Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Афанасьев, Принцип инвариантности для критического ветвящегося процесса в случайной среде, достигающего высокого уровня, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 1, 3–17

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2496>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 12:02:18

© 2009 г.

АФАНАСЬЕВ В. И.*

ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ КРИТИЧЕСКОГО ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ, ДОСТИГАЮЩЕГО ВЫСОКОГО УРОВНЯ¹⁾

Установлен условный принцип инвариантности для критического ветвящегося процесса в случайной среде при условии достижения им высокого уровня и найдены конечномерные распределения предельного процесса.

Ключевые слова и фразы: ветвящийся процесс в случайной среде, условные принципы инвариантности, броуновская экскурсия, броуновская извилина.

1. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ — ветвящийся процесс в случайной среде (ВПСС), задаваемый последовательностью независимых одинаково распределенных (случайных) производящих функций $\{f_n(s), n \in \mathbf{N}\}$. Предполагается, что производящая функция $f_n(s)$, $s \in [-1, 1]$, определяет закон размножения частиц в $(n-1)$ -м поколении, $n \in \mathbf{N}$, и $\xi_0 = 1$. Определение этого процесса можно найти, например, в [1].

Положим

$$X_n = \ln f'_n(1), \quad \eta_n = \frac{f''_n(1)}{(f'_n(1))^2}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Будем предполагать, что процесс $\{\xi_n\}$ является критическим, т.е.

$$\mathbf{E} X_1 = 0, \tag{1}$$

и выполнены следующие моментные ограничения:

$$0 < \mathbf{E} X_1^2 =: \sigma^2 < +\infty, \quad \mathbf{E} \ln^q(\eta_1 \vee 1) < +\infty \tag{2}$$

при некотором $q > 2$.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: viafan@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-01-00035) и программы «Ведущие научные школы» (грант НШ-4129.2006.1).

Рассмотрим момент вырождения процесса $\{\xi_n\}$: $T = \min\{n: \xi_n = 0\}$. В [1], [2] установлено, что при выполнении условий (1), (2) и $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(T > n) \sim \frac{c_1}{\sqrt{n}}, \quad (3)$$

где c_1 — положительная постоянная, и

$$\left\{ \frac{\ln(\xi_{[nt]} \vee 1)}{\sigma\sqrt{n}}, \frac{\ln(\xi_{[tT]} \vee 1)}{\sigma\sqrt{n}}, t \in [0, +\infty) \mid T > n \right\} \xrightarrow{D} \{W^+(t \wedge \tau), W^+(t\tau \wedge \tau), t \in [0, +\infty)\}, \quad (4)$$

где знак $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в функциональном пространстве $D[0, +\infty) \times D[0, +\infty)$ с борелевской σ -алгеброй относительно топологии Скорохода, случайный процесс $W^+ = \{W^+(t), t \in [0, +\infty)\}$ является броуновской извилиной (причем при $t \geq 1$ процесс $W^+(t) - W^+(1)$ является стандартным броуновским движением, не зависящим от процесса $\{W^+(t), t \in [0, 1]\}$) и $\tau = \inf\{t > 1: W^+(t) = 0\}$.

Отметим, что

$$\{W^+(t \wedge \tau), W^+(t\tau \wedge \tau), t \in [0, +\infty)\} \stackrel{d}{=} \left\{ \frac{W_0^+(\alpha^2 t)}{\alpha}, \frac{W_0^+(t)}{\alpha}, t \in [0, +\infty) \right\}, \quad (5)$$

где случайный процесс $W_0^+ = \{W_0^+(t), t \in [0, +\infty)\}$ является броуновской экскурсией, причем $W_0^+(t) = 0$ при $t \geq 1$ и α — случайная величина, равномерно распределенная на интервале $(0, 1)$ и не зависящая от процесса W_0^+ .

Рассмотрим теперь момент первого достижения уровня $x > 0$ процессом $\{\xi_n\}$:

$$T_x = \min\{n: \xi_n > x\}.$$

В указанном принципе инвариантности (4) рассматривается ВПСС, удовлетворяющий условию $\{T > n\}$, $n \rightarrow \infty$, т.е. *долгоживущий* ВПСС. Наша задача — получить принцип инвариантности для критического ВПСС, *достигающего высокого уровня*, т.е. удовлетворяющего условию $\{T_x < +\infty\}$, $x \rightarrow +\infty$.

Заметим, что в работах автора [2], [3] установлено, что если выполнены условия (1), (2), то при $x \rightarrow +\infty$

$$\mathbf{P}(T_x < +\infty) \sim \frac{c_2}{\ln x}, \quad (6)$$

где $c_2 = c_1 \sigma \sqrt{\pi/2}$, и при тех же условиях доказаны предельные теоремы для случайных величин $T_x/\ln^2 x$, T_x/T , $T/\ln^2 x$, $\mu(x)/\ln^2 x$, $\nu(x)/\ln^2 x$, $\mu(x)/T$, $\nu(x)/T$ (здесь $\mu(x)$ и $\nu(x)$ — мощности множеств $\{i: \xi_i > x\}$ и

$\{i: 0 < \xi_i \leq x\}$ соответственно), рассматриваемых при условии $T(x) < +\infty$.

Сформулируем основные результаты. Положим $h^+ = \sup_{t \in [0, +\infty)} W^+(t)$, $h_0^+ = \sup_{t \in [0, 1]} W_0^+(t)$ и для каждого $v \in (0, +\infty)$ введем случайный процесс Z_v :

$$Z_v(t) = \frac{W_0^+(v^2 t)}{v}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Теорема 1. При выполнении условий (1), (2) и $x \rightarrow +\infty$

$$\left\{ \frac{\ln(\xi_{\lfloor t\sigma^{-2}x^2 \rfloor} \vee 1)}{x}, t \in [0, +\infty) \mid T_{\exp(x)} < +\infty \right\} \xrightarrow{D} Y,$$

где $Y = \{Y(t), t \in [0, +\infty)\}$ — случайный процесс с непрерывными траекториями, распределение которого задается формулой

$$\mathbf{P}(Y \in A) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(Z_v \in A, h_0^+ > v) dv$$

для любого борелевского множества A пространства $D[0, +\infty)$.

В этой теореме знак $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в функциональном пространстве $D[0, +\infty)$ с борелевской σ -алгеброй относительно топологии Скорохода.

Очевидно, что процесс Y стартует из состояния 0, его траектории п.н. неотрицательны, причем при новом попадании в состояние 0 процесс остается там навсегда.

Прежде чем сформулировать следующую теорему, в которой рассматриваются конечномерные распределения предельного процесса Y , введем некоторые обозначения:

1) при $t > 0, x > 0, y > 0$

$$f(t, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} x \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right),$$

$$g(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{(y+x)^2}{2t}\right) \right];$$

2) при $t > 0, y \in (0, 1]$

$$p_1(0, 0; t, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t, 2k + y),$$

при $0 < s < t, x \in (0, 1], y \in (0, 1]$

$$p_1(s, x; t, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t-s, x, 2k + y);$$

3) при $t > 0$

$$p_2(0, 0; t, y) = \begin{cases} \sum_{k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}} f(t, 2k - y), & y \in (0, 1], \\ f(t, y), & y > 1, \end{cases}$$

при $0 < s < t$, $x \in (0, 1]$

$$p_2(s, x; t, y) = \begin{cases} \sum_{k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}} g(t - s, -x, 2k + y), & y \in (0, 1], \\ g(t - s, x, y), & y > 1. \end{cases}$$

Теорема 2. Для произвольных чисел $m \in \mathbf{N}$, $t_1, t_2, \dots, t_m \in (0, +\infty)$ ($t_1 < t_2 < \dots < t_m$) и $a_1, a_2, \dots, a_m \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(Y(t_i) > a_i, i = 1, \dots, m) \\ &= \sum_{j=0}^m \int_{G_j(a_1, \dots, a_m)} \cdots \int \prod_{i=0}^{j-1} p_1(t_i, x_i; t_{i+1}, x_{i+1}) p_2(t_j, x_j; t_{j+1}, x_{j+1}) \\ & \quad \times \prod_{i=j+1}^{m-1} g(t_{i+1} - t_i, x_i, x_{i+1}) dx_1 \cdots dx_m, \end{aligned}$$

где $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $t_{m+1} = +\infty$, $x_{m+1} = +\infty$, $p_2(t_m, x_m; t_{m+1}, x_{m+1}) = x_m$ и

$$G_j(a_1, \dots, a_m) = \{(x_1, \dots, x_m): a_i < x_i \leq 1, i = 1, \dots, j; x_i > a_i, \\ i = j+1, \dots, m\} \quad \text{при } j = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$G_0(a_1, \dots, a_m) = \{(x_1, \dots, x_m): x_i > a_i, i = 1, \dots, m\},$$

$$G_m(a_1, \dots, a_m) = \{(x_1, \dots, x_m): a_i < x_i \leq 1, i = 1, \dots, m\}.$$

Заметим, что, как обычно, произведение по пустому множеству индексов равно единице. В представленной формуле для конечномерного распределения процесса Y имеется $m+1$ слагаемое, каждое из них устроено аналогично конечномерному распределению марковского процесса, при этом в качестве переходных плотностей фигурируют $p_1(s, x; t, y)$, $p_2(s, x; t, y)$ и $g(t, x, y)$.

2. Доказательство теоремы 1. Для каждого $x \in (1, +\infty)$ введем случайный процесс Y_x :

$$Y_x(t) = \frac{\ln(\xi_{\lfloor t\sigma^{-2} \ln^2 x \rfloor} \vee 1)}{\ln x}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Требуется показать, что для произвольного борелевского множества A из $D[0, +\infty)$, удовлетворяющего условию $\mathbf{P}(Y \in \partial A) = 0$ (∂A — граница множества A), справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(Y_x \in A \mid T_x < +\infty) = \mathbf{P}(Y \in A). \quad (7)$$

Заметим, что для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(Y_x \in A, T_x < +\infty) = P_1(x, \varepsilon) + P_2(x, \varepsilon), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} P_1(x, \varepsilon) &= \mathbf{P}(Y_x \in A, T_x < +\infty, T > \varepsilon \sigma^{-2} \ln^2 x), \\ P_2(x, \varepsilon) &= \mathbf{P}(Y_x \in A, T_x < +\infty, T \leq \varepsilon \sigma^{-2} \ln^2 x). \end{aligned}$$

Существенную роль в дальнейшем играет следующее утверждение, доказанное в работе [2].

Лемма 1. При выполнении условий (1), (2)

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(T \leq \varepsilon \ln^2 x \mid T_x < +\infty) = 0.$$

Поскольку $P_2(x, \varepsilon) \leq \mathbf{P}(T_x < +\infty, T \leq \varepsilon \sigma^{-2} \ln^2 x)$, то в силу леммы 1

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_2(x, \varepsilon)}{\mathbf{P}(T_x < +\infty)} = 0. \quad (9)$$

Поскольку

$$\{T_x < +\infty\} = \left\{ \sup_{t \in [0,1]} \xi_{\lfloor tT \rfloor} > x \right\} = \left\{ \sup_{t \in [0,1]} \ln(\xi_{\lfloor tT \rfloor} \vee 1) > \ln x \right\}, \quad (10)$$

то, полагая $n = \varepsilon \sigma^{-2} \ln^2 x$ (точнее было бы написать $\lfloor \varepsilon \sigma^{-2} \ln^2 x \rfloor$), получаем, что

$$\begin{aligned} P_1(x, \varepsilon) &= \mathbf{P} \left(\left\{ \sqrt{\varepsilon} \frac{\ln(\xi_{\lfloor nt/\varepsilon \rfloor} \vee 1)}{\sigma \sqrt{n}}, t \geq 0 \right\} \in A, \right. \\ &\quad \left. \sup_{t \in [0,1]} (\xi_{\lfloor tT \rfloor} \vee 1) > \frac{\sigma \sqrt{n}}{\sqrt{\varepsilon}}, T > n \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что при $n = \varepsilon \sigma^{-2} \ln^2 x$, ввиду соотношений (3) и (6),

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{P}(T > n)}{\mathbf{P}(T_x < +\infty)} = \frac{\sigma c_1}{\sqrt{\varepsilon} c_2} = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon \pi}}. \quad (12)$$

Применяя к правой части (11) принцип инвариантности (4) и используя соотношения (5) и (12), находим, что

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_1(x, \varepsilon)}{\mathbf{P}(T_x < +\infty)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\varepsilon \pi}} \mathbf{P} \left(\left\{ \sqrt{\varepsilon} \frac{W_0^+(\alpha^2 t / \varepsilon)}{\alpha}, t \geq 0 \right\} \in A, \sup_{t \in [0,1]} \frac{W_0^+(t)}{\alpha} > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Преобразуем вероятность в правой части (13), учитывая, что случайная величина α равномерно распределена на интервале $(0, 1)$ и не зависит от процесса W_0^+ :

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\left\{ \sqrt{\varepsilon} \frac{W_0^+(\alpha^2 t / \varepsilon)}{\alpha}, t \geq 0 \right\} \in A, \sup_{t \in [0, 1]} \frac{W_0^+(t)}{\alpha} > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \\ &= \int_0^1 \mathbf{P} \left(\left\{ \sqrt{\varepsilon} \frac{W_0^+(u^2 t / \varepsilon)}{u}, t \geq 0 \right\} \in A, \sup_{t \in [0, 1]} \frac{W_0^+(t)}{u} > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right) du \\ &= \sqrt{\varepsilon} \int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} \mathbf{P} \left(\left\{ \frac{W_0^+(v^2 t)}{v}, t \geq 0 \right\} \in A, \sup_{t \in [0, 1]} W_0^+(t) > v \right) dv. \end{aligned}$$

В итоге, вспоминая определение процесса Z_v и случайной величины h_0^+ , получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_1(x, \varepsilon)}{\mathbf{P}(T_x < +\infty)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/\sqrt{\varepsilon}} \mathbf{P}(Z_v \in A, h_0^+ > v) dv.$$

Переходя теперь к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$, видим, что

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_1(x, \varepsilon)}{\mathbf{P}(T_x < +\infty)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(Z_v \in A, h_0^+ > v) dv. \quad (14)$$

Из соотношений (8), (9) и (14) вытекает равенство

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(Y_x \in A \mid T_x < +\infty) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(Z_v \in A, h_0^+ > v) dv, \quad (15)$$

что и означает справедливость соотношения (7).

Однако в приведенных рассуждениях есть изъян, поскольку ключевое соотношение (13) справедливо, если $\mathbf{P}(\{\sqrt{\varepsilon} W_0^+(\alpha^2 t \varepsilon^{-1}) \alpha^{-1}, t \geq 0\} \in \partial A) = 0$; нам же известно, что $\mathbf{P}(Y \in \partial A) = 0$.

Чтобы обойти эту трудность, рассмотрим сначала цилиндрические подмножества $D[0, +\infty)$: $A = \{y: y(t_i) \leq a_i, i = 1, \dots, m\}$, где $m \in \mathbf{N}$, $t_1, t_2, \dots, t_m \in [0, +\infty)$ и $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbf{R}$. Для них соотношения (13) и (следовательно) (15) справедливы ввиду абсолютной непрерывности конечномерных распределений броуновской экскурсии.

Теперь рассмотрим подмножества $D[0, +\infty)$ вида

$$A = \{y: w_y(\delta; a, b) \geq \varepsilon\},$$

где $0 \leq a < b < +\infty$, ε, δ — положительные числа, $w_y(\delta; a, b)$ — стандартный модуль непрерывности для функции $y(t)$, $t \in [0, +\infty)$, т.е.

$$w_y(\delta; a, b) = \sup_{t, s: |t-s| \leq \delta} |y(t) - y(s)| \quad (t, s \in [a, b]).$$

Нетрудно понять, что отображение $y \mapsto w_y(\delta; a, b)$, $y \in D[0, +\infty)$, непрерывно, если $y(t)$ — непрерывная функция на $[0, +\infty)$. Учитывая, что почти все траектории броуновской экскурсии непрерывны, убеждаемся в справедливости соотношения (13) для рассматриваемых множеств A и всех положительных ε , за исключением не более чем счетного множества. Но это означает, что выполнено соотношение (15), которое можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(w_{Y_x}(\delta; a, b) \geq \varepsilon \mid T_x < +\infty) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(w_{Z_v}(\delta; a, b) \geq \varepsilon, h_0^+ > v) dv. \end{aligned} \quad (16)$$

Известно (см. [4]), что

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{P}(h_0^+ > v) dv = \mathbf{E} h_0^+ = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Далее, ввиду непрерывности почти всех траекторий процесса Z_v

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{P}(w_{Z_v}(\delta; a, b) \geq \varepsilon) = 0.$$

Следовательно, по теореме о мажорируемой сходимости из соотношения (16) получаем, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(w_{Y_x}(\delta; a, b) \geq \varepsilon \mid T_x < +\infty) = 0. \quad (17)$$

Но сходимость конечномерных распределений процесса Y_x и соотношение (17) в силу теоремы 15.5 из [5] означают справедливость теоремы 1 (включая утверждение о непрерывности траекторий процесса Y).

3. Доказательство теоремы 2. Поскольку по условию теоремы все числа $a_1, \dots, a_m$ неотрицательны, то, учитывая соотношение (10), получаем, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(Y_x(t_i) > a_i, i = 1, \dots, m \mid T_x < +\infty) \\ &= \mathbf{P}\left(Y_x(t_i) > a_i, i = 1, \dots, m; T > \frac{t_m}{\sigma^2} \ln^2 x \mid T_x < +\infty\right) \\ &= \mathbf{P}\left(Y_x(t_i) > a_i, i = 1, \dots, m; \sup_{t \in [0, 1]} \ln(\xi_{[tT]} \vee 1) > \ln x \mid T > \frac{t_m}{\sigma^2} \ln^2 x\right) \\ &\quad \times \frac{\mathbf{P}(T > t_m \sigma^{-2} \ln^2 x)}{\mathbf{P}(T_x < +\infty)}. \end{aligned}$$

Откуда, полагая $n = t_m \sigma^{-2} \ln^2 x$ и используя принцип инвариантности (4) и соотношение (12), находим, что при любых неотрицательных $a_1, \dots, a_m$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(Y_x(t_i) > a_i, i = 1, \dots, m \mid T_x < +\infty) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi t_m}} \mathbf{P}\left(W^+\left(\frac{t_i}{t_m}\right) > \frac{a_i}{\sqrt{t_m}}, i = 1, \dots, m; h^+ > \frac{1}{\sqrt{t_m}}\right) \end{aligned}$$

(здесь также учтено, что совместное распределение случайных величин, стоящих под знаком последней вероятности, является абсолютно непрерывным). Но это, в силу теоремы 1, означает, что при всех неотрицательных $a_1, \dots, a_m$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(Y(t_i) > a_i, i = 1, \dots, m) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi t_m}} \mathbf{P}\left(W^+\left(\frac{t_i}{t_m}\right) > \frac{a_i}{\sqrt{t_m}}, i = 1, \dots, m; h^+ > \frac{1}{\sqrt{t_m}}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Введем момент первого достижения уровня $x > 0$ для процесса $\{W^+(t \wedge \tau), t \geq 0\}$ (имеющего непрерывные траектории):

$$\tau_x^+ = \inf\{t: W^+(t \wedge \tau) = x\}.$$

Запишем следующее представление для вероятности в правой части (18):

$$\mathbf{P}\left(W^+\left(\frac{t_i}{t_m}\right) > \frac{a_i}{\sqrt{t_m}}, i = 1, \dots, m; h^+ > \frac{1}{\sqrt{t_m}}\right) = \sum_{j=0}^m P_j, \quad (19)$$

где

$$P_j = \mathbf{P}\left(W^+\left(\frac{t_i}{t_m}\right) > \frac{a_i}{\sqrt{t_m}}, i = 1, \dots, m; \tau_{1/\sqrt{t_m}}^+ \in \left[\frac{t_j}{t_m}, \frac{t_{j+1}}{t_m}\right)\right).$$

Положим при $t > 0, a < b$

$$N_t(a, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^b \exp\left(\frac{-u^2}{2t}\right) du.$$

Известно (см., например, [4]), что броуновская извилина является неоднородным марковским процессом с переходной плотностью $p^+(s, x; t, y)$: при $t \in (0, 1], y > 0$

$$p^+(0, 0; t, y) = \sqrt{2\pi} f(t, y) N_{1-t}(0, y), \quad (20)$$

а при $0 < s < t \leq 1, x > 0, y > 0$

$$p^+(s, x; t, y) = g(t - s, x, y) \frac{N_{1-t}(0, y)}{N_{1-s}(0, x)}. \quad (21)$$

Поэтому при $j = 0, 1, \dots, m - 1$

$$\begin{aligned} P_j &= \int \dots \int_{G_j(a_1, \dots, a_m)} \prod_{i=0}^{j-1} \mathbf{P}^{(t_i, x_i)}\left(W^+\left(\frac{t_{i+1}}{t_m}\right) \in \frac{dx_{i+1}}{\sqrt{t_m}}, \sup_{t \in [t_i, t_{i+1}]} W^+\left(\frac{t}{t_m}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{t_m}}\right) \\ &\quad \times \mathbf{P}^{(t_j, x_j)}\left(W^+\left(\frac{t_{j+1}}{t_m}\right) \in \frac{dx_{j+1}}{\sqrt{t_m}}, \sup_{t \in [t_j, t_{j+1}]} W^+\left(\frac{t}{t_m}\right) > \frac{1}{\sqrt{t_m}}\right) \\ &\quad \times \prod_{i=j+1}^{m-1} \mathbf{P}^{(t_i, x_i)}\left(W^+\left(\frac{t_{i+1}}{t_m}\right) \in \frac{dx_{i+1}}{\sqrt{t_m}}\right), \end{aligned} \quad (22)$$

где символ $\mathbf{P}^{(t_i, x_i)}(A)$ означает условную вероятность события A при условии, что $W^+(t_i/t_m) = x_i/\sqrt{t_m}$.

Очевидно, что

$$\mathbf{P}^{(t_i, x_i)}\left(W^+\left(\frac{t_{i+1}}{t_m}\right) \in \frac{dx_{i+1}}{\sqrt{t_m}}\right) = p^+\left(\frac{t_i}{t_m}, \frac{x_i}{\sqrt{t_m}}; \frac{t_{i+1}}{t_m}, \frac{x_{i+1}}{\sqrt{t_m}}\right) \frac{dx_{i+1}}{\sqrt{t_m}}. \quad (23)$$

Далее, в работе [4] показано, что при $t \in (0, 1]$, $u > 0$, $0 < v \leq u$

$$\mathbf{P}\left(W^+(t) \in dv, \sup_{s \in [0, t]} W^+(s) \leq u\right) = \sqrt{2\pi} N_{1-t}(0, v) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t, 2ku + v) dv, \quad (24)$$

поэтому при $0 < x_1 \leq 1$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}^{(t_0, x_0)}\left(W^+\left(\frac{t_1}{t_m}\right) \in \frac{dx_1}{\sqrt{t_m}}, \sup_{t \in [t_0, t_1]} W^+\left(\frac{t}{t_m}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{t_m}}\right) \\ &= \sqrt{2\pi} N_{1-t_1/t_m}\left(0, \frac{x_1}{\sqrt{t_m}}\right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t_1}{t_m}, \frac{2k + x_1}{\sqrt{t_m}}\right) \frac{dx_1}{\sqrt{t_m}} \\ &= \sqrt{2\pi t_m} N_{1-t_1/t_m}\left(0, \frac{x_1}{\sqrt{t_m}}\right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t_1, 2k + x_1) dx_1, \end{aligned} \quad (25)$$

причем последнее равенство объясняется тем, что

$$f\left(\frac{t_1}{t_m}, \frac{2k + x_1}{\sqrt{t_m}}\right) = t_m f(t_1, 2k + x_1).$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}^{(t_0, x_0)}\left(W^+\left(\frac{t_1}{t_m}\right) \in \frac{dx_1}{\sqrt{t_m}}, \sup_{t \in [t_0, t_1]} W^+\left(\frac{t}{t_m}\right) > \frac{1}{\sqrt{t_m}}\right) \\ &= \mathbf{P}^{(t_0, x_0)}\left(W^+\left(\frac{t_1}{t_m}\right) \in \frac{dx_1}{\sqrt{t_m}}\right) \\ &\quad - \mathbf{P}^{(t_0, x_0)}\left(W^+\left(\frac{t_1}{t_m}\right) \in \frac{dx_1}{\sqrt{t_m}}, \sup_{t \in [t_0, t_1]} W^+\left(\frac{t}{t_m}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{t_m}}\right), \end{aligned}$$

поэтому с учетом (20), (23) и (25)

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}^{(t_0, x_0)}\left(W^+\left(\frac{t_1}{t_m}\right) \in \frac{dx_1}{\sqrt{t_m}}, \sup_{t \in [t_0, t_1]} W^+\left(\frac{t}{t_m}\right) > \frac{1}{\sqrt{t_m}}\right) \\ &= \sqrt{2\pi t_m} N_{1-t_1/t_m}\left(0, \frac{x_1}{\sqrt{t_m}}\right) dx_1 \\ &\quad \times \begin{cases} \sum_{k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}} f(t_1, 2k - x_1), & x_1 \in (0, 1], \\ f(t_1, x_1), & x_1 > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

Лемма 2. Для любых $t_1, t_2 \in (0, 1]$ ($t_1 < t_2$), положительных x_1, x_2 и любого борелевского множества A из пространства $D[t_1, t_2]$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(W^+ \in A \mid W^+(t_1) = x_1, W^+(t_2) = x_2) \\ = \mathbf{P}\left(W \in A \mid W(t_1) = x_1, W(t_2) = x_2, \inf_{t \in [t_1, t_2]} W(t) \geq 0\right), \end{aligned}$$

где $W = \{W(t), t \in [0, +\infty)\}$ — стандартное броуновское движение.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением таких множеств A , что $\mathbf{P}(W^+ \in \partial A) = \mathbf{P}(W \in \partial A) = 0$. Рассмотрим для произвольных положительных a_1, a_2 вероятность

$$P^* = \mathbf{P}(W^+(t_1) > a_1, W^+(t_2) > a_2, W^+ \in A).$$

Поскольку W^+ является марковским процессом, то

$$\begin{aligned} P^* &= \int_{a_1}^{+\infty} \mathbf{P}(W^+(t_1) \in dx_1) \\ &\quad \times \int_{a_2}^{+\infty} \mathbf{P}(W^+(t_2) \in dx_2, W^+ \in A \mid W^+(t_1) = x_1). \end{aligned} \quad (27)$$

Напомним принцип инвариантности Иглхарта (см. [6], [7]): для случайного блуждания $\{S_n, n \in \mathbf{N}\}$ с нулевым сносом и конечной шаговой дисперсией $\sigma^2 > 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}, t \in [0, +\infty) \mid \min_{t \in [0, 1]} S_{[nt]} \geq 0 \right\} \xrightarrow{D} W^+.$$

В силу этого результата

$$P^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{S_{[nt_i]}}{\sigma\sqrt{n}} > a_i, i = 1, 2; \left\{ \frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}, t \geq 0 \right\} \in A \mid \min_{t \in [0, 1]} S_{[nt]} \geq 0\right). \quad (28)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left(\frac{S_{[nt_i]}}{\sigma\sqrt{n}} > a_i, i = 1, 2; \left\{ \frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}, t \geq 0 \right\} \in A \mid \min_{t \in [0, 1]} S_{[nt]} \geq 0\right) \\ &= \frac{\mathbf{P}(\min_{t \in [0, t_1]} S_{[nt]} \geq 0)}{\mathbf{P}(\min_{t \in [0, 1]} S_{[nt]} \geq 0)} \int_{a_1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{S_{[nt_1]}}{\sigma\sqrt{n}} \in dx_1 \mid \min_{t \in [0, t_1]} S_{[nt]} \geq 0\right) \\ &\quad \times \int_{a_2}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{S_{[nt_2]}}{\sigma\sqrt{n}} \in dx_2, \left\{ \frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}, t \geq 0 \right\} \in A, \right. \\ &\quad \left. \min_{t \in [t_1, t_2]} S_{[nt]} \geq 0 \mid \frac{S_{[nt_1]}}{\sigma\sqrt{n}} = x_1\right) \\ &\quad \times \mathbf{P}\left(\min_{t \in [t_2, 1]} S_{[nt]} \geq 0 \mid \frac{S_{[nt_2]}}{\sigma\sqrt{n}} = x_2\right). \end{aligned} \quad (29)$$

Первая дробь в правой части равенства (29) стремится при $n \rightarrow \infty$ к $1/\sqrt{t_1}$, поскольку (см. [9, гл. 12]) при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P} \left(\min_{t \in [0,1]} S_{[nt]} \geq 0 \right) \sim \frac{c_3}{\sqrt{n}},$$

где c_3 — положительная постоянная. Теперь рассмотрим три вероятности под знаком интеграла в правой части соотношения (29). Первая вероятность по принципу инвариантности Иглхарта стремится при $n \rightarrow \infty$ к $\mathbf{P}(W^+(1) \in dx_1/\sqrt{t_1})$. Вторая же вероятность по принципу инвариантности Прохорова–Донскера стремится при $n \rightarrow \infty$ к

$$\mathbf{P} \left(W(t_2) \in dx_2, W \in A, \inf_{t \in [t_1, t_2]} W(t) \geq 0 \mid W(t_1) = x_1 \right).$$

Наконец, третья вероятность по тому же принципу инвариантности стремится при $n \rightarrow \infty$ к $\mathbf{P}(\inf_{t \in [t_2, 1]} W(t) \geq 0 \mid W(t_2) = x_2)$. Из соотношений (28), (29) и последних утверждений следует, что

$$\begin{aligned} P^* &= \int_{a_1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t_1}} \mathbf{P} \left(W^+(1) \in \frac{dx_1}{\sqrt{t_1}} \right) \int_{a_2}^{+\infty} \mathbf{P} \left(\inf_{t \in [t_2, 1]} W(t) \geq 0 \mid W(t_2) = x_2 \right) \\ &\quad \times \mathbf{P} \left(W(t_2) \in dx_2, W \in A, \inf_{t \in [t_1, t_2]} W(t) \geq 0 \mid W(t_1) = x_1 \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Сравнивая формулы (27) и (30), видим, что

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(W^+(t_1) \in dx_1) \mathbf{P}(W^+(t_2) \in dx_2, W^+ \in A \mid W^+(t_1) = x_1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t_1}} \mathbf{P} \left(W^+(1) \in \frac{dx_1}{\sqrt{t_1}} \right) \mathbf{P} \left(\inf_{t \in [t_2, 1]} W(t) \geq 0 \mid W(t_2) = x_2 \right) \\ &\quad \times \mathbf{P} \left(W(t_2) \in dx_2, W \in A, \inf_{t \in [t_1, t_2]} W(t) \geq 0 \mid W(t_1) = x_1 \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Выбирая в качестве A достоверное событие, получаем, что

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(W^+(t_1) \in dx_1) \mathbf{P}(W^+(t_2) \in dx_2 \mid W^+(t_1) = x_1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t_1}} \mathbf{P} \left(W^+(1) \in \frac{dx_1}{\sqrt{t_1}} \right) \mathbf{P} \left(\inf_{t \in [t_2, 1]} W(t) \geq 0 \mid W(t_2) = x_2 \right) \\ &\quad \times \mathbf{P} \left(W(t_2) \in dx_2, \inf_{t \in [t_1, t_2]} W(t) \geq 0 \mid W(t_1) = x_1 \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Приравняв частное от деления правых частей (31) и (32) к частному от деления левых частей, получаем, что

$$\begin{aligned} &\frac{\mathbf{P}(W^+(t_2) \in dx_2, W^+ \in A \mid W^+(t_1) = x_1)}{\mathbf{P}(W^+(t_2) \in dx_2 \mid W^+(t_1) = x_1)} \\ &= \frac{\mathbf{P}(W(t_2) \in dx_2, W \in A, \inf_{t \in [t_1, t_2]} W(t) \geq 0 \mid W(t_1) = x_1)}{\mathbf{P}(W(t_2) \in dx_2, \inf_{t \in [t_1, t_2]} W(t) \geq 0 \mid W(t_1) = x_1)}, \end{aligned}$$

но это и означает утверждение леммы.

Лемма 3. Для любых $t_1, t_2 \in (0, 1]$ ($t_1 < t_2$), положительных x_1, x_2 и $y \geq x_1 \vee x_2$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(W^+(t_2) \in dx_2, \sup_{t \in [t_1, t_2]} W^+(t) \leq y \mid W^+(t_1) = x_1 \right) \\ &= \frac{N_{1-t_2}(0, x_2)}{N_{1-t_1}(0, x_1)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t_2 - t_1, x_1, 2ky + x_2) dx_2 \end{aligned} \quad (33)$$

и

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(W^+(t_2) \in dx_2, \sup_{t \in [t_1, t_2]} W^+(t) > y \mid W^+(t_1) = x_1 \right) \\ &= \frac{N_{1-t_2}(0, x_2)}{N_{1-t_1}(0, x_1)} \sum_{k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}} g(t_2 - t_1, -x_1, 2ky + x_2) dx_2. \end{aligned} \quad (34)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(W^+(t_2) \in dx_2, \sup_{t \in [t_1, t_2]} W^+(t) \leq y \mid W^+(t_1) = x_1 \right) \\ &= \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [t_1, t_2]} W^+(t) \leq y \mid W^+(t_1) = x_1, W^+(t_2) = x_2 \right) \\ &\quad \times p^+(t_1, x_1; t_2, x_2) dx_2. \end{aligned} \quad (35)$$

По лемме 2

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [t_1, t_2]} W^+(t) \leq y \mid W^+(t_1) = x_1, W^+(t_2) = x_2 \right) \\ &= \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [t_1, t_2]} W(t) \leq y \mid W(t_1) = x_1, W(t_2) = x_2, \inf_{t \in [t_1, t_2]} \inf W(t) \geq 0 \right) \\ &= \mathbf{P} \left(0 \leq \inf_{t \in [t_1, t_2]} W(t) \leq \sup_{t \in [t_1, t_2]} W(t) \leq y, W(t_2) \in dx_2 \mid W(t_1) = x_1 \right) \\ &\quad \times \left[\mathbf{P} \left(\inf_{t \in [t_1, t_2]} W(t) \geq 0, W(t_2) \in dx_2 \mid W(t_1) = x_1 \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (36)$$

Совместное распределение минимума, максимума и положения в последний момент броуновского движения найдено, например, в [5, § 11]. Исходя из этого распределения, нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(0 \leq \inf_{t \in [t_1, t_2]} W(t) \leq \sup_{t \in [t_1, t_2]} W(t) \leq y, W(t_2) \in dx_2 \mid W(t_1) = x_1 \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t_2 - t_1, x_1, 2ky + x_2) dx_2 \end{aligned} \quad (37)$$

и

$$\mathbf{P} \left(\inf_{t \in [t_1, t_2]} W(t) \geq 0, W(t_2) \in dx_2 \mid W(t_1) = x_1 \right) = g(t_2 - t_1, x_1, x_2) dx_2. \quad (38)$$

Из соотношений (35)–(38) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(W^+(t_2) \in dx_2, \sup_{t \in [t_1, t_2]} W^+(t) \leq y \mid W^+(t_1) = x_1 \right) \\ = \frac{p^+(t_1, x_1; t_2, x_2)}{g(t_2 - t_1, x_1, x_2)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t_2 - t_1, x_1, 2ky + x_2) dx_2. \end{aligned}$$

Откуда, учитывая соотношение (21), получаем (33). Далее, сумма левых частей соотношений (33) и (34) равна $p^+(t_1, x_1; t_2, x_2) dx_2$, поэтому, снова применяя (21) и доказанное соотношение (33), получаем (34). Лемма доказана.

Возвратимся к соотношению (22). По лемме 3 при $i > 0$, $x_i \in (0, 1]$, $x_{i+1} \in (0, 1]$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(t_i, x_i)} \left(W^+ \left(\frac{t_{i+1}}{t_m} \right) \in \frac{dx_{i+1}}{\sqrt{t_m}}, \sup_{t \in [t_i, t_{i+1}]} W^+ \left(\frac{t}{t_m} \right) \leq \frac{1}{\sqrt{t_m}} \right) \\ = \frac{N_{1-t_{i+1}/t_m}(0, x_{i+1}/\sqrt{t_m})}{N_{1-t_i/t_m}(0, x_i/\sqrt{t_m})} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t_{i+1} - t_i, x_i, 2k + x_{i+1}) dx_{i+1}, \quad (39) \end{aligned}$$

откуда, учитывая соотношение (21), находим, что при $i > 0$, $x_i \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(t_j, x_j)} \left(W^+ \left(\frac{t_{j+1}}{t_m} \right) \in \frac{dx_{j+1}}{\sqrt{t_m}}, \sup_{t \in [t_j, t_{j+1}]} W^+ \left(\frac{t}{t_m} \right) > \frac{1}{\sqrt{t_m}} \right) \\ = \frac{N_{1-t_{j+1}/t_m}(0, x_{j+1}/\sqrt{t_m})}{N_{1-t_j/t_m}(0, x_j/\sqrt{t_m})} dx_{i+1} \\ \times \begin{cases} \sum_{k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}} g(t_{i+1} - t_i, -x_j, 2k + x_{j+1}), & x_{j+1} \in (0, 1], \\ \frac{1}{\sqrt{t_m}} g \left(\frac{t_{i+1} - t_i}{t_m}, \frac{x_j}{\sqrt{t_m}}, \frac{x_{j+1}}{\sqrt{t_m}} \right), & x_{j+1} > 1. \end{cases} \quad (40) \end{aligned}$$

Заменяя в соотношении (22) все вероятности в правой части в соответствии с формулами (23), (25), (26), (39) и (40) и замечая, что

$$N_{1-t_1/t_m} \left(0, \frac{x_1}{\sqrt{t_m}} \right) \prod_{i=1}^{m-1} \frac{N_{1-t_{i+1}/t_m}(0, x_{i+1}/\sqrt{t_m})}{N_{1-t_i/t_m}(0, x_i/\sqrt{t_m})} = \frac{1}{2}, \quad (41)$$

$$\frac{1}{\sqrt{t_m}} g \left(\frac{t_{i+1} - t_i}{t_m}, \frac{x_i}{\sqrt{t_m}}, \frac{x_{i+1}}{\sqrt{t_m}} \right) = g(t_{i+1} - t_i, x_i, x_{i+1}), \quad (42)$$

получаем, что при $j = 0, 1, \dots, m-1$

$$\begin{aligned} P_j = \sqrt{\frac{\pi t_m}{2}} \int \cdots \int_{G_j(a_1, \dots, a_m)} \prod_{i=0}^{j-1} p_1(t_i, x_i; t_{i+1}, x_{i+1}) p_2(t_j, x_j; t_{j+1}, x_{j+1}) \\ \times \prod_{i=j+1}^{m-1} g(t_{i+1} - t_i, x_i, x_{i+1}) dx_1 \cdots dx_m. \quad (43) \end{aligned}$$

Осталось найти вероятность P_m . Вместо (22) получаем формулу

$$P_m = \int \cdots \int_{G_m(a_1, \dots, a_m)} \prod_{i=0}^{m-1} \mathbf{P}^{(t_i, x_i)} \left(W^+ \left(\frac{t_{i+1}}{t_m} \right) \in \frac{dx_{i+1}}{\sqrt{t_m}}, \sup_{t \in [t_i, t_{i+1}]} W^+ \left(\frac{t}{t_m} \right) \leq \frac{1}{\sqrt{t_m}} \right) \\ \times \mathbf{P}^{(t_m, x_m)} \left(\sup_{t \in [t_m, +\infty)} W^+ \left(\frac{t}{t_m} \right) > \frac{1}{\sqrt{t_m}} \right).$$

Но последняя вероятность равна (вспомним определение процесса $W^+(t)$ при $t \geq 1$)

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \in [1, \tau]} W(t) > \frac{1}{\sqrt{t_m}} \mid W(1) = \frac{x_m}{\sqrt{t_m}} \right) = x_m,$$

причем последнее равенство является аналогом формулы для вероятности разорения (см. [8, гл. 14]). Следовательно, ввиду соотношений (25), (39) и (41) справедливо равенство

$$P_m = \sqrt{\frac{\pi t_m}{2}} \int \cdots \int_{G_m(a_1, \dots, a_m)} \prod_{i=0}^{m-1} p_1(t_i, x_i; t_{i+1}, x_{i+1}) x_m dx_1 \cdots dx_m. \quad (44)$$

Подставляя выражения для вероятностей P_j из формул (43) и (44) в соотношение (19) и учитывая (18), получаем утверждение теоремы 2.

В качестве *дополнения* к теореме 2 отметим (см. соотношение (18)), что если хотя бы одно из чисел $a_1, \dots, a_m$ больше или равно 1, то

$$\mathbf{P}(Y(t_i) > a_i, i = 1, \dots, m) \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi t_m}} \mathbf{P} \left(W^+ \left(\frac{t_i}{t_m} \right) > \frac{a_i}{\sqrt{t_m}}, i = 1, \dots, m \right) \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi t_m}} \int \cdots \int_{G_0(a_1, \dots, a_m)} \prod_{i=0}^{m-1} p^+ \left(\frac{t_i}{t_m}, \frac{x_i}{\sqrt{t_m}}; \frac{t_{i+1}}{t_m}, \frac{x_{i+1}}{\sqrt{t_m}} \right) \frac{1}{(\sqrt{t_m})^m} dx_1 \cdots dx_m,$$

Откуда, замечая, что (см. соотношения (20), (21), (41) и (42))

$$\prod_{i=0}^{m-1} p^+ \left(\frac{t_i}{t_m}, \frac{x_i}{\sqrt{t_m}}; \frac{t_{i+1}}{t_m}, \frac{x_{i+1}}{\sqrt{t_m}} \right) \\ = \sqrt{\frac{\pi}{2}} f \left(\frac{t_1}{t_m}, \frac{x_1}{\sqrt{t_m}} \right) \prod_{i=1}^{m-1} g \left(\frac{t_{i+1} - t_i}{t_m}, \frac{x_i}{\sqrt{t_m}}, \frac{x_{i+1}}{\sqrt{t_m}} \right) \\ = \sqrt{\frac{\pi}{2}} f(t_1, x_1) (\sqrt{t_m})^{m+1} \prod_{i=1}^{m-1} g(t_{i+1} - t_i, x_i, x_{i+1}),$$

получаем равенство

$$\mathbf{P}(Y(t_i) > a_i, i = 1, \dots, m) \\ = \int \cdots \int_{G_0(a_1, \dots, a_m)} f(t_1, x_1) \prod_{i=1}^{m-1} g(t_{i+1} - t_i, x_i, x_{i+1}) dx_1 \cdots dx_m.$$

Далее, поскольку состояние 0 является поглощающим для процесса Y , то помимо рассмотренных в теореме 2 вероятностей разумно рассмотреть при положительных $a_1, \dots, a_m$

$$\mathbf{P}(Y(t_i) > a_i, i = 1, \dots, m-1; Y(t_m) = 0).$$

Очевидно, что эта вероятность может быть вычислена по формуле

$$\mathbf{P}(Y(t_i) > a_i, i = 1, \dots, m-1) - \mathbf{P}(Y(t_i) > a_i, i = 1, \dots, m-1; Y(t_m) > 0),$$

учитывая, что две последние вероятности находятся по теореме 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Afanasyev V. I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A.* Criticality for branching processes in random environment. — *Ann. Probab.*, 2005, v. 33, № 2, p. 645–673.
2. *Афанасьев В. И.* Закон арксинуса для ветвящихся процессов в случайной среде и процессов Гальтона–Ватсона. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, т. 51, в. 3, с. 449–464.
3. *Афанасьев В. И.* О моменте достижения фиксированного уровня критическим ветвящимся процессом в случайной среде. — *Дискретн. матем.*, 1999, т. 11, № 4, с. 33–47.
4. *Durrett R. T., Iglehart D. L.* Functionals of Brownian meander and Brownian excursion. — *Ann. Probab.*, 1977, v. 5, № 1, p. 130–135.
5. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.
6. *Iglehart D. L.* Functional central limit theorems for random walks conditioned to stay positive. — *Ann. Probab.*, 1974, v. 2, № 4, p. 608–619.
7. *Bolthausen E.* On a functional central limit theorem for random walks conditioned to stay positive. — *Ann. Probab.*, 1976, v. 4, № 3, p. 480–485.
8. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984, 528 с.
9. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.

Поступила в редакцию
14.XII.2007

Исправленный вариант
20.VI.2008