X$ имеем

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{\mu(B + th) - \mu(B)}{t} = d_h \mu(B).$$

Известно (см. [7], [8]), что мера $d_h \mu$ абсолютно непрерывна по мере μ . Соответствующая плотность Радона–Никодима обозначается β_h^μ и называется логарифмической производной меры μ вдоль вектора h .

Для негауссовской вероятностной меры μ на локально выпуклом пространстве X введем следующий аналог пространства Камерона–Мартина:

$$H(\mu) = \left\{ h \in X: \beta_h^\mu \in L^2(\mu) \right\}.$$

Это пространство оказывается гильбертовым с нормой $\|h\|_{H(\mu)} = \|\beta_h^\mu\|_{L^2(\mu)}$; оно непрерывно вложено в X ; если $L^2(\mu)$ сепарабельно, то сепарабельно и $H(\mu)$ (см. [8, гл. 5]).

Далее будем предполагать, что мера μ такова, что если функция $\varphi \in \mathcal{FC}_b^\infty(X)$ равна нулю μ -п.в., то μ -п.в. $D_H \varphi = 0$. В частности, это верно в случае $\text{supp } \mu = X$. Дополнительно предположим, что

$$j_H(X^*) \subset H(\mu). \quad (1)$$

Мера μ дифференцируема (в смысле Фомина) вдоль векторного поля $v: X \rightarrow X$, если существует μ -интегрируемая функция δv (дивергенция v) такая, что

$$\int \partial_v \varphi(x) \mu(dx) = - \int \varphi(x) \delta v(x) \mu(dx) \quad \forall \varphi \in \mathcal{FC}_b^\infty(X).$$

О п р е д е л е н и е 2.2. Функция $f \in L^p(\mu, E)$ входит в соболевский класс $W^{r,p}(\mu, E)$, $p \geq 1$, $r \in \mathbf{N}$, если существует последовательность функций $f_n \in \mathcal{F}\mathcal{C}_b^\infty(X, E)$, сходящаяся к f в $L^p(\mu, E)$ и фундаментальная по норме

$$\|f\|_{r,p,E} = \|f\|_{L^p(\mu,E)} + \sum_{k=1}^r \|D_H^k f\|_{L^p(\mu, \mathcal{H}_k(H,E))}. \quad (2)$$

Для $m = 1, \dots, r$ предел в $L^p(\mu, \mathcal{H}_m(H, E))$ функций $D_H^m f_n$ называется градиентом порядка m функции f и обозначается символом $D_H^m f$.

Если выполнено условие (1), то при $p \geq 2$ соболевские градиенты не зависят от выбора последовательности $\{f_n\}$.

Доказательства следующих четырех лемм можно найти в [8] и [10].

Лемма 2.1. (i) Если $f \in W^{r,p}(\mu)$, $g \in W^{r,q}(\mu)$, $1 < p, q < \infty$, $1/p + 1/q = 1/s \leq 1$, то $fg \in W^{r,s}(\mu)$, причем $\|fg\|_{r,s} \leq 2^r \|f\|_{r,p} \|g\|_{r,q}$.

(ii) Если $f \in W^{r,p}(\mu, H)$, $h \in W^{r,q}(\mu, H)$ для $r \geq 0$, $1/p + 1/q = 1/s \leq 1$, то $\langle f, h \rangle \in W^{r,s}(\mu)$.

Лемма 2.2. Пусть $f \in W^{r,p}(\mu)$; пусть $\varphi \in C_b^{r-1}(\mathbf{R})$ такова, что $\varphi^{(r-1)}$ липшицева. Тогда функция $\varphi \circ f \in W^{r,p}(\mu)$ и ее градиенты порядка от 1 до r выражаются по цепному правилу:

$$D_H(\varphi \circ f) = \varphi' \circ f \cdot D_H f, \quad D_H^2(\varphi \circ f) = \varphi'' \circ f \cdot D_H f \otimes D_H f + \varphi' \circ f \cdot D_H^2 f \quad \text{и т.д.}$$

Лемма 2.3. Пусть $f \in W^{1,p}(\mu)$. Если мера μ дифференцируема вдоль векторного поля $v \in L^q(\mu, H)$, $\delta v \in L^q(\mu)$, $1/p + 1/q = 1$, то мера $f\mu$ также дифференцируема вдоль v , причем $d_v(f\mu) = (f \cdot \delta v + \delta_v f)\mu$.

Лемма 2.4. Если $j_H(X^*) \subset H(\mu)$, то соболевские классы $W^{r,p}(\mu)$, $p \geq 2$, обладают свойством локальности, т.е. если функция f принадлежит к одному из таких классов и $A = \{f = 0\}$, то все производные f порядков $k \leq r$ обращаются в нуль μ -п.в. на A .

3. Емкости. Пусть $\mathcal{F}$ — некоторый класс функций, наделенный такой нормой $\|\cdot\|_0$, что если μ -п.в. $f = 0$, то $\|f\|_0 = 0$. Емкость, порожденная $\mathcal{F}$, определяется следующим образом.

О п р е д е л е н и е 3.1. Если множество $U \subset X$ открыто, то

$$C_{\mathcal{F}}(U) = \inf\{\|f\|_0 : f \in \mathcal{F}, f \geq 0; f \geq 1 \text{ на } U \mu\text{-п.в.}\}.$$

Для произвольного множества $A \subset X$ положим

$$C_{\mathcal{F}}(A) = \inf\{C_{\mathcal{F}}(U) : A \subset U, U \text{ открыто}\}.$$

О п р е д е л е н и е 3.2. Функция f называется $C_{\mathcal{F}}$ -квазинепрерывной, если существуют такие замкнутые множества $Q_1 \subset Q_2 \subset \dots$, что f непрерывна на каждом Q_n и $C_{\mathcal{F}}(X \setminus Q_n) < 1/n$.

Известно, что для любой функции $f \in W^{r,p}(\mu)$ существует $C_{W^{r,p}}$ -квазинепрерывная μ -версия (см. [8, теорема 7.4.6]). Очевидно, что для любого множества $A \subset X$ верны оценки $C_{W^{r,p}}(A) \leq C_{W^{r',p'}}(A)$ при $p \leq p'$, $r \leq r'$.

О п р е д е л е н и е 3.3. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, непрерывно вложенное в X . Будем говорить, что H удовлетворяет условию (T1), если существует центрированная радоновская гауссовская мера γ на X такая, что $H \subset H(\gamma)$ (это вложение автоматически непрерывно).

Лемма 3.1. Пусть $H \subset X$ — сепарабельное гильбертово пространство, удовлетворяющее (T1). Пусть $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ — ограниченная борелевская функция. Тогда функция

$$F(x) = \int_X f(x+y) \gamma(dy) \quad (3)$$

бесконечно много раз дифференцируема по Гато вдоль H , ее производные $D_H^n F(x)$ являются операторами Гильберта-Шмидта и

$$\|D_H^n F(x)\|_{\mathcal{H}_n(H)} \leq c_n \|f(x + \cdot)\|_{L^2(\gamma)} \leq c_n \sup_y |f(y)|,$$

где $c_n = c^n \sqrt{n!}$ и c есть норма оператора вложения $H \hookrightarrow H(\gamma)$.

Доказательство. Пусть H_0 — замыкание H в $H(\gamma)$, наделенное нормой из пространства $H(\gamma)$. Гильбертово пространство H_0 сепарабельно, как и H . Поскольку вложение $H \hookrightarrow H(\gamma)$ имеет ограниченную норму c , получаем

$$\|T\|_{\mathcal{H}_n(H, E)} \leq c^n \|T\|_{\mathcal{H}_n(H_0, E)}$$

для любого оператора Гильберта–Шмидта $T: H_0 \rightarrow E$. Следовательно, достаточно доказать наше утверждение в случае равенства норм H и H_0 . Существование производных Гато следует из [8, пример 2.1.15]. Пусть $\{e_j\}$ — ортонормированный базис $H = H_0$. Зафиксируем порядки дифференцирования $k_1, k_2, \dots$ вдоль $e_1, e_2, \dots$ соответственно; $k_1 + \dots + k_m = n$. Обозначим $L_m = \{\sum_{j=1}^m t_j e_j \mid t_j \in \mathbf{R}\}$; $X = X_m \oplus L_m$. Тогда γ представима в виде произведения гауссовских мер на X_m и на L_m . Имеем

$$\gamma = \gamma_m \otimes \left(\frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m t_j^2 \right] dt_1 \cdots dt_m \right).$$

Разложив $y = z + \sum_{j=1}^m t_j e_j$, находим

$$\begin{aligned} \partial_{e_1}^{k_1} \cdots \partial_{e_m}^{k_m} F(x) &= \partial_{t_1}^{k_1} \cdots \partial_{t_m}^{k_m} \int_{X_m} \int_{L_m} f \left(x + z + \sum_{j=1}^m t_j e_j \right) \\ &\quad \times \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m t_j^2 \right] dt_1 \cdots dt_m \gamma_m(dz) \\ &= \int_{X_m} \int_{L_m} f \left(x + z + \sum_{j=1}^m t_j e_j \right) \prod_{j=1}^m \left(\partial_{t_j}^{k_j} \frac{\exp(-t_j^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \right) dt_1 \cdots dt_m \gamma_m(dz) \\ &= (-1)^n \int_X f \left(x + z + \sum_{j=1}^m t_j e_j \right) \prod_{j=1}^m \left(\sqrt{k_j!} H_{k_j}(t_j) \right) \gamma(dy), \end{aligned}$$

где $H_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, — полиномы Эрмита. Известно (см. [7]), что функции $\prod_{j=1}^m H_{k_j}(t_j)$ ортонормированы в $L^2(\gamma)$. По неравенству Бесселя

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=1}^{\infty} \left(\partial_{e_{i_1}} \cdots \partial_{e_{i_n}} F(x) \right)^2 \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_m=n} \left(\int_X f(x+y) \prod_{j=1}^m \left(\sqrt{k_j!} H_{k_j}(t_j) \right) \gamma(dy) \right)^2 \\ \leq n! \int_X f(x+y)^2 \gamma(dy) = n! \|f(x+\cdot)\|_{L^2(\gamma)}^2 \leq n! \cdot \sup_y |f(y)|^2. \end{aligned}$$

Лемма 3.1 доказана.

Следствие 3.1. Для функции F , построенной в лемме 3.1, при каждом $p \geq 2$ мы имеем

$$\|F\|_{L^p(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu \star \gamma)}, \quad \|D_H^n F\|_{L^p(\mu, \mathcal{H}_n(H))} \leq c_n \|f\|_{L^p(\mu \star \gamma)}.$$

Доказательство. Функция F является борелевской (см. [13, лемма 7.6.4]). Пусть $A \subset X$ — μ -измеримое множество. Определим меру

$$\mu_F(A) = \int_A \int f(x+y) \gamma(dy) \mu(dx) \equiv \int f(z) \left((\mu|_A) \star \gamma \right) (dz).$$

Мера μ_F абсолютно непрерывна относительно μ , и ее плотность совпадает с F μ -п.в. Пусть $p \geq 2$. Тогда

$$\int |F(x)|^p \mu(dx) \leq \int \|f(x+\cdot)\|_{L^1(\gamma)}^p \mu(dx)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int \|f(x + \cdot)\|_{L^p(\gamma)}^p \mu(dx) = \|f\|_{L^p(\mu \star \gamma)}^p, \\
\int \|D_H^n F(x)\|_{\mathcal{H}(H)}^p \mu(dx) &\leq c_n^p \int \|f(x + \cdot)\|_{L^2(\gamma)}^p \mu(dx) \\
&\leq c_n^p \int \|f(x + \cdot)\|_{L^p(\gamma)}^p \mu(dx) = (c_n \|f\|_{L^p(\mu \star \gamma)})^p,
\end{aligned}$$

что завершает доказательство.

О п р е д е л е н и е 3.4. Емкость $C_{\mathcal{F}}$ плотна, если для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K_\varepsilon \subset X$ такой, что $C_{\mathcal{F}}(X \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$.

Первый положительный результат о плотности соболевских емкостей в негауссовском случае — следующая теорема (см. [12, предложение 3.1]).

Теорема 3.1. Пусть X — сепарабельное банахово пространство с вероятностной мерой μ , и пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, непрерывно вложенное в X . Предположим, что соболевский класс $W^{1,p}(\mu)$ корректно определен. Тогда емкость $C_{W^{1,p}(\mu)}$ плотна.

Следующий результат данной статьи является новым.

Теорема 3.2. Пусть X — локально выпуклое пространство с радоновской вероятностной мерой μ . Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует метризуемый компакт $K^\varepsilon \subset X$ такой, что $\mu(X \setminus K^\varepsilon) < \varepsilon$. Пусть $H \subset X$ — сепарабельное гильбертово пространство, для которого выполнено (T1). Тогда емкость $C_{r,p} = C_{W^{r,p}(\mu)}$ плотна при любых $p \in [1, +\infty)$, $r \in \mathbf{N}$, при которых соболевский класс $W^{r,p}(\mu)$ определен корректно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем центрированную радоновскую гауссовскую меру γ такую, что $H(\gamma) \supset H$. Положим $\varepsilon = 10^{-j}$ для $j \in \mathbf{N}$; пусть K^ε — метризуемый компакт с $\mu(X \setminus K^\varepsilon) < \varepsilon$, и пусть K_γ^ε — абсолютно выпуклый метризуемый компакт с $\gamma(X \setminus K_\gamma^\varepsilon) < \varepsilon$. Обозначим через K_j выпуклую оболочку множества $K^\varepsilon \cup (-K^\varepsilon) \cup K_\gamma^\varepsilon$.

Рассмотрим функцию $\varphi_j(x) = \gamma(X \setminus (2K_j - x))$. Если $x \in K_j$, то $2K_j - x \supset K_j$, отсюда $\varphi_j(x) \leq \gamma(X \setminus K_j) < \frac{1}{10}$. С другой стороны, если $x \notin 2K_j$, то

$$1 - \varphi_j(x) = \gamma(2K_j - x) = \gamma(-2K_j + x),$$

но компакты $2K_j - x$ и $-2K_j + x$ не пересекаются: иначе нашлась бы точка y такая, что $y + x \in 2K_j$, $-y + x \in 2K_j$, тогда $x \in 2K_j$. Следовательно, $\varphi_j(x) \geq \frac{1}{2}$.

Функция φ_j имеет вид (3) с $f(x) = I_{X \setminus 2K_j}(x)$. По лемме 3.1 функция φ_j дифференцируема по Гато сколько угодно раз вдоль любых векторов $h \in H$, и мы получаем оценку

$$\|D_H^n \varphi_j(x)\|_H \leq c_n \|I_{X \setminus (2K_j - x)}\|_{L^2(\gamma)},$$

где $c_n = c^n \sqrt{n!}$, c — норма оператора вложения $H \hookrightarrow H(\gamma)$.

Зафиксируем неубывающую функцию $\psi \in C^\infty(\mathbf{R})$, равную 0 на $[0; \frac{1}{10}]$ и 1 на $[\frac{1}{2}; 1]$. Положим $g_j = \psi \circ \varphi_j$. Тогда $1 \geq g_j \geq 0$, $g_j|_{X \setminus 2K_j} = 1$, $g_j|_{K_j} = 0$, и мы получаем

$$\|g_j\|_{L^p(\mu)} \leq \left(\mu(X \setminus K_j)\right)^{1/p} \rightarrow 0$$

при $j \rightarrow \infty$. Кроме того, оценив градиенты функции g_j по цепному правилу, получаем

$$\begin{aligned}
\int \|D_H^n g_j(x)\|_H^p \mu(dx) &\leq \left(c_n \cdot 2^n \sup_{[0;1]} \sum_{k=1}^n |\psi^{(k)}|\right)^p \int \|I_{X \setminus (2K_j - x)}\|_{L^2(\gamma)}^p \mu(dx) \\
&\leq C_n(p) \left[\int_{X \setminus K_j} \mu(dx) + \int_{K_j} \left(\gamma(X \setminus K_j)\right)^{p/2} \mu(dx) \right] \\
&\leq C_n(p) \left(10^{-j} + 10^{-jp/2}\right) \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Следовательно, $C_{r,p}(X \setminus 2K_j) \leq \|g_j\|_{r,p} < \varepsilon$ для достаточно больших j .

Для завершения доказательства того, что $g_j \in W^{r,p}$, надо построить последовательность гладких цилиндрических функций, сходящуюся к g_j в $L^p(\mu)$ и фундаментальную по норме $\|\cdot\|_{r,p}$.

Пусть Y обозначает линейную оболочку $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$. Линейное подмногообразие Y является суслинским пространством, поэтому существует непрерывный инъективный линейный оператор I , отображающий Y в сепарабельное пространство Фреше $\Phi = \mathbf{R}^{\infty}$. Образ K_j под действием I есть абсолютно выпуклый компакт $Q \subset \Phi$. Он представим в виде счетного пересечения замкнутых полупространств вида $\{l_n \leq 1\}$, $l_n \in \Phi^*$. Следовательно, существует последовательность убывающих замкнутых выпуклых цилиндров $C_n = \bigcap_{i=1}^n \{l_i \leq 1\}$ таких, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = Q$. Линейные функционалы $l_i \circ I: X \rightarrow \mathbf{R}$ непрерывны на X . Пусть

$$B_n = \{x \in X: l_i(I(x)) \leq 1, i = 1, \dots, n\};$$

тогда $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \cap Y = K_j$. Рассмотрим функции

$$f_n(x) = \gamma(X \setminus (2B_n - x)).$$

Легко проверить, что f_n имеет вид

$$f_n(x) = u(l_1(x), \dots, l_n(x)), \quad u \in C_b^{\infty}(\mathbf{R}^n).$$

Следовательно, $f_n \in \mathcal{F}\mathcal{C}_b^{\infty}(X)$. Для всех $x \in Y$, а значит, для μ -почти всех $x \in X$ имеем $f_n(x) \rightarrow \varphi_j(x)$, откуда благодаря равномерной ограниченности функций f_n по теореме Лебега следует, что $\|f_n - \varphi_j\|_{L^p(\mu)} \rightarrow 0$. Пусть $n > m$. По следствию 3.1 получаем

$$\|D_H^n f_n - D_H^n f_m\|_{L^p(\mu, H)} \leq C_n \|I_{B_m \setminus B_n}\|_{L^{\max\{p, 2\}}(\mu * \gamma)} \rightarrow 0$$

равномерно по $n > m$ при $m \rightarrow \infty$. Итак, $\{f_n\}$ — аппроксимирующая последовательность для φ_j . Наконец, $\{\psi \circ f_n\} \subset \mathcal{F}\mathcal{C}_b^{\infty}(X)$ — аппроксимирующая последовательность для $g_j = \psi \circ \varphi_j$. Теорема 3.2 доказана.

З а м е ч а н и е 3.1. Доказательства в этой статье остаются в силе, если условие (T1), накладываемое на гильбертово подпространство H , заменить следующим условием (T): *существует центрально-симметричная радоновская мера λ на X такая, что $H \subset H(\lambda)$* . Это условие несколько слабее, чем (T1), однако во многих пространствах эти два условия эквивалентны (например, если X гильбертово, ядерное, $\mathcal{S}$ или $\mathcal{S}'$). Лишь доказательство леммы 3.1 в этом случае становится длиннее, см. [11].

4. Поверхностные меры.

Теорема 4.1. Пусть X — локально выпуклое пространство с радоновской мерой μ (возможно, знакопеременной), и пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, непрерывно вложенное в X . Если функция $F: X \rightarrow \mathbf{R}$ обладает следующими свойствами:

a) $F \in W^{2,p}(\mu)$, $p > 4$,

b) $|D_H F|^{-1} \in L^p(\mu)$,

c) μ дифференцируема вдоль векторного поля $v = D_H F$ с $\delta v \in L^2(\mu)$, то образ меры $\mu \circ F^{-1}$ абсолютно непрерывен относительно меры Лебега на $\mathbf{R}$, причем его плотность k имеет непрерывную версию с ограниченной вариацией.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства существования требуемой плотности покажем, что существует мера λ_1 на X такая, что для любой функции $\varphi \in C_b^1(\mathbf{R})$

$$\int \varphi'(t) \mu \circ F^{-1}(dt) \equiv \int \varphi'(F(x)) \mu(dx) = - \int \varphi(F(x)) \lambda_1(dx), \quad (4)$$

откуда, согласно [8, предложение 2.2.3, (ii)], будет вытекать дифференцируемость меры $\mu \circ F^{-1}$ по Скороходу. Сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \int \varphi'(F(x)) \mu(dx) &= \int \varphi'(F(x)) \partial_v F(x) \frac{\mu(dx)}{\partial_v F(x)} = \int \partial_v (\varphi(F(x))) \frac{\mu(dx)}{|D_H F(x)|^2} \\ &= - \int \varphi(F(x)) \cdot d_v \left(\frac{\mu}{|D_H F|^2} \right) (dx). \end{aligned} \quad (5)$$

Чтобы обосновать последнее равенство, заметим, что $|D_H F|^2 \in W^{1,p/2}(\mu)$ в силу леммы 2.1, следовательно, функции $G_n = (|D_H F|^2 + 1/n)^{-1}$ принадлежат тому же

классу по лемме 2.2. При этом $G_n \nearrow |D_H F|^{-2} \in L^{p/2}(\mu)$, откуда $G_n \rightarrow |D_H F|^{-2}$ по норме $L^{p/2}$. Кроме того,

$$D_H G_n = \frac{-D_H \langle D_H F, D_H F \rangle}{(|D_H F|^2 + 1/n)^2} = \left(\frac{|D_H F|^2}{|D_H F|^2 + 1/n} \right)^2 D_H |D_H F|^{-2},$$

где первый сомножитель возрастает, стремясь к 1 при μ -почти всех x , а норма второго (не зависящего от n) сомножителя не превосходит

$$\frac{2|D_H^2 F(D_H F)|}{|D_H F|^4} \leq \frac{2\|D_H^2 F\|_{\mathcal{H}_2(H)}}{|D_H F|^3} \in L^{p/4}(\mu),$$

следовательно, функция $|D_H F|^{-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n$ принадлежит классу $W^{1,2}(\mu)$. В силу леммы 2.3 мера $|D_H F|^{-2} \mu$ дифференцируема вдоль векторного поля v , причем ее производная равна

$$\lambda_1 = d_v \left(\frac{\mu}{|D_H F|^2} \right) = \left(-\frac{2D_H^2 F(D_H F, D_H F)}{|D_H F|^4} + \frac{\delta v}{|D_H F|^2} \right) \mu.$$

Функция $\varphi \circ F$ ограничена и по лемме 2.2 принадлежит классу $W^{1,p}(\mu)$, поэтому мы можем выбрать последовательность равномерно ограниченных гладких цилиндрических функций f_n , сходящихся к $\varphi \circ F$ по норме $\|\cdot\|_{1,p}$ и μ -почти всюду. Тогда в формуле интегрирования по частям

$$\int \partial_v f_n(x) \frac{\mu}{|D_H F|^2}(dx) = - \int f_n(x) \lambda_1(dx)$$

можно перейти к пределу по n (по теореме Лебега) и получить соответствующую формулу для функции $\varphi \circ F$. Равенство (5) доказано.

Таким образом, мера $\mu \circ F^{-1}$ дифференцируема на $\mathbf{R}$ в смысле Скорохода; $d_1(\mu \circ F^{-1}) = \lambda_1 \circ F^{-1}$. Из этого следует (см. [8, пример 2.2.1, (ii)]), что некоторая версия лебеговской плотности $k(t)$ меры $\mu \circ F^{-1}$ имеет конечную вариацию (не превышающую $\|\lambda_1\|$).

Но поскольку $\lambda_1 \ll \mu$, мы получаем $d_1(\mu \circ F^{-1}) \ll (\mu \circ F^{-1})$, следовательно, мера $\mu \circ F^{-1}$ на прямой дифференцируема также и в смысле Фомина, а для меры $d_1(\mu \circ F^{-1})$ существует плотность k' относительно меры Лебега, причем

$$k(t) = \int_{-\infty}^t k'(u) du \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

В частности, функция k непрерывна. Теорема 4.1 доказана.

Применив теорему 4.1 к мере $g\mu$ вместо μ , получаем следующее утверждение.

Следствие 4.1. *Предположим, что выполнены условия теоремы 4.1. Пусть $g \in W^{1,r}(\mu)$ при некотором $r > 0$, и пусть $2/p + 1/r \leq \frac{1}{2}$. Тогда мера $g\mu$ дифференцируема вдоль $v = D_H F$, причем ее образ $(g\mu) \circ F^{-1}$ имеет непрерывную плотность k_g , вариация которой не превосходит $\text{const} \cdot \|g\|_{1,r}$.*

Следующие две теоремы были доказаны в [10], причем X предполагалось сепарабельным пространством Фреше. Однако теперь теоремы остаются в силе и для более общего случая, благодаря результатам п. 3.

Теорема 4.2. *Пусть X — локально выпуклое пространство, μ — вероятностная мера, сосредоточенная на последовательности метризуемых компактов, и пусть $H \subset X$ — сепарабельное гильбертово пространство, удовлетворяющее (T1). Пусть $F \in W^{2,8}(\mu)$, $|D_H F|^{-1} \in L^8(\mu)$. Пусть мера μ дифференцируема вдоль векторного поля $v = D_H F$, причем $\delta v \in L^2(\mu)$. Тогда существует единственная радионовская мера ν со свойством*

$$\int \varphi(x) \nu(dx) = k_\varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{FC}_b^\infty(X). \quad (6)$$

Мера ν равна нулю на множествах нулевой емкости $C_{1,r}$ при r таких, что

$$\frac{2}{p} + \frac{1}{r} < \frac{1}{2}. \quad (7)$$

Пусть теперь мера μ неотрицательна. Введем дополнительные обозначения. Пусть $\nu^{(0)} \equiv \nu$ и $\nu^{(a)}$ — меры, построенные по теореме 4.2 для функции $F - a$ вместо F ; положим $\mu_\sigma^{(a)} = \nu^{(a)} / k(a)$; если $k(a) = 0$, положим $\mu_\sigma^{(a)} \equiv 0$.

Теорема 4.3. Пусть выполнены условия теоремы 4.2. Пусть F является $C_{1,4}$ -квазинепрерывной. Тогда меры $\mu_\sigma^{(a)}$ являются условными мерами для μ относительно функции F , т.е.:

- 1) при $\mu \circ F^{-1}$ -почти всех a меры $\mu_\sigma^{(a)}$ вероятностные и сосредоточены на поверхности $F^{-1}(a)$;
- 2) для любого борелевского $B \subset X$ имеем $\mu(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_\sigma^{(a)}(B) \mu \circ F^{-1}(da)$.

5. Поверхностные меры, порожденные локальными соболевскими функциями. Пусть μ — вероятностная мера на локально выпуклом пространстве X .

Определение 5.1. Пусть $\mathcal{K}$ — некоторое счетное семейство компактов на X . Назовем $\mathcal{K}$ локализующим r -го порядка, если

- 1) для любых $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ существует $K_3 \in \mathcal{K}$ такой, что $K_1 \cup K_2 \subset K_3$,
- 2) $\mu(X \setminus \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K) = 0$,
- 3) для каждого $K \in \mathcal{K}$ существует такая $C_{r,p}$ -квазинепрерывная при всех p функция $\zeta_K \in W^{r,\infty}(\mu) = \bigcap_p W^{r,p}(\mu)$, что $0 \leq \zeta_K \leq 1$, $\zeta_K|_K = 1$, и существует такой компакт $K' \in \mathcal{K}$, что $\zeta_K|_{X \setminus K'} = 0$.

Семейство функций $\{\zeta_K | K \in \mathcal{K}\}$ будем также называть локализующим порядка r .

Лемма 5.1. Пусть $\mathcal{K} = \{K_i\}$ — возрастающая последовательность метризуемых абсолютно выпуклых компактов такая, что $\mu(X \setminus \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K) = 0$; для каждого $K \in \mathcal{K}$ существует $K' \in \mathcal{K}$ такой, что $2K \subset K'$. Тогда последовательность компактов $\mathcal{K}$ — локализующее семейство любого порядка $r \in \mathbb{N}$, если H вложено в $H(\gamma)$ для некоторой радоновской центрированной гауссовской меры γ и $\gamma(X \setminus \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K) = 0$.

Доказательство. Из условий следует, что емкости $C_{r,p}$ плотны при всех $r \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$. Зафиксируем $r \in \mathbb{N}$. Возьмем функцию $g = 1 - g_j$, где g_j — функция, построенная в доказательстве теоремы 3.2, такая, что $g_j(x) = 1$ при $x \notin 2K$, $g_j(x) = 0$ при $x \in K$ и $g_j \in W^{r,p}$ для всех $p \geq 1$. Для функции g можно выбрать μ -версию, $C_{r,p}$ -квазинепрерывную для всех p (см. [11, следствие 5.2]). Тогда мы можем взять $K' \supset 2K$. Лемма 2.3 доказана.

Определение 5.2. Будем говорить, что функция f принадлежит классу $W_{\text{Loc}}^{r,p}(\mu)$, $p > 2$, если существует локализующее семейство функций $\{\zeta_K\}$ r -го порядка такое, что

$$\zeta f \in \bigcap_{q < p} W^{r,q}(\mu) \quad \forall \zeta \in \{\zeta_K\}.$$

Производные f в точке $x \in K \in \mathcal{K}$ определяются по формуле

$$D_H^k f(x) = D_H^k(\zeta_K f)(x), \quad k = 1, \dots, r.$$

В силу леммы 2.4 при выборе другого локализующего семейства эта величина останется μ -почти всюду неизменной.

Из леммы 2.1 следует, что при любых r и p имеем $W^{r,p}(\mu) \subset W_{\text{Loc}}^{r,p}(\mu)$.

Лемма 5.2. Пусть $f \in W_{\text{Loc}}^{k,p}(\mu)$, $g \in W_{\text{Loc}}^{k,q}(\mu)$, $1/p + 1/q = 1/s < \frac{1}{2}$. Тогда

- 1) $fg \in W_{\text{Loc}}^{k,s}(\mu)$;
- 2) если $k > 0$, то $\langle D_H f; D_H g \rangle \in W_{\text{Loc}}^{k-1,s}(\mu)$.

Доказательство. Пусть $\{\zeta_n^f\}$ — локализующее семейство функций порядка k для f , а $\{\zeta_n^g\}$ — такое же семейство для g . Тогда функции $\zeta_n := \zeta_n^f \zeta_n^g$ образуют локализующее семейство для обеих функций f и g . Зафиксируем $\zeta = \zeta_n$. Зададим $s' \in (2; s)$. Существует функция $\xi = \zeta_N$, равная 1 на $\text{supp } \zeta$. Тогда $\zeta \equiv \zeta \xi$.

1) Поскольку $\zeta f g \equiv \zeta f \cdot \xi g$, из $\zeta f \in W^{k,ps'/s}(\mu)$ и $\xi g \in W^{k,qs'/s}(\mu)$ по лемме 2.1 следует, что $\zeta f g \in W^{k,s'}(\mu)$.

2) Функция $\zeta \langle D_H f; D_H g \rangle$, в силу свойства локальности почти всюду совпадающая с $\zeta \langle D_H(\xi f); D_H(\xi g) \rangle$, принадлежит $W^{k-1, s'}(\mu)$ согласно лемме 2.1, поскольку

$$D_H(\xi f) \in W^{k-1, ps'/s}(\mu, H), \quad D_H(\xi g) \in W^{k-1, qs'/s}(\mu, H).$$

Лемма 2.4 доказана.

Теперь обобщим теорему 4.1 на случай локальных соболевских классов.

Теорема 5.1. Пусть μ — радоновская вероятностная мера на локально выпуклом пространстве X , H — сепарабельное гильбертово пространство, $H \subset H(\mu)$. Пусть $F \in W_{\text{Loc}}^{2,p}(\mu)$, $|D_H F|^{-1} \in L_{\text{Loc}}^p(\mu) \equiv W_{\text{Loc}}^{0,p}(\mu)$, где $p > 4$. Предположим, что существует локализирующее семейство функций $\mathcal{L}$ 2-го порядка для F и $|D_H F|^{-1}$. Если для любой функции $\zeta \in \mathcal{L}$ мера $\zeta \mu$ дифференцируема вдоль векторного поля $D_H F$, причем плотность ρ_ζ меры $d_{D_H F}(\zeta \mu)$ относительно меры μ принадлежит $L^2(\mu)$, то мера $(\zeta \mu) \circ F^{-1}$ имеет непрерывную плотность k^ζ (относительно меры Лебега) с ограниченной вариацией.

Доказательство. Пусть $\zeta, \xi \in \mathcal{L}$ таковы, что $\xi = 1$ на носителе функции ζ . Тогда $\xi |D_H F|^2 \in W^{1, 2+\varepsilon}(\mu)$. Следовательно, функции $G_n = \xi^2 / (\xi |D_H F|^2 + 1/n)$ принадлежат классу $W^{1,2}(\mu)$ ввиду леммы 2.1 и [8, лемма 7.1.13]. Применив те же рассуждения, что и в теореме 4.1, получаем, что функция $\xi |D_H F|^{-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n$ принадлежит классу $W^{1,2}(\mu)$. Следовательно, по лемме 2.3 мы получаем меру

$$\lambda_\zeta = d_{D_H F} \left(\frac{\xi \zeta \mu}{|D_H F|^2} \right) = \left(-\frac{\partial_{D_H F}^2 F}{|D_H F|^4} \zeta + \frac{\rho_\zeta}{|D_H F|^2} \right) \mu.$$

Ее образ $\lambda_\zeta \circ F^{-1}$ на $\mathbf{R}$ является производной в смысле Фомина от меры $(\zeta \mu) \circ F^{-1}$, откуда следует существование искомой плотности. Теорема 5.1 доказана.

Лемма 5.3. Пусть $f \in W_{\text{Loc}}^{r,p}(\mu)$, тогда при любом $p' < p$ функция f имеет $C_{r,p'}$ -квазинепрерывную версию, если выполнено следующее условие: $\inf_{K \in \mathcal{K}} C_{r,p'}(X \setminus K) = 0$.

Доказательство. Зафиксируем $p' < p$. Выберем последовательность компактов $K_n \in \mathcal{K}$ и функций $\zeta_n = \zeta_{K_n}$ со свойствами: $\text{supp } \zeta_n \subset K_{n+1}$, $C_{r,p'}(X \setminus K_n) < 2^{-n}$. Положим $\xi_1 = \zeta_1$; $\xi_n = \zeta_n - \zeta_{n-1}$ при $n > 1$. Выберем для функции $\zeta_{n+1} f \in W_{\text{Loc}}^{r,p'}(\mu)$ версию g_n , которая является $C_{r,p'}$ -квазинепрерывной. Тогда $f_n := \xi_n g_n = \xi_n f$ μ -почти всюду; f_n равна 0 на K_{n-1} и $C_{r,p'}$ -квазинепрерывна, т.е. можно выбрать такие замкнутые множества Q_n^m , $m \in \mathbf{N}$, что $Q_n^m \subset Q_n^{m+1}$, $C_{r,p'}(X \setminus Q_n^m) < 2^{-n-m}$ и f_n непрерывна на каждом Q_n^m . Положим $f_o(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. На K_n эта сумма имеет лишь n ненулевых слагаемых, и μ -почти всюду $f_o = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n f = f$. Кроме того, при каждом $m \in \mathbf{N}$ функция f_o непрерывна на замкнутом множестве

$$F^m = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n^m \cap K_m; \quad F^m \subset F^{m+1}; \quad C_{r,p'}(X \setminus F^m) < 2^{1-m}.$$

Таким образом, f_o — искомая версия f . Лемма 5.3 доказана.

Следующая теорема обобщает теоремы 4.2 и 4.3.

Теорема 5.2. Пусть X — локально выпуклое пространство и выполнены условия теоремы 5.1. Тогда однозначно определено семейство радоновских мер $\{\nu_\zeta^{(a)} \mid \zeta \in \mathcal{L}, a \in \mathbf{R}\}$ таких, что

$$\int \varphi(x) \nu_\zeta^{(a)}(dx) = k_\varphi^\zeta(a) \quad \forall \varphi \in \mathcal{FC}_b^\infty(X).$$

Эти меры обращаются в нуль на множествах нулевой емкости $C_{1,r}$, где r удовлетворяет условию (7).

Кроме того, если $\inf_{K \in \mathcal{K}} C_{W^{1,2r}}(X \setminus K) = 0$ и для функции $g \in W_{\text{Loc}}^{1,2r+\varepsilon}(\mu)$ выбрана $C_{1,2r}$ -квазинепрерывная версия, то

$$\int g(x) \nu_\zeta^{(a)}(dx) = k_g^\zeta(a). \quad (8)$$

О п р е д е л е н и е 5.3. Пусть выполнены все условия теоремы 5.2. Пусть $A \in \mathcal{B}(X)$. Если $A \subset K$ для некоторого $K \in \mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$ — локализирующее семейство компактов 2-го порядка для функций F и $|D_H F|^{-1}$) и $\text{supp } \zeta_K \subset K' \in \mathcal{K}$, то положим

$$\nu^{(a)}(A) = \nu_{\zeta_{K'}}^{(a)}(A);$$

если A произвольно, положим

$$\nu^{(a)}(A) = \sup \left\{ \nu^{(a)}(A \cap K) : K \in \mathcal{K} \right\}.$$

Предложение 5.1. *Функции $\nu^{(a)}: \mathcal{B}(X) \rightarrow [0; +\infty]$ корректно определены и являются радоновскими σ -конечными положительными мерами, конечными на компактах из $\mathcal{K}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $A \subset K_1$, $A \subset K_2$; $\text{supp } \zeta_{K_j} \subset K'_j$, $\xi_j = \zeta_{K'_j}$, $j = 1, 2$. Тогда $\xi_1 = \xi_2 = 1$ на $K'_1 \cap K'_2$. Положим $\psi = \xi_1 \xi_2$. Обозначим через g функцию $\zeta_{K_1} \zeta_{K_2}$ (равную единице на $K_1 \cap K_2$ и нулю вне $K'_1 \cap K'_2$). Поскольку $\xi_j \geq \psi$ для $j = 1, 2$, то для всякого $B \in \mathcal{B}(X)$ мы имеем $\nu_{\xi_j}^{(a)}(B) \geq \nu_{\psi}^{(a)}(B)$, откуда следует, что

$$\int g(x) \nu_{\xi_j}^{(a)}(dx) \geq \int g(x) \nu_{\psi}^{(a)}(dx), \quad j = 1, 2,$$

и равенство возможно лишь при совпадении этих мер на множестве $\{g > 0\}$, содержащем A . Поскольку $g\xi_j \equiv g\psi$, имеем $k_g^{\xi_j}(t) = k_g^{\psi}(t)$ для почти всех t , следовательно, в силу непрерывности обеих функций, для всех $t \in \mathbf{R}$, откуда по теореме 5.2 получаем

$$\int g(x) \nu_{\xi_j}^{(a)}(dx) = k_g^{\xi_j}(a) = k_g^{\psi}(a) = \int g(x) \nu_{\psi}^{(a)}(dx).$$

Поэтому $\nu_{\xi_1}^{(a)}(A) = \nu_{\xi_2}^{(a)}(A)$, следовательно, мера $\nu^{(a)}$ определена корректно для множества $A \subset K \in \mathcal{K}$, а значит, и для произвольного множества.

2) Для любого $K \in \mathcal{K}$ радоновские меры $\nu^{(a)}|_K = \nu_{\zeta_{K'}}^{(a)}|_K$ конечны. Автоматически следует σ -конечность и неотрицательность мер $\nu^{(a)}$.

3) Конечная аддитивность меры $\nu^{(a)}$ очевидна, также очевидна σ -аддитивность в случае $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset K$, $K \in \mathcal{K}$. Проверим σ -аддитивность в общем случае. Пусть $A_1, A_2, \dots$ — непересекающиеся борелевские множества, $\nu^{(a)}(A_n) < \infty$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$; пусть $A_{n,1} \subset A_{n,2} \subset \dots \subset A_n$, $A_{n,m}$ являются подмножествами компактов из $\mathcal{K}$; $\nu^{(a)}(A_{n,m}) \geq \nu^{(a)}(A_n) - 2^{-n-m}$. Тогда $B_N = \bigcup_{n=1}^N A_{n,N}$ — подмножество компакта из $\mathcal{K}$, $B_N \subset A$ и $\nu^{(a)}(B_N) \nearrow \sum_{n=1}^{\infty} \nu^{(a)}(A_n) \leq +\infty$ при $N \rightarrow \infty$. Следовательно, $\nu^{(a)}(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \nu^{(a)}(A_n)$. С другой стороны, если $B \subset A$, $B \subset K$, $K \in \mathcal{K}$, то

$$\nu^{(a)}(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu^{(a)}(B \cap A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu^{(a)}(A_n),$$

откуда следует обратное утверждение для $\nu^{(a)}(A)$. Предложение 5.1 доказана.

Теперь мы можем получить несколько следствий из теоремы 5.2.

Следствие 5.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 4.2. Тогда меры $\nu^{(a)}$ и $\mu_{\sigma}^{(a)}$, построенные в этом пункте, будут совпадать с аналогичными мерами из п. 4.*

Следствие 5.2. *Если $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ — два локализирующих семейства компактов 2-го порядка, удовлетворяющих всем условиям теоремы 5.2, то построенные по ним меры $\nu_1^{(a)}$ и $\nu_2^{(a)}$ совпадут.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим локализирующее семейство компактов

$$\mathcal{X}_3 = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2 \cup \left\{ K_1 \cup K_2 \mid K_1 \in \mathcal{X}_1, K_2 \in \mathcal{X}_2 \right\}$$

с локализирующими функциями вида ζ_{K_1}, ζ_{K_2} и $\phi(\zeta_{K_1} + \zeta_{K_2})$, где $\phi \in C_b^{\infty}(\mathbf{R})$ монотонна, $\phi(0) = 0$, $\phi(t) = 1$ при $t \geq 1$. Тогда равенства $\nu_1^{(a)} = \nu_3^{(a)}$, $\nu_2^{(a)} = \nu_3^{(a)}$ следуют из п. 1) доказательства предложения 5.1 и из оценок локализованных поверхностных мер через емкости.

Следствие 5.3. Пусть выполнены все условия теоремы 5.2. Тогда при почти всех $a \in \mathbf{R}$ мера $\nu^{(a)}$ конечна, и для любых функций $\varphi \in \mathcal{FC}_b^\infty(X)$ и $\theta \in L^\infty(\mathbf{R})$ верно равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(a) \cdot (\varphi\mu) \circ F^{-1}(da) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(a) \int \varphi(x) \nu^{(a)}(dx) da.$$

Доказательство. Выберем произвольную последовательность $\{\zeta_n\} \subset \mathcal{L}$ такую, что $\zeta_n \nearrow 1$ в $L^1(\mu)$. Тогда для неотрицательной $\varphi \in \mathcal{FC}_b^\infty(X)$ мы имеем

$$\|(\zeta_n \varphi\mu) \circ F^{-1} - (\varphi\mu) \circ F^{-1}\| \leq \|\zeta_n \varphi\mu - \varphi\mu\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Функция $\varrho(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} k_\varphi^{\zeta_n}(t)$ является $L^1(\mathbf{R})$ -пределом функций $k_\varphi^{\zeta_n}$ и почти всюду конечна, поскольку в силу теоремы Б. Леви

$$\int_{\mathbf{R}} \varrho(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} k_\varphi^{\zeta_n}(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi \zeta_n d\mu \leq \int_X \varphi d\mu < \infty.$$

Следовательно, ввиду (9), $(\varphi\mu) \circ F^{-1}(dt) = \varrho(t) dt$, поскольку предел мер по вариации единствен. С другой стороны, в силу (6)

$$\int \varphi(x) \nu^{(a)}(dx) = \sup \left\{ \int \varphi(x) \nu_\zeta^{(a)}(dx) : \zeta \in \mathcal{L} \right\} = \sup \left\{ k_\varphi^\zeta(a) : \zeta \in \mathcal{L} \right\} = \varrho(a)$$

для почти всех $a \in \mathbf{R}$. Следствие 5.3 доказана.

Формулу Остроградского–Гаусса (см. [9]) также можно обобщить для локально соболевских F и u , см. [14].

Приведем пример, показывающий, что локализационный метод построения поверхностных мер действительно расширяет наши возможности.

Пример 5.1. Пусть X есть $\mathbf{R}^\infty$ с топологией покоординатной сходимости; $H = l^2$. Рассмотрим вероятностную меру

$$\mu(dx) = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \frac{dx_n}{\pi(1+x_n^2)}.$$

Мера μ радоновская, поскольку X — сепарабельное пространство Фреше. При этом $H(\mu) = l^2$ (см. [8, следствие 3.1.2]). Рассмотрим функцию $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} x_n^2$. Функции F и $|D_H F|$ не интегрируемы (хотя конечны μ -почти всюду). Построим семейство компактов

$$\mathcal{K} = \left\{ K_t = \{x \in X : |x_n| \leq n^{5/4} t\} \mid t \in \mathbf{N} \right\},$$

$$\mu(K_t) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \arctg(n^{5/4} t) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^{5/4} t} \rightarrow 1 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Семейство компактов $\mathcal{K}$ является локализующим любого порядка. Это следует из леммы 2.3, поскольку $H = H(\gamma)$, где γ — счетное произведение стандартных гауссовских мер на прямых $\mathbf{R}$. Пусть $\mathcal{L} = \{\zeta_{K_t} \mid t \in \mathbf{N}\}$ — локализующие функции 2-го порядка, $\text{supp } \zeta_{K_t} \subset K_{2t}$. Имеем

$$\mu\{x : |D_H F(x)| < \varepsilon\} \leq \mu \left\{ x : \prod_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n^4 \varepsilon}{2}; \frac{n^4 \varepsilon}{2} \right) \right\} \leq \prod_{n=1}^p \frac{n^4 \varepsilon}{\pi} = \text{const}(p) \cdot \varepsilon^p$$

при любом $p \in \mathbf{N}$, следовательно, $|D_H F|^{-1} \in \bigcap_{p \geq 1} L^p(\mu)$.

При любом $t \in \mathbf{N}$ функции F , $|D_H F|$ и $\|D_H^2 F\|_{\mathcal{H}(H)}$ ограничены на K_{2t} и при любом $p \geq 2$ функция F приближается по норме $\|\cdot\|_{2,p(\mu|_{K_{2t}})}$ цилиндрическими функциями $f_N(x) = \sum_{n=1}^N n^{-4} x_n^2$. Следовательно, для всех $\zeta \in \mathcal{L}$ имеем $\zeta F \in W^{2,\infty}(\mu)$. Мера $\zeta\mu$ дифференцируема вдоль векторного поля $D_H F$, поскольку в силу равномерной ограниченности $\beta_{e_j}^\mu$ ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\partial_{e_j}^2 F + \partial_{e_j} F \frac{\partial_{e_j} \zeta}{\zeta} + \partial_{e_j} F \cdot \beta_{e_j}^\mu \right) \zeta \mu$$

сходится по вариации, и его сумма является мерой $d_{D_H F}(\zeta\mu)$, причем $\rho_\zeta = d_{D_H F}(\zeta\mu)/\mu \in L^2(\mu)$. Следовательно, функция F , локализирующее семейство функций $\mathcal{L}$ и мера μ удовлетворяют условиям теоремы 5.2, и при всех $a > 0$ существуют σ -конечные поверхностные меры $\nu^{(a)}$ и $\mu_\sigma^{(a)}$; очевидно, что при $a \leq 0$ они обращаются в нуль.

Поскольку $C_{1,p}(X \setminus K_t) \rightarrow 0$ при любом $p \geq 1$, справедлива формула (8) для $C_{1,4}$ -квазинепрерывных $g \in W_{\text{Loc}}^{1,r}(\mu)$ при $r > 4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Скорыход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1975, 231 с.
2. *Угланов А. В.* Поверхностные интегралы в линейных топологических пространствах. — Докл. РАН, 1995, т. 344, № 4, с. 450–453.
3. *Угланов А. В.* Поверхностные интегралы в пространствах Фреше. — Матем. сб., 1998, т. 189, № 11, с. 139–157.
4. *Uglanov A. V.* Integration on infinite-dimensional surfaces and its applications. — Dordrecht: Kluwer, 2000, 262 p.
5. *Airault H., Malliavin P.* Intégration géométrique sur l'espace de Wiener. — Bull. Sci. Math., 1988, v. 112, № 1, p. 3–52.
6. *Bogachev V. I.* Smooth measures, the Malliavin calculus and approximations in infinite dimensional space. — Acta Univ. Carolin., 1990, v. 31, № 2, p. 9–23.
7. *Богачев В. И.* Гауссовские меры. М.: Наука, 1997, 352 с.
8. *Bogachev V. I.* Differentiable measures and the Malliavin calculus. — J. Math. Sci. (New York), 1997, v. 87, № 4, p. 3577–3731.
9. *Пугачев О. В.* Формула Остроградского–Гаусса в бесконечномерном пространстве. — Матем. сб., 1998, т. 189, № 5, с. 115–128.
10. *Пугачев О. В.* Построение негауссовских поверхностных мер методом Маллявина. — Матем. заметки, 1999, т. 65, № 3, с. 377–388.
11. *Pugachev O. V.* Tightness of Sobolev capacities in infinite dimensional spaces. — Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Topics, 1999, v. 2, № 3, p. 427–440.
12. *Röckner M., Schmuland B.* Tightness of general $C_{1,p}$ capacities on Banach space. — J. Funct. Anal., 1992, v. 108, № 1, p. 1–12.
13. *Богачев В. И.* Основы теории меры, т. 1, 2. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006, 583 с.; 679 с.
14. *Pugachev O. V.* Capacities and surface measures in locally convex spaces. Preprint 06-064. Bielefeld, SFB701, 2006.

Поступила в редакцию
13.VI.2007

© 2008 г.

МА С.*

INTRINSICALLY STATIONARY VARIOGRAMS IN SPACE AND TIME

В статье обсуждается вопрос о том, когда произведение двух внутренне стационарных вариограмм структурных функций, а также степень внутренне стационарной вариограммы от пространственной и временной переменных остается вариограммой. Указывается несколько новых классов пространственно-временных вариограмм, а также приводятся степенные модели и модели с медленным затуханием ковариации.

* Department of Mathematics and Statistics, Wichita State University, Wichita, KS 67260-0033, USA; e-mail: cma@math.wichita.edu