Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Ш. Липцер, П. Чиганский, Умеренные отклонения для процесса диффузионного типа в случайной среде, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 1, 39–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2498>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 03:07:03

© 2009 г. ЛИПЦЕР Р. Ш.*, ЧИГАНСКИЙ П. **

УМЕРЕННЫЕ УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ ПРОЦЕССА ДИФФУЗИОННОГО ТИПА В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ¹⁾

Мы рассматриваем процесс диффузионного типа

$$dX_t^\varepsilon = b\left(\frac{X_t^\varepsilon}{\varepsilon}\right) dt + \varepsilon^\kappa \sigma\left(\frac{X_t^\varepsilon}{\varepsilon}\right) dB_t, \quad t \leq T,$$

с фиксированным начальным условием $X_0^\varepsilon = x_0$, броуновским движением B_t и малым параметром ε . Здесь $\kappa > 0$ — фиксированная положительная константа, $\sigma(u)$, $u \in \mathbf{R}$ эргодическая стационарная марковская цепь со значениями $a_1, \dots, a_m$ и $b(u) = g(\sigma(u))$, где g — измеримая ограниченная функция.

Для $\kappa < \frac{1}{6}$ мы доказываем, что семейство $\{X_t^\varepsilon\}_{\varepsilon \rightarrow 0}$ удовлетворяет принципу больших уклонений Вентцеля–Фрейдлина для диффузионного процесса с постоянными сносом и диффузией:

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^m \frac{g(a_i)}{a_i^2} \pi_i / \sum_{i=1}^m \frac{1}{a_i^2} \pi_i, \quad \mathbf{a} = 1 / \sum_{i=1}^m \frac{1}{a_i^2} \pi_i,$$

где $\{\pi_1, \dots, \pi_m\}$ — распределение $\sigma(0)$.

Ключевые слова и фразы: процессы диффузионного типа, случайная среда, малый параметр, принцип больших уклонений Вентцеля–Фрейдлина, умеренные уклонения.

1. Введение. В работе [4] установлен принцип больших уклонений для диффузионного векторного марковского процесса, заданного уравнением Ито и порождаемого броуновским движением B_t :

$$X_t^\varepsilon = x_0 + \int_0^t b\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) ds + \varepsilon^\kappa \int_0^t \sigma\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) dB_s, \quad (1.1)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр и $b(x)$, $\sigma(x)$ — гладкие периодические функции с периодом 1.

* Department of Electrical Engineering Systems, Tel Aviv University, 69978 Tel Aviv, Israel; e-mail: liptser@eng.tau.ac.il

** Department of Statistics, The Hebrew University, Mount Scopus, Jerusalem 91905, Israel; e-mail: pchiga@mscc.huji.ac.il

¹⁾ П. Чиганский благодарит фонд Chateaubriand за поддержку этого исследования.

В [4] показано, что имеют место три варианта принципа больших уклонений в соответствии с $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$, $\kappa = \frac{1}{2}$ и $\kappa \in (\frac{1}{2}, \infty)$, где второй и третий варианты отличаются от классической версии Вентцеля–Фрейдлина, а первый вариант соответствует классической версии и имеет такой же функционал действия, как для семейства $\{\hat{X}^\varepsilon\}_{\varepsilon \rightarrow 0}$ с постоянными сносом и диффузией. В частности, в скалярном случае

$$\hat{X}_t^\varepsilon = x_0 + \mathbf{b}t + \varepsilon^\kappa \sqrt{\mathbf{a}} B_t,$$

где $\mathbf{b} = \int_0^1 b(s) \sigma^{-2}(s) ds (\int_0^1 \sigma^{-2}(s) ds)^{-1}$ и $\mathbf{a} = (\int_0^1 \sigma^{-2}(s) ds)^{-1}$. В этом контексте, следуя терминологии из [5], будем говорить, что для $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$ имеет место принцип умеренных уклонений.

В этой работе мы устанавливаем принцип умеренных уклонений для скалярного процесса диффузионного типа в случайной среде, когда $b(u) = b(\omega, u)$ и $\sigma(u) = \sigma(\omega, u)$ являются случайными процессами, не зависящими от броуновского движения.

Мы предполагаем, что $\sigma(u)$ — стационарная эргодическая марковская цепь со значениями в множестве $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_m\}$, $a_i \neq 0$, с непрерывными справа и имеющими пределы слева траекториями. Мы также предполагаем, что $b(u) = g(\sigma(u))$ с некоторой ограниченной и измеримой функцией $g(x)$.

Мы доказываем существование принципа умеренных уклонений для

$$\kappa \in \left(0, \frac{1}{6}\right) \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = \sum_{i=1}^m \frac{g(a_i)}{a_i^2} \pi_i / \sum_{i=1}^m \frac{1}{a_i^2} \pi_i, \quad \mathbf{a} = 1 / \sum_{i=1}^m \frac{1}{a_i^2} \pi_i, \quad (1.2)$$

где $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_m)$ — распределение $\sigma(0)$.

В [4] для доказательства принципа больших уклонений используется марковское свойство процесса X_t^ε и асимптотический анализ (здесь и далее $\lambda(t)$ — тест-функция):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{E} \left(\exp \left[\frac{1}{\varepsilon^{2\kappa}} \int_0^T \lambda(t) dX_t^\varepsilon \right] \right) \quad (1.3)$$

(см. например, [1, гл. 2.3, 5.1], [3], [6]).

В случайной среде X_t^ε уже не является марковским процессом, что чрезвычайно усложняет вычисление (1.3). Поэтому вместо (1.3) мы используем подход А. А. Пухальского и вычисляем экспоненциальный мартингал

$$z_T(\lambda) = \exp \left[\frac{1}{\varepsilon^{2\kappa}} \int_0^T \lambda(t) dX_t^\varepsilon - \ln \mathcal{E}_T(X^\varepsilon) \right],$$

в котором кумулянта

$$\mathcal{E}_t(X^\varepsilon) = \exp \left(\frac{1}{\varepsilon^{2\kappa}} \int_0^t \left[\lambda(s) b\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) - \frac{\lambda^2(s)}{2} \sigma^2\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) \right] ds \right)$$

мультипликативно компенсирует $\exp(\varepsilon^{-2\kappa} \int_0^T \lambda(t) dX_t^\varepsilon)$ до локального мартингала $\mathfrak{z}_t(\lambda)$. В этом подходе достаточные условия существования принципа умеренных уклонений формулируются в терминах $\mathcal{E}_t(X^\varepsilon)$ (см. следствие 4.3.8 в [14]). В нашей постановке задачи эти условия оказываются еще проще: в силу следствия 6.7 в [13] принцип умеренных уклонений имеет место, если найдутся константы $\mathbf{b}, \mathbf{a} > 0$ и $\kappa > 0$ такие, что для любого $\eta > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t \left[b \left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) - \mathbf{b} \right] ds \right| > \eta \right) &= -\infty, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t \left[\sigma^2 \left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon} \right) - \mathbf{a} \right] ds \right| > \eta \right) &= -\infty; \end{aligned} \quad (1.4)$$

подходящий подбор этих констант анонсирован в (1.2).

В следующем разделе обсуждается существование слабого решения стохастического уравнения (1.1) в случайной среде. Наш основной результат сформулирован в теореме 3.1 (раздел 3) и доказывается в разделе 5. Доказательству теоремы 3.1 предшествуют вспомогательные результаты (раздел 4). Расхождение $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$ и $\kappa \in (0, \frac{1}{6})$ для осциллирующей и случайной сред обсуждается в разделе 6.

Для удобства читателя основные детали метода Пухальского, адаптированные к нашей постановке задачи, вынесены в приложение.

2. Диффузионный процесс в случайной среде. Здесь и далее мы имеем дело со слабым решением стохастического уравнения, которое конструируется с помощью замены времени и замены вероятностной меры (по поводу других подходов см. [2], [15]).

Пусть $\sigma = (\sigma(u))_{u \in \mathbf{R}}$ — марковская цепь, определенная в предыдущем разделе, и $\beta = (\beta_t)_{t \geq 0}$ броуновское движение, не зависящее от σ . Пусть пара (σ, β) задана на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{Q})$, удовлетворяющем обычным условиям. При этом σ является $\mathcal{F}_0$ -измеримой, а β не зависит от $\mathcal{F}_0$. Для каждого $t > 0$ определим момент останковки

$$\tau_t = \inf \left\{ r: \int_0^r \left(\varepsilon^{2\kappa} \sigma^2((\beta_s + x_0)/\varepsilon) \right)^{-1} ds \geq t \right\}.$$

Поскольку выполнено неравенство $\sigma^2(u) > 0$, то имеют место тождества $\int_0^{\tau_t} \left(\varepsilon^{2\kappa} \sigma^2((\beta_s + x_0)/\varepsilon) \right)^{-1} ds \equiv t$ и $\tau_t \equiv \int_0^t \varepsilon^{2\kappa} \sigma^2((\beta_{\tau_s} + x_0)/\varepsilon) ds$. Теперь введем поток σ -алгебр $\mathbf{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ с $\mathcal{G}_t := \mathcal{F}_{\tau_t}$. Очевидно, что $(\beta_{\tau_t}, \mathcal{G}_t)$ является непрерывным мартингалом с предсказуемой квадратической характеристикой τ_t . Тогда в силу теоремы Леви–Дуба случайный процесс

$$B_t = \int_0^t \left(\varepsilon^{2\kappa} \sigma^2((\beta_{\tau_s} + x_0)/\varepsilon) \right)^{-1} d\beta_{\tau_s}$$

является броуновским движением. Поскольку $B = (B_t)_{t \geq 0}$ не зависит от $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_0 = \mathcal{G}_0$, то случайный процесс $B = (B_t)_{t \geq 0}$ не зависит от $\mathcal{G}_0$. С другой стороны, σ также является $\mathcal{G}_0$ -измеримой. Поэтому B и $\sigma(u)$ — независимые случайные процессы.

Обозначим $Y_t := x_0 + \beta_{\tau_t}$. Теперь, в силу определения B_t , имеем

$$Y_t = x_0 + \int_0^t \varepsilon^\kappa \sigma\left(\frac{Y_s}{\varepsilon}\right) dB_s. \quad (2.1)$$

Итак, по крайней мере одно слабое решение уравнения (1.1) с нулевым сносом существует. Слабое решение (1.1) с ограниченным сносом легко конструируется с помощью теоремы Гирсанова. Пусть Y_t определен в (2.1), и пусть

$$\Upsilon_T = \exp\left(\int_0^T \frac{b(Y_s/\varepsilon)}{\varepsilon^\kappa \sigma(Y_s/\varepsilon)} dB_s - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{b^2(Y_s/\varepsilon)}{\varepsilon^{2\kappa} \sigma^2(Y_s/\varepsilon)} ds\right).$$

Поскольку $b(Y_s/\varepsilon)/(\varepsilon^\kappa \sigma(Y_s/\varepsilon))$ — ограниченный случайный процесс и $T < \infty$, имеет место равенство $\int_\Omega \Upsilon_T d\mathbf{Q} = 1$. Мы определим вероятностную меру $\mathbf{P}$ полагая $d\mathbf{P} := \Upsilon_T d\mathbf{Q}$. Тогда по теореме Гирсанова случайный процесс

$$\hat{B}_t = B_t - \int_0^t \frac{b(Y_s/\varepsilon)}{\varepsilon^\kappa \sigma(Y_s/\varepsilon)} ds$$

является броуновским движением относительно $(\mathbf{G}, \mathbf{P})$. Другими словами, случайный процесс Y_t , определенный на новом стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$, допускает следующее представление:

$$Y_t = x_0 + \int_0^t b\left(\frac{Y_s}{\varepsilon}\right) ds + \int_0^t \varepsilon^\kappa \sigma\left(\frac{Y_s}{\varepsilon}\right) d\hat{B}_s.$$

Таким образом, Y_t является слабым решением уравнения (1.1) и, поскольку $(\hat{B}_t)_{t \leq T}$ есть $\mathbf{P}$ -независимым от $\mathcal{G}_0$, а $(\sigma(u))_{u \in \mathbf{R}}$ есть $\mathcal{G}_0$ -измеримый процесс, процессы $\hat{B}_t$ и $\sigma(u)$ являются $\mathbf{P}$ -независимыми.

3. Формулировка основного результата. Пусть $X^\varepsilon = (X_t^\varepsilon)_{t \leq T}$ является слабым решением стохастического уравнения (1.1). Напомним, что X^ε удовлетворяет принципу больших уклонений (в нашем случае умеренных уклонений) в метрическом пространстве $(\mathbf{C}_{[0,T]}, \varrho)$, где $\mathbf{C}_{[0,T]}$ — пространство непрерывных функций на $[0, T]$ и ϱ — равномерная метрика, с параметром $\varepsilon^{2\kappa}$ и функционалом действия $J(u)$, если для любых замкнутого и открытого множеств F и G соответственно

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P}(X^\varepsilon \in F) &\leq - \inf_{u \in F} J(u), \\ \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P}(X^\varepsilon \in G) &\geq - \inf_{u \in G} J(u). \end{aligned}$$

Теорема 3.1. Для любого $\kappa < 1/6$ семейство $\{X^\varepsilon\}_{\varepsilon \rightarrow 0}$ удовлетворяет принципу умеренных уклонений с параметром $\varepsilon^{2\kappa}$ и функционалом действия

$$J(u) = \begin{cases} \frac{1}{2\mathbf{a}} \int_0^T (\dot{u}_t - \mathbf{b})^2 dt, & u_0 = x_0, \quad du_t = \dot{u}_t dt, \quad \int_0^T \dot{u}_t^2 dt < \infty, \\ \infty & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^m \frac{g(a_i)\pi_i}{a_i^2} / \sum_{i=1}^m \frac{\pi_i}{a_i^2} \quad \text{и} \quad \mathbf{a} = 1 / \sum_{i=1}^m \frac{\pi_i}{a_i^2},$$

а $\{\pi_1, \dots, \pi_m\}$ — распределение $\sigma(0)$.

Доказательство этой теоремы использует ряд вспомогательных результатов, приведенных в следующем разделе.

4. Вспомогательные результаты. Здесь и далее: для любой матрицы A через A^* обозначается ее транспонированная матрица; для любого $x \in \mathbf{R}^d$ через $\text{diag}(x)$ обозначается диагональная матрица с диагональю x ; l — произвольная положительная константа, значение которой изменяется от случая к случаю; $\inf\{\emptyset\} = \infty$.

4.1. Разложение Пуассона. Пусть $\mathbf{F}^\sigma = (\mathcal{F}_t^\sigma)_{t \in \mathbf{R}}$ — поток σ -алгебр, порожденный процессом $\sigma: \mathcal{F}_t^\sigma = \{\sigma(u), -\infty < u \leq t\}$. Поскольку σ является эргодической марковской цепью, ее матрица переходных интенсивностей Λ имеет единственное нулевое собственное значение. Поэтому для любой ограниченной и измеримой функции $\Psi(x)$ с $\mathbf{E} \Psi(\sigma(0)) = 0$ найдется константа $\gamma > 0$ такая, что $|\mathbf{E}(\Psi(\sigma(t)) | \mathcal{F}_0^\sigma)| \leq l e^{-\gamma t}$ п.н. для любого $t > 0$. Отсюда $\int_0^\infty \mathbf{E} |\mathbf{E}(\Psi(\sigma(t)) | \mathcal{F}_0^\sigma)| dt < \infty$. Тогда (см., например, [12, гл. 9, § 2]) процесс $\int_0^t \Psi(\sigma(s)) ds$ допускает разложение Пуассона

$$\int_0^t \Psi(\sigma(s)) ds = V_t - V_0 - M_t, \quad (4.1)$$

где V_t согласован с $\mathbf{F}^\sigma$ и M_t является $\mathbf{F}^\sigma$ -мартингалом с непрерывными справа траекториями, имеющими пределы слева. В нашем случае M_t — квадратично интегрируемый мартингал с квадратической характеристикой $\langle M \rangle_t$.

Лемма 4.1. 1) $|V_t| \leq l$ для любого $t \geq 0$.

2) M_t — чисто разрывный квадратично интегрируемый мартингал с ограниченными скачками.

3) $d\langle M \rangle_t = m(t) dt$, $m(t) \leq l$.

Доказательство. Обозначим

$$I(t) = \begin{pmatrix} I_{\{\sigma(t)=a_1\}} \\ \vdots \\ I_{\{\sigma(t)=a_m\}} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad f = \begin{pmatrix} \Psi(a_1) \\ \vdots \\ \Psi(a_m) \end{pmatrix}.$$

Очевидное равенство $\Psi(\sigma(t)) = f^* I(t)$ влечет за собой

$$0 = \mathbf{E} \Psi(\sigma(t)) = f^* \mathbf{E} I(t) = f^* \pi.$$

Это свойство f и единственность нулевого собственного значения матрицы Λ обеспечивают существование решения уравнения Пуассона

$$\Lambda g = f, \quad (4.2)$$

которое также является единственным в классе $g^* \pi = 0$. Впоследствии рассматриваются только решения из этого класса.

В силу леммы 9.2 в [11, гл. 9, § 9.1], процесс

$$N_t := I(t) - I(0) - \int_0^t \Lambda^* I(s) ds \quad (4.3)$$

является чисто разрывным мартингалом, согласованным с $\mathbf{F}^\sigma$, и имеет ограниченные скачки. Мы покажем, что $V_t = g^* I(t)$ и $M_t = g^* N_t$. Умножая слева обе части (4.3) на g^* и принимая во внимание определения V_t и M_t , получаем

$$M_t = V_t - V_0 - \int_0^t g^* \Lambda^* I(s) ds.$$

Далее, в соответствии с (4.2), $g^* \Lambda^* I(s) = f^* I(s) = \Psi(\sigma(u))$.

Итак, (4.1) имеет место с V_t и M_t , указанными выше.

Теперь утверждения 1) и 2) очевидны. Утверждение 3) доказывается следующим образом: по формуле Ито

$$\begin{aligned} I(t)I^*(t) &= I(0)I^*(0) + \int_0^t [I(s)I^*(s)\Lambda + \Lambda^* I(s)I^*(s)] ds \\ &\quad + \int_0^t [I(s-)dN_s^* + dN_s I^*(s-)] + [N, N]_t \\ &= I(0)I^*(0) + \int_0^t [I(s)I^*(s)\Lambda + \Lambda^* I(s)I^*(s)] ds + \langle N \rangle_t \\ &\quad + \text{мартингал}, \end{aligned}$$

где $\langle N \rangle_t$ — квадратическая вариация N_t . С другой стороны, формула Ито, примененная к тождеству $I(t)I^*(t) \equiv \text{diag}(I(t))$, дает такое представление:

$$I(t)I^*(t) = I(0)I^*(0) + \int_0^t \text{diag}(\Lambda^* I(s)) ds + \text{мартингал}.$$

Сравнивая эти представления для $I(t)I^*(t)$, заключаем, что предсказуемый процесс локально ограниченной вариации

$$\int_0^t \left([I(s)I^*(s)\Lambda + \Lambda^* I(s)I^*(s)] - \text{diag}[\Lambda^* I(s)] \right) ds + \langle N \rangle_t$$

с траекториями в пространстве Скорохода непрерывных справа и допускающих пределы слева функций является мартингалом с нулевой начальной точкой. Отсюда по теореме 1 в [12, гл. 2, § 2] заключаем, что этот мартингал неотличим от нуля п.н. Другими словами,

$$\langle N \rangle_t = \int_0^t \left(\text{diag} [\Lambda^* I(s)] - [I(s) I^*(s) \Lambda + \Lambda^* I(s) I^*(s)] \right) ds \quad \text{п.н.} \quad \forall t \geq 0.$$

Следовательно, $d\langle M \rangle_t \equiv g^* d\langle N \rangle_t g = g^* (\text{diag} [\Lambda^* I(t)] - [I(t) I^*(t) \Lambda + \Lambda^* I(t) I^*(t)]) g dt$. Лемма 4.1 доказана.

4.2. Экспоненциальная оценка для мартингалов с ограниченными скачками. Для непрерывного мартингала $M = (M_t)_{t \geq 0}$ с $M_0 = 0$ и квадратической вариацией $\langle M \rangle_t$ известна следующая экспоненциальная оценка (см., например, [9, лемма 1]): для любых $q, r > 0$

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} |M_t| \geq r, \langle M \rangle_T \leq q \right) \leq 2 \exp \left(- \frac{r^2}{2q} \right). \quad (4.4)$$

Подобная оценка имеет место и для разрывных мартингалов.

Лемма 4.2. Пусть $M = (M_t)_{t \geq 0}$ — чисто разрывный мартингал с $M_0 = 0$ и траекториями из пространства Скорохода $\mathbf{D}$ с ограниченными скачками $|\Delta M_t| \leq K$ и квадратической вариацией $\langle M \rangle_t$.

Тогда для любых $q, r > 0$

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} |M_t| \geq r, \langle M \rangle_T \leq q \right) \leq 2 \exp \left(- \frac{r^2}{2(Kr + q)} \right). \quad (4.5)$$

З а м е ч а н и е 1. При $K = 0$ (4.5) превращается в (4.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\mu = \mu(dt, dz)$ целочисленную меру, порожденную скачками ΔM_t , и $\nu = \nu(dt, dz)$ — ее компенсатор (подробнее см., например, [12] или [7]). Поскольку $|\Delta M_t| \leq K$ и, значит, $\mu(\mathbf{R}_+ \times \{|z| > K\}) = 0$, компенсатор можно выбрать таким, чтобы выполнялось равенство $\nu(\mathbf{R}_+ \times \{|z| > K\}) = 0$. Тогда $M_t = \int_0^t \int_{|z| \leq K} z [\mu(ds, dz) - \nu(ds, dz)]$ и $\langle M \rangle_t = \int_0^t \int_{|z| \leq K} z^2 \nu(ds, dz)$. Пусть предсказуемый процесс $\mathcal{L}_t(\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, с траекториями из пространства Скорохода $\mathbf{D}$ компенсирует $e^{\lambda M_t}$ до локального мартингала

$$\mathfrak{z}_t(\lambda) = e^{\lambda M_t - \mathcal{L}_t(\lambda)}.$$

С помощью формулы Ито легко проверяется, что

$$\mathcal{L}_t(\lambda) = G_t(\lambda) + \sum_{s \leq t} [\ln(1 + \Delta G_s(\lambda)) - \Delta G_s(\lambda)],$$

где

$$G_t(\lambda) = \int_0^t \int_{|z| \leq K} (e^{\lambda z} - 1 - \lambda z) \nu(ds, dz),$$

$$\Delta G_t(\lambda) = \int_{|z| \leq K} (e^{\lambda z} - 1 - \lambda z) \nu(\{t\}, dz).$$

Поскольку всякий положительный локальный мартингал является также супермартингалом, то $\mathbf{E} \mathfrak{z}_\tau(\lambda) \leq 1$ для любого момента остановки τ . Мы используем далее неравенство $\mathcal{L}_t(\lambda) \leq G_t(\lambda)$, вытекающее из $\Delta G_t(\lambda) \geq 0$ и $\ln(1+x) - x \leq 0$ для $x \geq 0$. В частности, отсюда следует, что $\mathfrak{z}_\tau \geq e^{\lambda M_\tau - G_\tau(\lambda)}$ для любого момента остановки τ и $\mathbf{E} e^{\lambda M_\tau - G_\tau(\lambda)} \leq 1$. Для $|z| \leq K$ и $|\lambda| < 1/K$ получаем

$$e^{\lambda z} - \lambda z - 1 = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(\lambda z)^j}{j!} \leq \frac{\lambda^2 z^2}{2} \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda z|^j = \frac{\lambda^2 z^2}{2} \frac{1}{1 - |\lambda z|} \leq \frac{\lambda^2 z^2}{2} \frac{1}{1 - |\lambda K|}.$$

Следовательно,

$$G_\tau(\lambda) \leq \int_0^\tau \int_{|z| \leq K} \frac{\lambda^2 z^2}{2} \frac{1}{1 - |\lambda K|} \nu(ds, dz) = \frac{1}{1 - |\lambda|K} \frac{\lambda^2}{2} \langle M \rangle_\tau$$

и, значит, для любого измеримого множества A

$$1 \geq \mathbf{E} I_{\{A\}} \exp \left(\lambda M_\tau - \frac{1}{1 - |\lambda|K} \frac{\lambda^2}{2} \langle M \rangle_\tau \right).$$

Выбор $\tau = \inf\{t \leq T: M_t \geq r\}$, $A = \{\tau \leq T\} \cap \{\langle M \rangle_T \leq q\}$ и $|\lambda| \leq 1/K$, а также $\{\sup_{t \leq T} M_t \geq r\} = \{\tau \leq T\}$ влечет за собой $1 \geq \mathbf{E} I_{\{A\}} \exp(\lambda r - (1 - |\lambda|K)^{-1} \lambda^2 q/2)$ и далее

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} M_t \geq r, \langle M \rangle_T \leq q \right) \leq \exp \left(- \frac{\lambda r(1 - \lambda K) - \lambda^2 q/2}{1 - \lambda K} \right).$$

Наконец, выбор $\lambda' = \arg \max_{\lambda \in (0, 1/K)} [\lambda r(1 - \lambda K) - \lambda^2 q/2]$ дает

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} M_t \geq r, \langle M \rangle_T \leq q \right) \leq \exp \left(- \frac{r^2}{2(Kr + q)} \right).$$

Заметим, что такое же неравенство имеет место и для $\sup_{t \leq T} (-M_t)$. Теперь (4.5) можно вывести с помощью $\mathbf{P}(A \cup B) \leq 2[\mathbf{P}(A) \vee \mathbf{P}(B)]$. Лемма 4.2 доказана.

5. Доказательство теоремы 3.1. Напомним, что (1.4) обеспечивает принцип умеренных уклонений. Мы начнем с проверки первого условия в (1.4). Введем стационарный процесс

$$\theta(t) = \frac{b(t) - \mathbf{b}}{\sigma^2(t)},$$

где $\mathbf{b}$ — такая константа, что $\mathbf{E} \theta(t) = 0$, т.е. $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^m (g(a_i) \pi_i / a_i^2) \times (\sum_{i=1}^m \pi_i / a_i^2)^{-1}$. Положим

$$H(x) = \int_0^x \int_0^v \theta(s) ds dv.$$

Случайная функция $H(x)$ имеет непрерывную первую производную и ограниченную вторую соболевскую производную. Это позволяет применить версию Крылова формулы Ито (см. [8]) и получить

$$H\left(\frac{X_t^\varepsilon}{\varepsilon}\right) = H\left(\frac{x_0}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \int_0^{X_v^\varepsilon/\varepsilon} \theta(s) ds dX_v^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^{2(1-\kappa)}} \int_0^t \left[b\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) - \mathbf{b} \right] ds.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_0^t \left[b\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) - \mathbf{b} \right] ds &= \varepsilon^{2(1-\kappa)} \int_0^{X_t^\varepsilon/\varepsilon} \int_0^v \theta(s) ds dv \\ &\quad - \varepsilon^{2(1-\kappa)} \int_0^{x_0/\varepsilon} \int_0^v \theta(s) ds dv - \varepsilon^{1-2\kappa} \int_0^t \int_0^{X_v^\varepsilon/\varepsilon} \theta(s) ds b\left(\frac{X_v^\varepsilon}{\varepsilon}\right) dv \\ &\quad - \varepsilon^{1-\kappa} \int_0^t \int_0^{X_v^\varepsilon/\varepsilon} \theta(s) ds \sigma\left(\frac{X_v^\varepsilon}{\varepsilon}\right) dB_v. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Пусть Z_t^ε обозначает любое слагаемое в правой части (5.1). Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} |Z_t^\varepsilon| > \eta \right) = -\infty. \quad (5.2)$$

Для упрощения доказательства (5.2) покажем, что множество $\Upsilon_C^\varepsilon = \{\sup_{t \leq T} |X_t^\varepsilon| > C\}$ является экспоненциально пренебрежимым в том смысле, что

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P}(\Upsilon_C^\varepsilon) = -\infty. \quad (5.3)$$

Обозначим $A_t^\varepsilon = x_0 + \int_0^t b(X_s^\varepsilon/\varepsilon) ds$ и $M_t^\varepsilon = \varepsilon^\kappa \int_0^t \sigma(X_s^\varepsilon/\varepsilon) dB_s$. Поскольку $X_t^\varepsilon = A_t^\varepsilon + M_t^\varepsilon$ и случайная величина $\sup_{t \leq T} |A_t^\varepsilon|$ ограничена константой, не зависящей от ε , то доказательство (5.3) сводится к доказательству

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} |M_t^\varepsilon| > C \right) = -\infty.$$

Использование $\mathbf{P}(\langle M^\varepsilon \rangle_T \leq lT\varepsilon^{2\kappa}) = 1$ и (4.4) позволяет установить верхнюю оценку $\mathbf{P}(\sup_{t \leq T} |M_t^\varepsilon| > C) \leq 2 \exp(-C^2/(2\varepsilon^{2\kappa}lT))$ и, значит, (5.3) выполнено. Ввиду (5.3) можно доказательство (5.2) заменить доказательством

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} |Z_t^\varepsilon| \geq \eta, \Omega \setminus \Upsilon_C^\varepsilon \right) = -\infty \quad \forall C > 0. \quad (5.4)$$

Пусть $Z_t^\varepsilon := \varepsilon^{2(1-\kappa)} \int_0^{X_t^\varepsilon/\varepsilon} \int_0^v \theta(s) ds dv$. Тогда на множестве $\{\Omega \setminus \Upsilon_C^\varepsilon\}$ случайная величина $\sup_{t \leq T} |Z_t^\varepsilon|$ ограничена сверху случайной величиной $C \sup_{|v| \leq C} |\varepsilon^{1-2\kappa} \int_0^{v/\varepsilon} \theta(s) ds|$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} |Z_t^\varepsilon| \geq \eta, \Omega \setminus \Upsilon_C^\varepsilon \right) &\leq \mathbf{P} \left(\sup_{|v| \leq C} \left| \varepsilon^{1-2\kappa} \int_0^{v/\varepsilon} \theta(s) ds \right| \geq \eta, \Omega \setminus \Upsilon_C^\varepsilon \right) \\ &\leq \mathbf{P} \left(\sup_{|v| \leq C} \left| \varepsilon^{1-2\kappa} \int_0^{v/\varepsilon} \theta(s) ds \right| \geq \eta \right) \end{aligned}$$

и, значит, (5.4) имеет место при условии, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{|v| \leq C} \left| \varepsilon^{1-2\kappa} \int_0^{v/\varepsilon} \theta(s) ds \right| \geq \eta \right) = -\infty. \quad (5.5)$$

Для $Z_t^\varepsilon := \varepsilon^{1-2\kappa} \int_0^t \int_0^{X_v^\varepsilon/\varepsilon} \theta(s) ds b(X_v^\varepsilon/\varepsilon) dv$ и $Z_t^\varepsilon := \varepsilon^{2(1-\kappa)} \int_0^{x_0/\varepsilon} \int_0^v \theta(s) ds dv$ условие (5.5) также влечет за собой (5.4).

Напомним, что $\theta(s)$ — стационарный процесс в узком смысле и, значит, распределения случайных величин

$$\sup_{0 \leq v \leq C} \left| \int_0^{v/\varepsilon} \theta(s) ds \right| \quad \text{и} \quad \sup_{0 \leq v \leq C} \left| \int_{-v/\varepsilon}^0 \theta(s) ds \right|$$

совпадают. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\sup_{|v| \leq C} \left| \varepsilon^{1-2\kappa} \int_0^{v/\varepsilon} \theta(s) ds \right| \geq \eta \right) &\leq 2 \left[\mathbf{P} \left(\sup_{0 \leq v \leq C} \left| \varepsilon^{1-2\kappa} \int_0^{v/\varepsilon} \theta(s) ds \right| \geq \frac{\eta}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. \vee \mathbf{P} \left(\sup_{0 \leq v \leq C} \left| \varepsilon^{1-2\kappa} \int_{-v/\varepsilon}^0 \theta(s) ds \right| \geq \frac{\eta}{2} \right) \right] \\ &= 2\mathbf{P} \left(\sup_{0 \leq v \leq C} \left| \varepsilon^{1-2\kappa} \int_0^{v/\varepsilon} \theta(s) ds \right| \geq \frac{\eta}{2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, доказательство (5.5) можно заменить доказательством

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{0 < v \leq C} \left| \varepsilon^{1-2\kappa} \int_0^{v/\varepsilon} \theta(s) ds \right| \geq \frac{\eta}{2} \right) = -\infty. \quad (5.6)$$

Использование $\theta(s) = \Psi(\sigma(s))$, $\mathbf{E}\theta(s) = 0$ и леммы 4.1 обеспечивает разложение Пуассона

$$\varepsilon^{1-2\kappa} \int_0^{v/\varepsilon} \theta(s) ds = \varepsilon^{1-2\kappa} [V_{v/\varepsilon} - V_0] + \varepsilon^{1-2\kappa} M_{v/\varepsilon},$$

где V_t — ограниченный процесс, а M_t — чисто разрывный мартингал с ограниченными скачками $|\Delta M_s| \leq l$ и $\langle M \rangle_v \leq lv$. Поэтому достаточно доказать, что для любого $\eta > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{0 < v \leq C} |\varepsilon^{1-2\kappa} M_{v/\varepsilon}| \geq \eta \right) = -\infty. \quad (5.7)$$

В соответствии с (4.5) и $\mathbf{P}(\langle \varepsilon^{1-2\kappa} M \rangle_{C/\varepsilon} \leq lC\varepsilon^{1-4\kappa}) = 1$, для $\kappa < \frac{1}{4}$ имеет место следующая оценка:

$$\mathbf{P} \left(\sup_{0 \leq v \leq C} |\varepsilon^{1-2\kappa} M_{v/\varepsilon}| \geq \eta \right) \leq 2 \exp \left(- \frac{\eta^2}{2(l\eta\varepsilon^{1-2\kappa} + lC\varepsilon^{1-4\kappa})} \right).$$

Отсюда для $\kappa < \frac{1}{6}$ получаем неравенство

$$\varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{0 \leq v \leq C} |\varepsilon^{1-2\kappa} M_{v/\varepsilon}| \geq \eta \right) \leq \varepsilon^{2\kappa} \ln 2 - \frac{\eta^2}{\varepsilon^{1-6\kappa} 2l(\eta\varepsilon^2 + C)},$$

т.е. (5.7) выполняется.

Итак, нам осталось проверить (5.2) для $Z_t^\varepsilon := \varepsilon^{1-\kappa} \int_0^t \int_0^{X_v^\varepsilon/\varepsilon} \theta(s) ds \times \sigma(X_v^\varepsilon/\varepsilon) dB_v$. Заметим, что Z_t^ε — непрерывный мартингал с $\langle Z^\varepsilon \rangle_t = \varepsilon^{2(1-\kappa)} \int_0^t (\int_0^{X_v^\varepsilon/\varepsilon} \theta(s) ds)^2 \sigma^2(X_v^\varepsilon/\varepsilon) dv$. Ввиду $\sigma^2(u) \leq l$ имеет место оценка

$$\langle Z^\varepsilon \rangle_T \leq Tl \sup_{|v| \leq C} \left(\varepsilon^{1-\kappa} \int_0^{v/\varepsilon} \theta(s) ds \right)^2 \quad \text{на множестве } \Omega \setminus \Upsilon_C^\varepsilon.$$

Для $r > 0$ пишем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} |Z_t^\varepsilon| > \eta, \Omega \setminus \Upsilon_C^\varepsilon \right) \\ & \leq \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} |Z_t^\varepsilon| > \eta, \langle Z^\varepsilon \rangle_T \leq Tl \sup_{|v| \leq C} \left| \varepsilon^{1-\kappa} \int_0^{v/\varepsilon} \theta(s) ds \right|^2 \right) \\ & \leq 2 \left\{ \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} |Z_t^\varepsilon| > \eta, \langle Z^\varepsilon \rangle_T \leq 2lr^2 \varepsilon^{2\kappa} \right) \right. \\ & \quad \left. \vee 2\mathbf{P} \left(\sup_{0 \leq v \leq C} \left| \varepsilon^{1-\kappa} \int_0^{v/\varepsilon} \theta(s) ds \right| > r\varepsilon^\kappa \right) \right\} \\ & \leq 4 \exp \left(\frac{-\eta^2}{4lr^2 \varepsilon^{2\kappa}} \right) \vee 4\mathbf{P} \left(\sup_{0 \leq v \leq C} \left| \varepsilon^{1-2\kappa} \int_0^{v/\varepsilon} \theta(s) ds \right| > r \right). \quad (5.8) \end{aligned}$$

В силу произвольности r , участвующего в (5.8), получаем

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} |Z_t^\varepsilon| > \eta, \Omega \setminus \Upsilon_C^\varepsilon \right) \\ & \leq \varepsilon^{2\kappa} \ln 4 - \frac{\eta^2}{4lr^2} \vee \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{0 < v \leq C} \left| \varepsilon^{1-2\kappa} \int_0^{v/\varepsilon} \theta(s) ds \right| > r \right) \\ & = -\frac{\eta^2}{4lr^2} \xrightarrow{r \rightarrow 0} -\infty, \end{aligned}$$

где последнее равенство выполнено в силу (5.6).

Проверка второго условия в (1.4) производится аналогичным образом. Мы вводим стационарный процесс $\theta(t) = 1 - \mathbf{a}/\sigma^2(t)$, где константа $\mathbf{a}$ выбрана такой, чтобы $\mathbf{E} \theta(t) = 0$, т.е. $\mathbf{a} = 1/\sum_{i=1}^m (\pi_i/a_i^2)$. Положим $H(x) = \int_0^x \int_0^v \theta(s) ds dv$. В соответствии с версией Крылова формулы Ито (см. [8]) получаем

$$H\left(\frac{X_t^\varepsilon}{\varepsilon}\right) = H\left(\frac{x_0}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \int_0^{X_v^\varepsilon/\varepsilon} \theta(s) ds dX_v^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^{2(1-\kappa)}} \int_0^t \left[\sigma^2\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) - \mathbf{a} \right] ds.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left[\sigma^2\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) - \mathbf{a} \right] ds = \varepsilon^{2(1-\kappa)} \int_0^{X_t^\varepsilon/\varepsilon} \int_0^v \theta(s) ds dv \\ & \quad - \varepsilon^{2(1-\kappa)} \int_0^{x_0/\varepsilon} \int_0^v \theta(s) ds dv - \varepsilon^{1-2\kappa} \int_0^t \int_0^{X_v^\varepsilon/\varepsilon} \theta(s) ds b\left(\frac{X_v^\varepsilon}{\varepsilon}\right) dv \end{aligned}$$

$$- \varepsilon^{1-\kappa} \int_0^t \int_0^{X_v^\varepsilon/\varepsilon} \theta(s) ds \sigma\left(\frac{X_v^\varepsilon}{\varepsilon}\right) dB_v.$$

Остальная часть доказательства опускается, поскольку она полностью повторяет предшествующее доказательство.

6. Почему периодическая и случайная среды имеют разные режимы умеренных уклонений? Принцип умеренных уклонений в периодической и случайной средах неодинаков, в частности, для интервалов

$$\underbrace{\kappa \in \left(0, \frac{1}{2}\right)}_{\text{период. ср.}} \quad \text{и} \quad \underbrace{\kappa \in \left(0, \frac{1}{6}\right)}_{\text{случ. ср.}}.$$

Этот факт объясняется более быстрой гомогенизацией в периодической среде по сравнению со случайной средой. Поясним это наброском доказательства (1.4) в периодической среде.

Обозначим $\theta(s)$ любой из процессов $(b(s) - \mathbf{b})/\sigma^2(s)$ или $1 - \mathbf{a}/\sigma^2(s)$ и выберем $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ такими, чтобы

$$\int_0^1 \theta(s) ds = 0, \quad (6.1)$$

т.е.

$$\mathbf{b} = \int_0^1 \frac{b(s) ds}{\sigma^2(s)} / \int_0^1 \frac{ds}{\sigma^2(s)} \quad \text{и} \quad \mathbf{a} = 1 / \int_0^1 \frac{1}{\sigma^2(s)} ds.$$

Положим $H(x) = \int_0^x \int_0^v \theta(s) ds dv$. По формуле Ито, примененной к $\varepsilon^{2(1-\kappa)} H(X_t^\varepsilon/\varepsilon)$, находим, что

$$\begin{aligned} \int_0^t \left[b\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) - \mathbf{b} \right] ds &= \int_0^t \left[\sigma^2\left(\frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right) - \mathbf{a} \right] ds \\ &= \varepsilon^{2(1-\kappa)} \int_0^{X_t^\varepsilon/\varepsilon} \int_0^v \theta(s) ds dv \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$- \varepsilon^{2(1-\kappa)} \int_0^{x_0/\varepsilon} \int_0^v \theta(s) ds dv \quad (6.3)$$

$$- \varepsilon^{1-2\kappa} \int_0^t \int_0^{X_v^\varepsilon/\varepsilon} \theta(s) ds b\left(\frac{X_v^\varepsilon}{\varepsilon}\right) dv \quad (6.4)$$

$$- \varepsilon^{1-\kappa} \int_0^t \int_0^{X_v^\varepsilon/\varepsilon} \theta(s) ds \sigma\left(\frac{X_v^\varepsilon}{\varepsilon}\right) dB_v.$$

Поскольку $\theta(s)$ — периодическая функция, (6.1) обеспечивает равномерную по $t \geq 0$ ограниченность величины $|\int_0^t \theta(s) ds|$. Это и есть основная причина быстрой гомогенизации. А именно, имеют место следующие оценки для величин, участвующих в (6.2), (6.3) и (6.4) (здесь l — произвольная положительная константа):

$$\varepsilon^{2(1-\kappa)} \left| \int_0^{X_t^\varepsilon/\varepsilon} \int_0^v \theta(s) ds dv \right| \leq l \varepsilon^{1-2\kappa} \sup_{t \leq T} |X_t^\varepsilon|,$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{2(1-\kappa)} \left| \int_0^{x_0/\varepsilon} \int_0^v \theta(s) ds dv \right| &\leq l \varepsilon^{1-2\kappa} |x_0|, \\ \varepsilon^{1-2\kappa} \left| \int_0^t \int_0^{X_v^\varepsilon/\varepsilon} \theta(s) ds b(X_v^\varepsilon/\varepsilon) dv \right| &\leq l \varepsilon^{1-2\kappa}. \end{aligned}$$

Вторая и третья оценки детерминированные. Поэтому две последние случайные величины являются экспоненциально плотными (с интенсивностью $\varepsilon^{2\kappa}$) для любого $\kappa > 0$. Поскольку b и σ ограничены, то, в силу неравенства (4.4),

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} |X_t^\varepsilon| > C \right) = -\infty$$

и, значит, первая оценка также экспоненциально плотна (с интенсивностью $\varepsilon^{2\kappa}$) для любого $\kappa > 0$.

Ограничение на κ вызвано требуемой экспоненциальной пренебрежимостью (с интенсивностью $\varepsilon^{2\kappa}$) непрерывного мартингала

$$Z_t^\varepsilon := \varepsilon^{1-\kappa} \int_0^t \int_0^{X_v^\varepsilon/\varepsilon} \theta(s) ds \sigma(X_v^\varepsilon/\varepsilon) dB_v.$$

Так как $\langle Z^\varepsilon \rangle_t = \varepsilon^{2(1-\kappa)} \int_0^t (\int_0^{X_v^\varepsilon/\varepsilon} \theta(s) ds)^2 \sigma^2(X_v^\varepsilon/\varepsilon) dv$ и $|\int_0^t \theta(s) ds|$ равномерно ограничена по t (!), то $\langle Z^\varepsilon \rangle_T \leq \varepsilon^{2(1-\kappa)} l$. Поэтому, в силу леммы 4.1,

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} |Z_t^\varepsilon| > \eta \right) = \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} |Z_t^\varepsilon| > \eta, \langle Z^\varepsilon \rangle_T \leq \varepsilon^{2(1-\kappa)} l \right) \leq 2 \exp \left(-\frac{\eta^2}{2l \varepsilon^{2(1-\kappa)}} \right)$$

и, следовательно, только при $\kappa < \frac{1}{2}$ имеет место требуемое соотношение:

$$\varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} |Z_t^\varepsilon| > \eta \right) \leq \varepsilon^{2\kappa} \ln 2 - \frac{\eta^2}{2l \varepsilon^{2(1-2\kappa)}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\infty.$$

Приложение А. Принцип больших уклонений. Использование (1.4) существенно упрощает доказательство теоремы 3.1. Мы подчеркивали ранее, что импликация

$$(1.4) \Rightarrow \text{утверждение теоремы 3.1} \quad (\text{A.1})$$

(см. [14, следствие 4.3.8], а также [13, следствие 6.7]) применима не только в нашем случае, но и для разнообразных классов семимартингалов.

Для удобства читателя мы показываем, как можно доказать (A.1) в нашем случае.

Пусть $X^\varepsilon = (X_t^\varepsilon)_{t \leq T}$ — непрерывный семимартингал, определенный на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}^\varepsilon = (\mathcal{F}_t^\varepsilon)_{t \leq T}, \mathbf{P})$, удовлетворяющим стандартным условиям:

$$X_t^\varepsilon = x_0 + \int_0^t b_s^\varepsilon ds + \varepsilon^\kappa \int_0^t \alpha_s^\varepsilon dB_s,$$

где B_t — броуновское движение, b_t^ε и α_t^ε являются $\mathbf{F}^\varepsilon$ -согласованными случайными процессами с $\int_0^T |b_t^\varepsilon| dt < \infty$ и $\int_0^T (\alpha_s^\varepsilon)^2 dt < \infty$ п.н., ε — малый параметр и κ — положительное число.

Теорема А.1. Пусть $0 < c_1 \leq |\alpha_s^\varepsilon|^2 \leq c_2$, $|\beta_s^\varepsilon| \leq c_3$ и существуют константы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a} > 0$ такие, что для любого $\eta > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t [b_s^\varepsilon - \mathbf{b}] ds \right| > \eta \right) = -\infty, \quad (\text{A.2})$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t [(\alpha_s^\varepsilon)^2 - \mathbf{a}] ds \right| > \eta \right) = -\infty. \quad (\text{A.3})$$

Тогда семейство $\{X^\varepsilon\}_{\varepsilon \rightarrow 0}$ допускает принцип больших уклонений в метрическом пространстве $(\mathbf{C}_{[0,T]}, \varrho)$ с параметром $\varepsilon^{2\kappa}$ и функционалом действия

$$J(u) = \begin{cases} \frac{1}{2\mathbf{a}} \int_0^T (\dot{u}_t - \mathbf{b})^2 dt, & u_0 = x_0, \quad du_t = \dot{u}_t dt, \quad \int_0^T \dot{u}_t^2 dt < \infty, \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство этой теоремы использует стандартную импликацию (см., например, [10]):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Экспоненциальная плотность} \\ \text{Локальный принцип больших уклонений} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Принцип больших уклонений.}$$

Для проверки экспоненциальной плотности и локального принципа больших уклонений удобно использовать момент остановки

$$\tau_{\varepsilon, \zeta} = \inf \left\{ t \leq T: \left| \int_0^t [b_s^\varepsilon - \mathbf{b}] ds \right| + \left| \int_0^t [(\alpha_s^\varepsilon)^2 - \mathbf{a}] ds \right| > \zeta \right\}.$$

Заметим, что (А.2) и (А.3) влекут за собой $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P}(\tau_{\varepsilon, \zeta} < \infty) = -\infty$ и, следовательно, для любого измеримого множества $\mathfrak{B}$

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P}(\mathfrak{B}) \leq \overline{\lim}_{\zeta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P}(\mathfrak{B} \cap \{\tau_{\varepsilon, \zeta} = \infty\}). \quad (\text{A.4})$$

А.1. Экспоненциальная плотность. Следуя [10], мы будем доказывать, что

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} |X_t^\varepsilon| > C \right) = -\infty, \quad (\text{A.5})$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \sup_{\theta < T} \mathbf{P} \left(\sup_{0 < t \leq \delta} |X_{\theta+t}^\varepsilon - X_\theta^\varepsilon| > \eta \right) = -\infty \quad \text{для всех } \eta > 0, \quad (\text{A.6})$$

где θ является $\mathbf{F}^\varepsilon$ -моментом остановки.

А.1.1. Доказательство (А.5). Пусть $\mathfrak{B} := \{\sup_{t \leq T} |X_t^\varepsilon| > C\}$. В силу (А.4) достаточно доказать, что $\lim_{C \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P}(\sup_{t \leq T} |X_t^\varepsilon| >$

$C, \tau_{\varepsilon, \zeta} = \infty) = -\infty$. С этой целью введем случайную величину $|x_0| + |\mathbf{b}|T + \zeta + \sup_{t \leq T} |\varepsilon^\kappa \int_0^{t \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \alpha_s^\varepsilon dB_s|$, являющуюся верхней оценкой $\sup_{t \leq T} |X_t^\varepsilon|$ на множестве $\{\tau_{\varepsilon, \zeta} = \infty\}$, и, тем самым, сведем доказательство к проверке соотношения

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} \left| \varepsilon^\kappa \int_0^{t \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \alpha_s^\varepsilon dB_s \right| > C, \tau_{\varepsilon, \zeta} = \infty \right) = -\infty.$$

Применяя (4.4) к $M_t = \varepsilon^\kappa \int_0^{t \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \alpha_s^\varepsilon dB_s$ и принимая во внимание неравенство $\langle M \rangle_T = \varepsilon^{2\kappa} \int_0^{T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} (\alpha_s^\varepsilon)^2 ds \leq \varepsilon^{2\kappa} [\mathbf{a}T + \zeta]$, получаем верхнюю границу $\mathbf{P}(\sup_{t \leq T} |M_t| > C) \leq 2 \exp(-C^2/(2\varepsilon^{2\kappa}(\mathbf{a}T + \zeta)))$, которая дает (A.5).

A.1.2. Доказательство (A.6). Мы используем здесь тот же самый процесс M_t . Пусть $\mathbf{F}^{\varepsilon, \theta} = (\mathcal{F}_{\theta+t}^\varepsilon)_{t \geq 0}$. Обозначим $N_t^\theta := M_{\theta+t} - M_\theta$. Случайный процесс N_t^θ является $\mathbf{F}^{\varepsilon, \theta}$ -мартингалом с $\langle N^\theta \rangle_t = \varepsilon^{2\kappa} \int_\theta^{\theta+t} (\alpha_s^\varepsilon)^2 ds$. Введем $L_t^\varepsilon := \int_\theta^{\theta+t} b_s^\varepsilon ds + N_t^\theta$ и заметим, что (A.6) эквивалентно условию

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \sup_{\theta < T} \mathbf{P} \left(\sup_{0 < t \leq \delta} |L_t^\varepsilon| > \eta \right) = -\infty.$$

Тогда, в силу (A.4), достаточно доказать, что

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \sup_{\theta < T} \mathbf{P} \left(\sup_{0 < t \leq \delta} |L_t^\varepsilon| > \eta, \tau_{\varepsilon, \zeta} = \infty \right) = -\infty.$$

Мы проверим это с помощью более сильного условия:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \sup_{\theta < T} \mathbf{P} \left(\sup_{0 < t \leq \delta \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} |L_t^\varepsilon| > \eta \right) = -\infty. \quad (\text{A.7})$$

Поскольку $\sup_{0 < t \leq \delta} |L_t^\varepsilon| \leq \delta|\mathbf{b}| + \zeta + \sup_{0 < t \leq \delta} |N_{t \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}}^\theta|$, для фиксированного η мы выбираем достаточно малые δ и ζ такие, что $\delta|\mathbf{b}| + \zeta < \eta$. При таком выборе вместо (A.7) достаточно доказать

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \sup_{\theta < T} \mathbf{P} \left(\sup_{0 < t \leq \delta \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} |N_t^\theta| > \eta - \delta|\mathbf{b}| - \zeta \right) = -\infty.$$

Далее, поскольку $\langle N^\theta \rangle_{\delta \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} = \varepsilon^{2\kappa} \int_{\theta \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}}^{\theta + \delta \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} (\alpha_s^\varepsilon)^2 ds \leq \varepsilon^{2\kappa} [\delta \mathbf{a} + \zeta]$, то, применяя (4.4) к $N_{t \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}}^\theta = \varepsilon^\kappa \int_0^{t \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \alpha_s^\varepsilon dB_s$, мы получаем следующую верхнюю оценку:

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \leq \delta \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} |N_t^\theta| > \eta - \delta|\mathbf{b}| - \zeta \right) \leq 2 \exp \left(- \frac{(\eta - \delta|\mathbf{b}| - \zeta)^2}{2\varepsilon^{2\kappa}(\delta \mathbf{a} + \zeta)} \right),$$

которая гарантирует (A.6).

А.2. Локальный принцип больших уклонений. Мы используем хорошо известный факт, что для экспоненциально плотного семейства $\{(X_t^\varepsilon)_{t \leq T}\}_{\varepsilon \rightarrow 0}$ условия

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} |X_t^\varepsilon - u_t| \leq \delta \right) \leq -J(u), \quad (\text{A.8})$$

$$\underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} |X_t^\varepsilon - u_t| \leq \delta \right) \geq -J(u) \quad (\text{A.9})$$

определяют функционал действия $J(u)$, $u \in \mathbf{C}_{[0,T]}$.

Поскольку $J(u) \in [0, \infty]$, мы вычисляем значения $J(u)$ для $u \in \mathfrak{U}_1$ и $\mathfrak{U}_2$, где

$$\mathfrak{U}_1 = \{u \in \mathbf{C}_{[0,T]} : J(u) < \infty\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{U}_2 = \{u \in \mathbf{C}_{[0,T]} : J(u) = \infty\}.$$

А.2.1. Верхняя оценка для $u \in \mathfrak{U}_1$.

Лемма А.1. Неравенство (А.8) имеет место с $J(u) = (2\mathbf{a})^{-1} \times \int_0^T (\dot{u}_t - \mathbf{b})^2 dt$ для любого

$$u \in \left\{ u_0 = x_0, du_t = \dot{u}_t dt, \int_0^T \dot{u}_t^2 dt < \infty \right\} =: \mathfrak{U}_1.$$

Доказательство. Введем множество $\mathfrak{B}_\delta = \{\sup_{t \leq T} |X_t^\varepsilon - u_t| \leq \delta\}$. Принимая во внимание (А.4), достаточно показать, что

$$\overline{\lim}_{\zeta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P}(\mathfrak{B}_\delta \cap \{\tau_{\varepsilon, \zeta} = \infty\}) \leq -\frac{1}{2\mathbf{a}} \int_0^T (\dot{u}_t - \mathbf{b})^2 dt.$$

Для этого используется экспоненциальный мартингал

$$\mathfrak{z}_t = \exp \left(\frac{1}{\varepsilon^{2\kappa}} \left[\int_0^t \lambda(s) [dX_s^\varepsilon - b_s^\varepsilon ds] - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2(s) (a_s^\varepsilon)^2 ds \right] \right), \quad t \leq T,$$

в котором $\lambda(s)$ — непрерывно дифференцируемая функция. Интегрируя по частям с помощью формулы Ито, получаем (здесь и далее $\dot{\lambda}(s)$ — производная $\lambda(s)$)

$$\int_0^T \lambda(s) dX_s^\varepsilon = \lambda(T) X_T^\varepsilon - \lambda(0) x_0 - \int_0^T X_s^\varepsilon \dot{\lambda}(s) ds$$

и записываем формулу для $\ln \mathfrak{z}_t$ в следующем виде:

$$\ln \mathfrak{z}_T = \frac{1}{\varepsilon^{2\kappa}} \left[\lambda(T) X_T^\varepsilon - \lambda(0) x_0 - \int_0^T X_s^\varepsilon \dot{\lambda}(s) ds - \int_0^T \left(\lambda(s) b_s^\varepsilon + \frac{\lambda^2(s)}{2} (a_s^\varepsilon)^2 \right) ds \right].$$

Далее пишем

$$\lambda(T) X_T^\varepsilon - \lambda(0) x_0 - \int_0^T X_s^\varepsilon \dot{\lambda}(s) ds - \int_0^T \left(\lambda(s) b_s^\varepsilon + \frac{\lambda^2(s)}{2} (a_s^\varepsilon)^2 \right) ds$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda(T)u_T - \lambda(0)u_0 - \int_0^T u_s \dot{\lambda}(s) ds - \int_0^T \left(\lambda(s)\mathbf{b} + \frac{\lambda^2(s)}{2} \mathbf{a} \right) ds \\
&\quad + \lambda(T)[X_t^\varepsilon - u_T] - \int_0^T [X_s^\varepsilon - u_s] \dot{\lambda}(s) ds \\
&\quad - \int_0^T \left(\lambda(s)[b_s^\varepsilon - \mathbf{b}] + \frac{\lambda^2(s)}{2} [(a_s^\varepsilon)^2 - \mathbf{a}] \right) ds. \tag{A.10}
\end{aligned}$$

Интегрируя по частям, находим, что

$$\begin{aligned}
\int_0^T \lambda(s)[b_s^\varepsilon - \mathbf{b}] ds &= \lambda(T) \int_0^T [b_s^\varepsilon - \mathbf{b}] ds - \int_0^T \dot{\lambda}(s) \int_0^s [b_{s'}^\varepsilon - \mathbf{b}] ds' ds, \\
\int_0^T \frac{\lambda^2(s)}{2} [(a_s^\varepsilon)^2 - \mathbf{a}] ds &= \frac{\lambda^2(T)}{2} \int_0^T [(a_s^\varepsilon)^2 - \mathbf{a}] ds \\
&\quad - \int_0^T \lambda(s) \dot{\lambda}(s) \int_0^s [(a_{s'}^\varepsilon)^2 - \mathbf{a}] ds' ds,
\end{aligned}$$

и переписываем (A.10) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\lambda(T)X_T^\varepsilon - \lambda(0)x_0 - \int_0^T X_s^\varepsilon \dot{\lambda}(s) ds - \int_0^T \left(\lambda(s)b_s^\varepsilon + \frac{\lambda^2(s)}{2} (a_s^\varepsilon)^2 \right) ds \\
&= \lambda(T)u_T - \lambda(0)u_0 - \int_0^T u_s \dot{\lambda}(s) ds - \int_0^T \left(\lambda(s)\mathbf{b} + \frac{\lambda^2(s)}{2} \mathbf{a} \right) ds \\
&\quad + \lambda(T)[X_t^\varepsilon - u_T] - \int_0^T [X_s^\varepsilon - u_s] \dot{\lambda}(s) ds \\
&\quad - \lambda(T) \int_0^T [b_s^\varepsilon - \mathbf{b}] ds + \int_0^T \dot{\lambda}(s) \int_0^s [b_{s'}^\varepsilon - \mathbf{b}] ds' ds \\
&\quad - \frac{\lambda^2(T)}{2} \int_0^T [(a_s^\varepsilon)^2 - \mathbf{a}] ds + \int_0^T \lambda(s) \dot{\lambda}(s) \int_0^s [(a_{s'}^\varepsilon)^2 - \mathbf{a}] ds' ds.
\end{aligned}$$

Правая часть этого тождества оценивается снизу на множестве $\mathfrak{B}_\delta \cap \{\tau_{\varepsilon, \zeta} = \infty\}$ величиной

$$\begin{aligned}
&\lambda(T)u_T - \lambda(0)u_0 - \int_0^T u_s \dot{\lambda}(s) ds - \int_0^T \left(\lambda(s)\mathbf{b} + \frac{\lambda^2(s)}{2} \mathbf{a} \right) ds \\
&\quad - \delta \left(|\lambda(T)| + \int_0^T |\dot{\lambda}(s)| ds \right) \\
&\quad - \zeta \left(|\lambda(T)| + \int_0^T |\dot{\lambda}(s)| ds + \frac{\lambda^2(T)}{2} + \int_0^T |\lambda(s)\dot{\lambda}(s)| ds \right).
\end{aligned}$$

Положим $l_1 = |\lambda(T)| + \int_0^T |\dot{\lambda}(s)| ds + \lambda^2(T)/2 + \int_0^T |\lambda(s)\dot{\lambda}(s)| ds$. Тогда, учитывая тождество $\lambda(T)u_T - \lambda(0)u_0 - \int_0^T u_s \dot{\lambda}(s) ds = \int_0^T \lambda(s) \dot{u}_t dt$, легко вывести следующую нижнюю оценку для $\mathfrak{J}_T$:

$$\mathfrak{J}_* = \exp \left(\frac{1}{\varepsilon^{2\kappa}} \left[\int_0^T \left[\lambda(s)(\dot{u}_s - \mathbf{b}) - \frac{\lambda^2(s)}{2} \right] ds - l_1(\delta + \zeta) \right] \right). \tag{A.11}$$

Экспоненциальный мартингал $\mathfrak{z}_t$, будучи положительным локальным мартингалом, является также супермартингалом. Поэтому $\mathbf{E} \mathfrak{z}_T \leq 1$. Эта оценка влечет за собой очевидную оценку: $\mathbf{E} I_{\{\mathfrak{B}_\delta \cap \{\tau_{\varepsilon, \zeta} = \infty\}\}} \mathfrak{z}_* \leq 1$. Вместе с (A.11) последняя оценка гарантирует

$$\overline{\lim}_{\zeta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P}(\mathfrak{B}_\delta \cap \{\tau_{\varepsilon, \zeta} = \infty\}) \leq - \int_0^T \left\{ \lambda(s) [\dot{u}_s - \mathbf{b}] - \frac{\lambda^2(s)}{2} \mathbf{a} \right\} ds. \quad (\text{A.12})$$

Напомним, что соотношение (A.12) выведено при условии, что $\lambda(s)$ — непрерывно дифференцируемая функция. Предположим, что $\dot{u}_s$ — также непрерывно дифференцируемая функция. Тогда, выбирая $\lambda(s) \equiv (\dot{u}_s - \mathbf{b})/\mathbf{a}$, получаем требуемый результат. В общем случае $\dot{u}_t$, являясь лишь плотностью u_t относительно dt , не обязана быть непрерывно дифференцируемой. В этом случае, поскольку $\int_0^T ((\dot{u}_s - \mathbf{b})/\mathbf{a})^2 ds < \infty$, функцию $\lambda(s) \equiv (\dot{u}_s - \mathbf{b})/\mathbf{a}$ можно аппроксимировать непрерывно дифференцируемыми функциями $\lambda_m(s)$, $m \geq 1$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \left(\lambda_m(s) - \frac{\dot{u}_s - \mathbf{b}}{\mathbf{a}} \right)^2 ds = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} - \int_0^T \left\{ \lambda_m(s) [\dot{u}_s - \mathbf{b}] - \frac{\lambda_m^2(s)}{2} \mathbf{a} \right\} ds &= - \int_0^T \frac{(\dot{u}_s - \mathbf{b})^2}{2\mathbf{a}} ds \\ &+ \frac{\mathbf{a}}{2} \int_0^T \left(\lambda_m(s) - \frac{\dot{u}_s - \mathbf{b}}{\mathbf{a}} \right)^2 ds \xrightarrow{m \rightarrow \infty} - \int_0^T \frac{(\dot{u}_s - \mathbf{b})^2}{2\mathbf{a}} ds. \end{aligned}$$

A.2.2. Верхняя оценка для $u \in \mathfrak{U}_2$. Принимая во внимание, что $\mathfrak{U}_2 = \mathbf{C}_{[0, T]} \setminus \mathfrak{U}_1$, достаточно установить верхние оценки в (A.8) при условиях:

- (c.1) $u_0 = x_0$, $du_t \ll dt$, $\int_0^T \dot{u}^2 dt = \infty$,
- (c.2) $u_0 = x_0$, $du_t \not\ll dt$,
- (c.3) $u_0 \neq x_0$.

Лемма A.2. Для любых u , удовлетворяющих условиям (c.1), (c.2) и (c.3), верхняя оценка в (A.8) имеет место с $J(u) = \infty$.

Доказательство. (c.1) В силу (A.12) и (A.4) для любой непрерывно дифференцируемой функции $\lambda(s)$ получаем

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P}(\mathfrak{B}_\delta) \leq - \int_0^T \left\{ \lambda(s) [\dot{u}_s - \mathbf{b}] - \frac{\lambda^2(s)}{2} \mathbf{a} \right\} ds. \quad (\text{A.13})$$

При каждом n выбираем $\lambda_n(s) = ((\dot{u}_s - \mathbf{b})/\mathbf{a}) I_{\{|\dot{u}_s| \leq n\}}$, а также последовательность непрерывно дифференцируемых функций, аппроксимирующих $\lambda_n(s)$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T [\lambda_n(s) - \lambda_{m,n}(s)]^2 ds = 0.$$

Для каждой функции $\lambda_{m,n}(s)$ неравенство (A.13) превращается в

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P}(\mathfrak{B}_\delta) \leq - \int_0^T \left\{ \lambda_{m,n}(s)[\dot{u}_s - \mathbf{b}] - \frac{\lambda_{m,n}^2(s)}{2} \mathbf{a} \right\} ds. \quad (\text{A.14})$$

Правая часть (A.14) стремится к $-\int_0^T \{\lambda_n(s)[\dot{u}_s - \mathbf{b}] - \lambda_n^2(s)\mathbf{a}/2\} ds$ при $m \rightarrow \infty$, где $-\int_0^T \{\lambda_n(s)[\dot{u}_s - \mathbf{b}] - \lambda_n^2(s)\mathbf{a}/2\} ds = -(\mathbf{2a})^{-1} \int_0^T (\dot{u}_s - \mathbf{b})^2 I_{\{|\dot{u}_s| \leq n\}} ds$. Следовательно,

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P}(\mathfrak{B}_\delta) \leq - \frac{1}{2\mathbf{a}} \int_0^T (\dot{u}_s - \mathbf{b})^2 I_{\{|\dot{u}_s| \leq n\}} ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty.$$

(с.2) Принимая во внимание, что $du_t \ll dt$, выберем последовательности $[s_i^n, t_i^n]$, $i = 1, \dots, n$, непересекающихся интервалов из отрезка $[0, T]$ такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{|u_{t_i^n} - u_{s_i^n}|^2}{t_i^n - s_i^n} = \infty. \quad (\text{A.15})$$

Согласно неравенству Коши–Шварца–Буняковского, имеем

$$\left(\sum_{i=1}^n |u_{t_i^n} - u_{s_i^n}| \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n [t_i^n - s_i^n] \cdot \sum_{i=1}^n \frac{|u_{t_i^n} - u_{s_i^n}|^2}{t_i^n - s_i^n}. \quad (\text{A.16})$$

Далее, для любой положительной малой величины γ можно выбрать такие интервалы $[s_i, t_i]$, $i = 1, \dots, n$, что $\sum_{i=1}^n [t_i^n - s_i^n] \leq \gamma$ для любого $n \geq n_\gamma$, где n_γ — некоторое число, зависящее от γ , и в то же самое время $\sum_{i=1}^n |u_{t_i^n} - u_{s_i^n}| \geq D > 0$. Теперь (A.16) влечет за собой неравенство $D^2/\gamma \leq \sum_{i=1}^n |u_{t_i^n} - u_{s_i^n}|^2 / (t_i^n - s_i^n)$. Следовательно, (A.15) выполнено, поскольку D остается положительным при $\gamma \rightarrow 0$.

Мы докажем теперь, что

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{\zeta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \mathbf{P}(\mathfrak{B}_\delta \cap \{\tau_{\varepsilon, \zeta} = \infty\}) \\ & \leq - \frac{1}{2\mathbf{a}} \left\{ \mathbf{b}^2 T - 2\mathbf{b}(u_T - u_0) + \sum_{i=1}^n \frac{[u_{t_i^n} - u_{s_i^n}]^2}{t_i^n - s_i^n} \right\}, \end{aligned}$$

и применим (A.15).

Выбирая $\lambda(t) = \sum_i \lambda_i I_{\{s_i^n \leq t < t_i^n\}}$, введем экспоненциальный мартингал

$$\mathfrak{z}_t = \exp \left(\frac{1}{\varepsilon^{2\kappa}} \left[\int_0^t \lambda(s) [dX_s^\varepsilon - b_s^\varepsilon ds] - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2(s) (a_s^\varepsilon)^2 ds \right] \right)$$

и оценим снизу значение $\mathfrak{z}_T$ на множестве $\mathfrak{B}_\delta \cap \{\tau_{\varepsilon, \zeta} = \infty\}$. Пишем

$$\ln \mathfrak{z}_T = \frac{1}{\varepsilon^{2\kappa}} \sum_{i=1}^n \left[\lambda_i [X_{t_i^n}^\varepsilon - X_{s_i^n}^\varepsilon] - \int_{s_i^n}^{t_i^n} \left\{ \lambda_i b_s^\varepsilon + \frac{1}{2} \lambda_i^2 (a_s^\varepsilon)^2 \right\} ds \right]$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{1}{\varepsilon^{2\kappa}} \sum_{i=1}^n \left\{ \lambda_i [u_{t_i^n} - u_{s_i^n}] - \left[\lambda_i \mathbf{b} + \frac{\lambda_i^2}{2} \mathbf{a} \right] (t_i^n - s_i^n) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon^{2\kappa}} \sum_{i=1}^n \left(2|\lambda_i| \delta + \zeta \left[|\lambda_i| + \frac{\lambda_i^2}{2} \right] \right) (t_i^n - s_i^n) := \ln \mathfrak{z}_*. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathbf{E} \mathfrak{z}_T \leq 1$, неравенство $\mathbf{E} I_{\{\mathfrak{B}_\delta \cap \{\tau_{\varepsilon, \zeta} = \infty\}\}} \mathfrak{z}_T \leq 1$ также справедливо и, значит, $\mathbf{E} I_{\{\mathfrak{B}_\delta \cap \{\tau_{\varepsilon, \zeta} = \infty\}\}} \mathfrak{z}_* \leq 1$. Этот результат влечет за собой

$$\begin{aligned} &\overline{\lim}_{\zeta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P}(\mathfrak{B}_\delta \cap \{\tau_{\varepsilon, \zeta} = \infty\}) \\ &\leq - \sum_{i=1}^n \left[\lambda_i ([u_{t_i^n} - u_{s_i^n}] - \mathbf{b}[t_i^n - s_i^n]) - \frac{\lambda_i^2}{2} \mathbf{a}[t_i^n - s_i^n] \right] \end{aligned}$$

и остается только выбрать $\lambda_i = ([u_{t_i^n} - u_{s_i^n}] - \mathbf{b}[t_i^n - s_i^n]) / (\mathbf{a}[t_i^n - s_i^n])$.

(с.3) очевидно.

А.2.3. Нижняя оценка. Верхняя граница для локального принципа больших уклонений равна $-\infty$, если $u \in \mathfrak{U}_2$. Поэтому нижнюю границу надо проверять только для $u \in \mathfrak{U}_1$.

Лемма А.3. Пусть $u \in \mathfrak{U}_1$. Тогда (А.9) имеет место с $J(u) = (2\mathbf{a})^{-1} \int_0^T (\dot{u}_t - \mathbf{b})^2 dt$.

Доказательство. Достаточно установить, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P}(\mathfrak{B}_\delta) \geq -\frac{1}{2\mathbf{a}} \int_0^T [\dot{u}_t - \mathbf{b}]^2 dt \quad (\text{А.17})$$

для любой функции u с непрерывной второй производной $\ddot{u}_t$. Действительно, условие $\int_0^T \dot{u}_t^2 dt < \infty$ позволяет выбрать последовательность функций $u_m(t)$, $u_m(0) \equiv u_0$, с непрерывными вторыми производными $(\ddot{u}_m(t))_{m \geq 1}$ таких, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T (\dot{u}_t - \dot{u}_m(t))^2 dt = 0.$$

Последнее свойство обеспечивает выполнение неравенства

$$\sup_{t \leq T} |u_t - u_m(t)| \leq \left(T \int_0^T [\dot{u}_s - \dot{u}_m(s)]^2 ds \right)^{1/2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Обозначим $\mathfrak{B}_{\delta, m} = \{\sup_{t \leq T} |X_t^\varepsilon - u_m(t)| \leq \delta\}$ и предположим, что нижняя оценка

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P}(\mathfrak{B}_{\delta, m}) \geq -\frac{1}{2\mathbf{a}} \int_0^T [\dot{u}_m(t) - \mathbf{b}]^2 dt$$

имеет место при каждом $m \geq 1$.

Для $\gamma > \delta > 0$ пишем

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_{\delta,m} &\subseteq \left(\mathfrak{B}_{\delta,m} \cap \left\{ \sup_{t \leq T} |u_t - u_m(t)| \leq \gamma \right\} \right) \cup \left\{ \sup_{t \leq T} |u_t - u_m(t)| > \gamma \right\} \\ &\subseteq \left\{ \sup_{t \leq T} |X_t^\varepsilon - u_t| \leq 2\gamma \right\} \cup \left\{ \sup_{t \leq T} |u_t - u_m(t)| > \gamma \right\}.\end{aligned}$$

Поскольку при достаточно больших номерах m множество $\{\sup_{t \leq T} |u_t - u_m(t)| > \gamma\}$ оказывается пустым, имеет место оценка

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} |X_t^\varepsilon - u_t| \leq 2\gamma \right) \geq \mathbf{P} (\mathfrak{B}_{\delta,m})$$

и, значит,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} |X_t^\varepsilon - u_t| \leq 2\gamma \right) &\geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P} (\mathfrak{B}_{\delta,m}) \\ &\geq -\frac{1}{2\mathbf{a}} \int_0^T [\dot{u}_m(t) - \mathbf{b}]^2 dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} -\frac{1}{2\mathbf{a}} \int_0^T [\dot{u}_t - \mathbf{b}]^2 dt,\end{aligned}$$

т.е. остается только перейти к пределу $\lim_{\gamma \rightarrow 0}$ в левой части полученного неравенства.

Мы воспользуемся также тем фактом, что (A.17) с функцией u , обладающей непрерывной $\ddot{u}$, выполняется при условии, что

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T \wedge \tau_{\varepsilon,\zeta}} |X_t^\varepsilon - u_t| \leq \delta \right) \geq -\frac{1}{2\mathbf{a}} \int_0^T [\dot{u}_t - \mathbf{b}]^2 dt. \quad (\text{A.18})$$

Теперь с помощью очевидного включения

$$\begin{aligned}\left\{ \sup_{t \leq T \wedge \tau_{\varepsilon,\zeta}} |X_t^\varepsilon - u_t| \leq \delta \right\} &= \left\{ \sup_{t \leq T} |X_t^\varepsilon - u_t| \leq \delta, \tau_{\varepsilon,\zeta} = \infty \right\} \\ &\cup \left\{ \sup_{t \leq T \wedge \tau_{\varepsilon,\zeta}} |X_t^\varepsilon - u_t| \leq \delta, \tau_{\varepsilon,\zeta} < \infty \right\} \subseteq \left\{ \sup_{t \leq T} |X_t^\varepsilon - u_t| \leq \delta \right\} \cup \{\tau_{\varepsilon,\zeta} < \infty\}\end{aligned}$$

получаем неравенство

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T \wedge \tau_{\varepsilon,\zeta}} |X_t^\varepsilon - u_t| \leq \delta \right) \leq 2 \left[\mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} |X_t^\varepsilon - u_t| \leq \delta \right) \vee \mathbf{P} (\tau_{\varepsilon,\zeta} < \infty) \right],$$

из которого (A.17) следует в силу (A.18) и $\overline{\lim}_{\zeta \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P} (\tau_{\varepsilon,\zeta} < \infty) = -\infty$.

Начиная с этого момента мы остановимся на доказательстве (A.18) для u с непрерывной второй производной. Введем экспоненциальный мартингал $\mathfrak{z}_t = \exp\{M_t - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t\}$, где

$$M_t = \frac{1}{\varepsilon^\kappa} \int_0^{t \wedge \tau_{\varepsilon,\zeta}} \frac{\dot{u}_t - \beta_s^\varepsilon}{\alpha_s^\varepsilon} dB_s \quad \text{и} \quad \langle M \rangle_t = \frac{1}{\varepsilon^{2\kappa}} \int_0^{t \wedge \tau_{\varepsilon,\zeta}} \frac{(\dot{u}_t - \beta_s^\varepsilon)^2}{(\alpha_s^\varepsilon)^2} dt.$$

Напомним, что β_s^ε ограничена сверху, а $(\alpha_s^\varepsilon)^2$ строго положительна. Поэтому ограниченность $\dot{u}_t$ на $[0, T]$ обеспечивает ограниченность $\langle M \rangle_T$.

Отсюда $\mathbf{E} \mathfrak{z}_T = 1$. Положим $d\bar{\mathbf{P}} = \mathfrak{z}_T d\mathbf{P}$. Благодаря тому, что $\mathfrak{z}_T > 0$ $\mathbf{P}$ -п.н., меры $\bar{\mathbf{P}}$ и $\mathbf{P}$ эквивалентны с $d\mathbf{P} = \mathfrak{z}_T^{-1} d\bar{\mathbf{P}}$. Поэтому

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t \leq T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} |X_t^\varepsilon - u_t| \leq \delta\right) = \int_{\{\sup_{t \leq T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} |X_t^\varepsilon - u_t| \leq \delta\}} \mathfrak{z}_T^{-1} d\bar{\mathbf{P}}. \quad (\text{A.19})$$

Покажем сначала, что

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\mathbf{P}}\left(\sup_{t \leq T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} |X_t^\varepsilon - u_t| \leq \delta\right) = 1.$$

По теореме Гирсанова (см., например, [12, теорема 2, § 5, гл. 4]) случайный процесс

$$\bar{B}_t = B_t - \frac{1}{\varepsilon^\kappa} \int_0^{t \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \frac{\dot{u}_s - \beta_s^\varepsilon}{\alpha_s^\varepsilon} ds \quad (\text{A.20})$$

является броуновским движением относительно меры $\bar{\mathbf{P}}$. Оба процесса X_t^ε и $\mathfrak{z}_t$ являются семимартингалами относительно $\bar{\mathbf{P}}$. В частности,

$$X_{t \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}}^\varepsilon = x_0 + \int_0^{t \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \dot{u}_s ds + \varepsilon^\kappa \int_0^{t \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \alpha_s^\varepsilon d\bar{B}_s = u_{t \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} + \varepsilon^\kappa \int_0^{t \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \alpha_s^\varepsilon d\bar{B}_s.$$

Следовательно,

$$\sup_{t \leq T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} |X_t^\varepsilon - u_t| = \sup_{t \leq T} \left| \varepsilon^\kappa \int_0^{t \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \alpha_s^\varepsilon d\bar{B}_s \right|.$$

Теперь с помощью неравенства Дуба получаем

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}\left(\sup_{t \leq T} \left| \varepsilon^\kappa \int_0^{t \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \alpha_s^\varepsilon d\bar{B}_s \right| \leq \delta\right) &= 1 - \bar{\mathbf{P}}\left(\sup_{t \leq T} \left| \varepsilon^\kappa \int_0^{t \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \alpha_s^\varepsilon d\bar{B}_s \right| > \delta\right) \\ &\geq 1 - \frac{4\varepsilon^{2\kappa}}{\delta^2} \bar{\mathbf{E}} \int_0^{T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} (\alpha_s^\varepsilon)^2 ds \geq 1 - \frac{4\varepsilon^{2\kappa}}{\delta^2} [\mathbf{a}T + \zeta] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Возвратимся теперь к анализу (A.19). В соответствии с (A.20)

$$\mathfrak{z}_T = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^\kappa} \int_0^{T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \frac{\dot{u}_t - \beta_s^\varepsilon}{\alpha_s^\varepsilon} d\bar{B}_s + \frac{1}{2\varepsilon^{2\kappa}} \int_0^{T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \frac{[\dot{u}_t - \beta_s^\varepsilon]^2}{(\alpha_s^\varepsilon)^2} ds\right).$$

Обозначим $\mathfrak{B}_{\delta, \varepsilon} := \{\sup_{t \leq T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} |X_t^\varepsilon - u_t| \leq \delta\}$. Тогда (A.19) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathfrak{B}_{\delta, \varepsilon}) &= \int_{\mathfrak{B}_{\delta, \varepsilon}} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^{2\kappa}} \int_0^{T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \frac{\dot{u}_t - \beta_s^\varepsilon}{\alpha_s^\varepsilon} d\bar{B}_s \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\varepsilon^{2\kappa}} \int_0^{T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \frac{[\dot{u}_t - \beta_s^\varepsilon]^2}{(\alpha_s^\varepsilon)^2} ds\right) d\bar{\mathbf{P}}. \end{aligned}$$

Далее мы используем несколько очевидных соотношений. Выберем l в качестве верхней границы для

$$\frac{(\dot{u}_s - \mathbf{b})^2}{\mathbf{a}(\alpha_s^\varepsilon)^2} + \frac{2|\dot{u}_s - \mathbf{b}| + |\mathbf{b} - \beta_s^\varepsilon|}{\mathbf{a}} \left[1 + \frac{|\mathbf{a} - (\alpha_s^\varepsilon)^2|}{(\alpha_s^\varepsilon)^2}\right].$$

Пишем

$$\begin{aligned}
\int_0^{T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \frac{[\dot{u}_s - \beta_s^\varepsilon]^2}{(\alpha_s^\varepsilon)^2} ds &= \int_0^{T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \frac{[(\dot{u}_s - \mathbf{b}) + (\mathbf{b} - \beta_s^\varepsilon)]^2}{\mathbf{a}} \left[1 + \frac{\mathbf{a} - (\alpha_s^\varepsilon)^2}{(\alpha_s^\varepsilon)^2} \right] ds \\
&\leq \int_0^{T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \frac{(\dot{u}_s - \mathbf{b})^2}{\mathbf{a}} ds + \int_0^{T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \frac{(\dot{u}_s - \mathbf{b})^2}{\mathbf{a}} \frac{|\mathbf{a} - (\alpha_s^\varepsilon)^2|}{(\alpha_s^\varepsilon)^2} ds \\
&\quad + \int_0^{T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \frac{2|\dot{u}_s - \mathbf{b}||\mathbf{b} - \beta_s^\varepsilon| + (\mathbf{b} - \beta_s^\varepsilon)^2}{\mathbf{a}} \left[1 + \frac{|\mathbf{a} - (\alpha_s^\varepsilon)^2|}{(\alpha_s^\varepsilon)^2} \right] ds \\
&\leq \int_0^{T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \frac{(\dot{u}_s - \mathbf{b})^2}{\mathbf{a}} ds + l \int_0^{T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} [|\mathbf{a} - (\alpha_s^\varepsilon)^2| + |\mathbf{b} - \beta_s^\varepsilon|] ds \\
&\leq \int_0^{T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \frac{(\dot{u}_s - \mathbf{b})^2}{\mathbf{a}} ds + \zeta l.
\end{aligned}$$

Полученная оценка влечет за собой

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathfrak{B}_{\delta, \varepsilon}} \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon^\kappa} \int_0^{T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \frac{\dot{u}_s - \beta_s^\varepsilon}{\alpha_s^\varepsilon} d\bar{B}_s - \frac{1}{2\varepsilon^{2\kappa}} \int_0^{T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \frac{[\dot{u}_s - \beta_s^\varepsilon]^2}{(\alpha_s^\varepsilon)^2} ds \right) d\bar{\mathbf{P}} \\
&\geq \exp \left(-\frac{1}{2\varepsilon^{2\kappa}} \int_0^T \frac{(\dot{u}_s - \mathbf{b})^2}{\mathbf{a}} ds - \frac{\zeta l}{2\varepsilon^{2\kappa}} \right) \\
&\quad \times \int_{\mathfrak{B}_{\delta, \zeta}} 1 \wedge \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon^\kappa} \int_0^{T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \frac{\dot{u}_t - \beta_t^\varepsilon}{(\alpha_s^\varepsilon)^2} d\bar{B} \right) d\bar{\mathbf{P}}
\end{aligned}$$

(« $1 \wedge \exp(\dots)$ » вводится только для того, чтобы иметь ограниченную экспоненту в последнем интеграле).

Итак, мы получаем следующую нижнюю границу:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{\varepsilon^{2\kappa}}(\mathfrak{B}_{\delta, \varepsilon}) &\geq \exp \left(-\frac{1}{2\mathbf{a}} \int_0^T (\dot{u}_s - \mathbf{b})^2 dt - \frac{\zeta l}{2} \right) \\
&\quad \times \left(\int_{\mathfrak{B}_{\delta, \varepsilon}} 1 \wedge \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon^\kappa} \int_0^{T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \frac{\dot{u}_s - \beta_s^\varepsilon}{(\alpha_s^\varepsilon)^2} d\bar{B} \right) d\bar{\mathbf{P}} \right)^{\varepsilon^{2\kappa}},
\end{aligned}$$

и по неравенству Гёльдера (здесь $\varepsilon < 1$)

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathfrak{B}_{\delta, \varepsilon}} 1 \wedge \exp \left(-\varepsilon^\kappa \int_0^{T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \frac{\dot{u}_s - \beta_s^\varepsilon}{(\alpha_s^\varepsilon)^2} d\bar{B}_s \right) d\bar{\mathbf{P}} \\
&\leq \left(\int_{\mathfrak{B}_{\delta, \varepsilon}} 1 \wedge \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon^\kappa} \int_0^{T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \frac{\dot{u}_s - \beta_s^\varepsilon}{(\alpha_s^\varepsilon)^2} d\bar{B}_s \right) d\bar{\mathbf{P}} \right)^{\varepsilon^{2\kappa}}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} |X_t^\varepsilon - u_t| \leq \delta \right) &\geq -\frac{1}{2\mathbf{a}} \int_0^T (\dot{u}_s - \mathbf{b})^2 ds \\
&\quad - \frac{\zeta l}{2} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2\kappa} \ln \int_{\mathfrak{B}_{\delta, \varepsilon}} 1 \wedge \exp \left(-\varepsilon^\kappa \int_0^{T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} \frac{\dot{u}_s - \beta_s^\varepsilon}{(\alpha_s^\varepsilon)^2} d\bar{B}_s \right) d\bar{\mathbf{P}} \\
&\geq -\frac{1}{2\mathbf{a}} \int_0^T (\dot{u}_s - \mathbf{b})^2 ds - \frac{\zeta l}{2} + \ln \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathfrak{B}_{\delta, \varepsilon}} \psi^\varepsilon d\bar{\mathbf{P}},
\end{aligned}$$

где $\psi^\varepsilon := 1 \wedge \exp(-\varepsilon^\kappa \int_0^{T \wedge \tau_{\varepsilon, \zeta}} ((\dot{u}_s - \beta_s^\varepsilon)/(\alpha_s^\varepsilon)^2) d\bar{B}_s)$. В силу (A.21), $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\mathbf{P}}(\mathfrak{B}_{\delta, \varepsilon}) = 1$ и, кроме того, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \psi^\varepsilon d\bar{\mathbf{P}} = 1$. Отсюда, благодаря $\psi^\varepsilon \leq 1$, получаем

$$\int_{\mathfrak{B}_{\delta, \varepsilon}} \psi^\varepsilon d\bar{\mathbf{P}} = \int_\Omega \psi^\varepsilon d\bar{\mathbf{P}} - \int_{\Omega \setminus \mathfrak{B}_{\delta, \varepsilon}} \psi^\varepsilon d\bar{\mathbf{P}} \geq \int_\Omega \psi^\varepsilon d\bar{\mathbf{P}} - \int_{\Omega \setminus \mathfrak{B}_{\delta, \varepsilon}} d\bar{\mathbf{P}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1,$$

т.е. $\ln \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathfrak{B}_{\delta, \varepsilon}} \psi^\varepsilon d\bar{\mathbf{P}} \geq 0$.

В силу произвольности ζ , (A.17) выполнено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dembo A., Zeitouni O. Large Deviations Techniques and Applications. New York: Springer-Verlag, 1998, 396 p.
2. Brox T. A one-dimensional diffusion process in a Wiener medium. — Ann. Probab., 1986, v. 14, № 4, p. 1206–1218.
3. Dupuis P., Ellis R. S. A Weak Convergence Approach to the Theory of Large Deviations. New York: Wiley, 1997, 479 p.
4. Freidlin M. I., Sowers R. B. A comparison of homogenization and large deviations, with applications to wavefront propagation. — Stochastic Process. Appl., 1999, v. 82, № 1, p. 23–52.
5. Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуация в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979, 424 с.
6. Гертнер Ю., Фрейдлин М. И. О распространении концентрационных волн в периодических и случайных средах. — Докл. АН СССР, 1979, т. 249, № 3, с. 521–525.
7. Жакоб Ж., Ширяев А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов, т. 1, 2. М.: Наука, 1994, 542 с., 366 с.
8. Крылов Н. В. Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977, 399 с.
9. Liptser R. S., Spokoiny V. Moderate deviations type evaluation for integral functionals of diffusion processes. — Electron. J. Probab., 1999, v. 4, № 17, p. 1–25.
10. Liptser R. S., Puhalskii A. A. Limit theorems on large deviations for semimartingales. — Stochastics Stochastics Rep., 1992, v. 38, № 4, p. 201–249.
11. Liptser R. S., Shiryaev A. N. Statistics of Random Processes. I. General theory. Berlin: Springer-Verlag, 2001, 427 p.
12. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986, 512 с.
13. Puhalskii A. A. Large deviations of semimartingales via convergence of the predictable characteristics. — Stochastics Stochastics Rep., 1994, v. 49, № 1–2, p. 27–85.
14. Puhalskii A. A. Large Deviations and Idempotent Probability. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2001, 500 p.
15. Schumacher S. Diffusions with random coefficients. — Particle Systems, Random Media and Large Deviations (Brunswick, Maine, 1984). Providence: Amer. Math. Soc., 1985, p. 351–356. (Contemp. Math., v. 41.)

Поступила в редакцию
17.III.2007

Исправленный вариант
12.X.2008