Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Якимив, Предельная теорема для средних членов вариационного ряда длин циклов случайной A -подстановки, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 1, 63–79

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2499>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 09:58:20

© 2009 г.

ЯКЫМИВ А. Л.*

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СРЕДНИХ ЧЛЕНОВ ВАРИАЦИОННОГО РЯДА ДЛИН ЦИКЛОВ СЛУЧАЙНОЙ A -ПОДСТАНОВКИ¹⁾

Рассматривается случайная подстановка τ_n , равномерно распределенная на множестве всех подстановок степени n , длины циклов которых принадлежат фиксированному множеству A (так называемых A -подстановок). Пусть ζ_n — общее число циклов и $\eta_n(1) \leq \eta_n(2) \leq \dots \leq \eta_n(\zeta_n)$ — вариационный ряд длин циклов подстановки τ_n . В настоящей статье получена центральная предельная теорема для средних членов этого ряда, а именно для случайных величин $\eta_n(m)$ с номерами $m = \alpha \ln n + o(\sqrt{\ln n})$ при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном $\alpha \in (0, \sigma)$ для определенного класса множеств A положительной асимптотической плотности σ . Основным средством доказательства является новая трехмерная тауберова теорема. Поведение крайних левых и крайних правых членов этого ряда исследовано автором ранее.

Ключевые слова и фразы: случайная A -подстановка, вариационный ряд длин циклов подстановки, тауберова теорема.

1. Введение. Пусть A — произвольное непустое подмножество множества натуральных чисел $\mathbf{N}$. Подстановки, длины циклов которых принадлежат множеству A , называются A -подстановками (см. [20]). Пусть $T_n = T_n(A)$ есть множество A -подстановок степени n и τ_n — случайная подстановка, равномерно распределенная на T_n . Через ζ_{mn} обозначим число циклов подстановки τ_n , имеющих длину $m \in \mathbf{N}$. Ясно, что $\zeta_{mn} = 0$ при $m \notin A$. Далее, пусть ζ_n — общее число циклов случайной подстановки τ_n , т.е.

$$\zeta_n = \sum_{m \in \mathbf{N}} \zeta_{mn}.$$

Случайные A -подстановки являются объектом пристального внимания ряда авторов на протяжении последних тридцати с лишним лет. Обзор по этой тематике можно найти в статье автора [22] и книге [23]. Одними

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, Россия; e-mail: arsen@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 08-01-00563, 09-01-00724).

из первых работ в этом направлении были статьи [1], [2], [11], [12]. Еще раньше в работах [17], [18] были рассмотрены более общие объекты — случайные отображения с ограничениями на длины циклов. При этом для тех или иных классов множеств A изучались задачи асимптотического поведения при $n \rightarrow \infty$ числа элементов множества $T_n(A)$ и предельного поведения (в слабом смысле) случайных величин ζ_{mn} и ζ_n , где m — фиксированный элемент множества A . Имеется пять монографий, содержащих сведения об A -подстановках: [7], [10], [19], [20], [23].

Расположим длины циклов случайной подстановки τ_n в возрастающем порядке:

$$\eta_n(1) \leq \eta_n(2) \leq \dots \leq \eta_n(\zeta_n). \quad (1)$$

Через $|X|$ мы будем везде далее обозначать число элементов конечного множества X . В настоящей статье мы будем предполагать, что

$$p(n) \equiv \frac{|T_n(A)|}{n!} = n^{\sigma-1} L(n), \quad n \in \mathbf{N}, \quad (2)$$

где функция $L(n)$ — медленно меняется на бесконечности (см. [21]), а $\sigma \in (0, 1]$. Имеется широкий класс примеров множеств A , для которых выполнено (2) (см. [1], [3], [8], [9], [13]–[16], [23, гл. 3]), более подробный обзор этих работ содержится в [22].

Экстремальные свойства случайных подстановок, случайных отображений и других комбинаторных структур явились предметом изучения со стороны целого ряда авторов, начиная с известной работы [4] (история вопроса и подробные ссылки имеются в работе [5]). Отметим также, что обзор работ в этом направлении до 1984 г. содержится в монографии [7]. В частности, исследовано и предельное поведение случайных величин $\eta_n(m)$ при $n \rightarrow \infty$ и $m = \alpha \ln n + o(\sqrt{\ln n})$ с $\alpha \in (0, 1)$, когда $A = \mathbf{N}$ (см. [7, раздел 1.9, теорема 4]).

Что же касается случайных A -подстановок, то здесь пока изучено только поведение крайних правых и крайних левых членов вариационного ряда (1) (см. статьи [22], [25]). В настоящей работе получена предельная теорема для случайных величин $\eta_n(m)$, находящихся в средней части вариационного ряда (1), при $n \rightarrow \infty$ и различном характере поведения m .

Доказательство этой предельной теоремы для $\eta_n(m)$ опирается на новую трехмерную тауберову теорему (п. 2, теорема 3), которая обобщает соответствующий результат из книги [23, раздел 1.5, теорема 1.5.7]. Отметим, что тауберовы теоремы нашли широкое применение в теории вероятностей. Это относится, в частности, к таким областям, как теория ветвящихся процессов, теория восстановления, теория рекордов, теория безгранично делимых распределений, теория суммирования независимых случайных величин, комбинаторная теория вероят-

ностей и др. За более подробной информацией по этому поводу читатель может обратиться к недавно выпущенной книге [23].

2. Основной результат. Далее будет доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнено соотношение (2) и

$$l(n) \equiv \sum_{i \in A(n)} \frac{1}{i} = \sigma \ln n + o(\sqrt{\ln n}) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3)$$

где $A(n) = A \cap [1, n]$, и пусть положительная последовательность $g(n) \rightarrow \infty$ такова, что

$$\frac{\sigma \ln n - g(n)}{\sqrt{\ln n}} \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$ и $m = g(n) + o(\sqrt{g(n)})$ последовательность случайных величин

$$\frac{\sigma \ln \eta_n(m) - m}{\sqrt{m}}$$

слабо сходится к стандартному нормальному закону.

Отметим, что в предположениях теоремы 1

$$\frac{\zeta_n - \sigma \ln n}{\sqrt{\sigma \ln n}}$$

слабо сходится при $n \rightarrow \infty$ к стандартному нормальному закону [24], так что случайные величины $\eta_n(m)$ с указанными номерами m действительно находятся в средней части вариационного ряда (1).

П р и м е р ы. 1. Пусть $g(n) = \alpha \ln n$, где $\alpha \in (0, \sigma)$. Тогда для $g(n)$ справедлива теорема 1 (при $A = N$ соответствующий пример разобран в книге [7, раздел 1.9, теорема 4, раздел 1.10, теорема 3]).

2. Пусть $g(n) \rightarrow \infty$, $g(n) = o(\ln n)$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для $g(n)$ справедлива теорема 1. Отметим, что в этом случае номера $m = g(n) + o(\sqrt{g(n)})$ отличаются от тех, которые ранее принято было называть средними (см. ссылку в примере 1).

Отметим, что следствием (2) является соотношение

$$l(n) \equiv \sum_{i \in A(n)} \frac{1}{i} = \sigma \ln n + o(\ln n) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (4)$$

(см. [15]), т.е. в соотношении (3) требуется несколько большее, чем (4).

Положим при $k, n \in \mathbf{N}$

$$\zeta_n(k) = \sum_{i \leq k} \zeta_{in}, \quad (5)$$

$\zeta_0(k) = \zeta_n(0) = \zeta_0(0) = 0$. В основе доказательства теоремы 1 лежит известное равенство

$$\mathbf{P}\{\eta_n(m) \leq r\} = \mathbf{P}\{\zeta_n(r) \geq m\}, \quad (6)$$

справедливое для произвольных натуральных $r, m \leq n$ (см. [7, раздел 1.10, равенство (9)]), и следующая предельная теорема для $\zeta_n(k)$, верная при более широких предположениях, чем теорема 1.

Теорема 2. Пусть выполнено (2). Тогда при $k, n \rightarrow \infty$, $k \leq n$ последовательность случайных величин

$$\zeta'_n(k) = \frac{\zeta_n(k) - l(k)}{\sqrt{\sigma \ln k}} \quad (7)$$

слабо сходится к стандартному нормальному закону, где функция $l(\cdot)$ задана в (3).

Теорема 2 обобщает соответствующие утверждения из [4], [7], [20], [23] и некоторые другие. В свою очередь, теорема 2 выводится из следующей трехмерной тауберовой теоремы.

Теорема 3. Пусть для всех $s, u, v \in (0, 1)$ конечна функция

$$A(s, u, v) = \sum_{i, j, r \geq 0} j^{\beta-1} a(i, j, r) s^i u^j v^r \quad (8)$$

($\beta > 0$, $a(i, j, r) \geq 0$), причем для произвольных $\lambda, \mu, \theta > 0$ при $n \rightarrow \infty$ для некоторых положительных последовательностей $k = k(n) \rightarrow \infty$ и $m = m(n) \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{A(e^{-\lambda/k}, e^{-\mu/m}, e^{-\theta/n})}{k m n \varrho(n)} \rightarrow \lambda^{-1} \mu^{-\beta} \theta^{-\sigma} \Gamma(\beta) \Gamma(\sigma), \quad (9)$$

где $\sigma > 0$, $\varrho(n)$ — некоторая положительная функция переменной n , $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера. Если $a(i, j, r)$ монотонна по i и по j и при $n \rightarrow \infty$, $i \asymp k$, $j \asymp m$, $r \geq n$, $r - n = o(n)$ выполнено соотношение

$$\frac{a(i, j, r) - a(i, j, n)}{a(i, j, r) + a(i, j, n)} \rightarrow 0, \quad (10)$$

то для произвольных фиксированных $x, y, z > 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$a(xk, ym, zn) \sim \varrho(n) m^{1-\beta} z^{\sigma-1} \quad (11)$$

(при нецелых s, u, v полагаем $a(s, u, v) = a([s], [u], [v])$).

З а м е ч а н и е. Так же как и в теореме 2 из [24], нетрудно заметить, что условие (10) равносильно условию

$$\frac{a(i, j, r)}{a(i, j, n)} \rightarrow 1$$

при $n \rightarrow \infty$, $i \asymp k$, $j \asymp m$, $r \geq n$, $r - n = o(n)$. Однако нам будет удобнее проверять это тауберо-условие именно в форме (10).

Доказательства теорем 1–3 мы будем проводить в обратном порядке. Сначала мы докажем теорему 3, затем выведем теорему 2 из теоремы 3 и, наконец, докажем теорему 1. Зафиксируем $w \geq 0$. Положим

$$a(i, j, r) = p(r) \mathbf{E} \exp \left(\frac{\zeta_r(i)w}{\sqrt{l(j)}} \right), \quad (12)$$

где $i, j, r \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $p(r)$ определена в (2), $l(j)$ определена в (3), $\zeta_r(i)$ определена в (5). (Считаем, что $a(i, j, r) = 0$ при $l(j) = 0$.) Далее, положим

$$\varrho(n) = p(n) \exp \left(w \sqrt{l(k)} + \frac{w^2}{2} \right) m^{\beta-1} \quad (13)$$

(как и в теореме 3, считаем, что k и m суть функции от n). Сформулируем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. Пусть $k \leq n$ и $m \asymp k$ при $n \rightarrow \infty$. Если последовательности $a(i, j, r)$ и $\varrho(n)$ заданы соотношениями (12) и (13) соответственно, то для некоторого $\beta > 1$ и функции $A(s, u, v)$, определенной равенством (8), справедливо соотношение (9).

Лемма 2. Пусть $k \leq n$ и $m \asymp k$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для последовательности $a(i, j, r)$, определенной в (12), справедливо соотношение (10).

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 1. Согласно (8) и (12), при $s = \exp(-\lambda/k)$, $u = \exp(-\mu/m)$, $v = \exp(-\theta/n)$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} A(s, u, v) &= \sum_{i, j, r \geq 0} j^{\beta-1} a(i, j, r) s^i u^j v^r \\ &= \sum_{i, j \geq 0} j^{\beta-1} s^i u^j \sum_{r \geq 0} v^r p(r) \mathbf{E} \exp \left(\frac{\zeta_r(i)w}{\sqrt{l(j)}} \right) \\ &= \sum_{i, j \geq 0} j^{\beta-1} s^i u^j \exp \left(f(v) + (h(j) - 1) \sum_{t \in A(i)} \frac{v^t}{t} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$f(v) = \sum_{t \in A} \frac{v^t}{t}, \quad h(j) = \exp \left(\frac{w}{\sqrt{l(j)}} \right) \quad (15)$$

(последнее равенство в (14) справедливо в силу формулы (0.14) из книги [20, раздел 3.1]). Согласно соотношению 6.3 из работы [1],

$$\exp(f(v)) = \sum_{r \geq 0} p(r) v^r. \quad (16)$$

Поэтому по абелевой теореме Караматы в силу (2) при $n \rightarrow \infty$

$$\exp(f(v)) \sim np(n)\theta^{-\sigma}\Gamma(\sigma). \quad (17)$$

Из (14) и (17) следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$A(s, u, v) \sim np(n)\theta^{-\sigma}\Gamma(\sigma) \sum_{i, j \geq 0} j^{\beta-1} s^i u^j \exp\left((h(j) - 1) \sum_{t \in A(i)} \frac{v^t}{t}\right).$$

Поэтому в силу (13) для доказательства леммы 1 нам достаточно показать, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \Sigma &\equiv \sum_{i, j \geq 0} j^{\beta-1} s^i u^j \exp\left((h(j) - 1) \sum_{t \in A(i)} \frac{v^t}{t}\right) \\ &\sim km^\beta \lambda^{-1} \mu^{-\beta} \exp\left(w\sqrt{l(k)} + \frac{w^2}{2}\right) \Gamma(\beta). \end{aligned} \quad (18)$$

При $1 \leq j \leq i$ выполнено следующее неравенство (см. [23, гл. 3, доказательство леммы 3.2.1]):

$$l(i)(h(j) - 1) \leq w\sqrt{l(j)} + C + \alpha \ln \frac{i}{j} \quad (19)$$

для некоторой постоянной $C > 0$, зависящей от w , и $\alpha = w + C$, $\beta = \alpha + 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\equiv \sum_{0 \leq j \leq i/\ln i} j^{\beta-1} s^i u^j \exp\left((h(j) - 1) \sum_{t \in A(i)} \frac{v^t}{t}\right) \\ &\leq \sum_{0 \leq j \leq i/\ln i} j^{\beta-1} s^i u^j \exp((h(j) - 1)l(i)) \\ &= O(1) \sum_{0 \leq j \leq i/\ln i} i^{\beta-1} s^i u^j \exp\left(w\sqrt{l(j)}\right) \\ &= O(1) \sum_{i \geq 0} i^{\beta-1} s^i \sum_{0 \leq j \leq i/\ln i} u^j \exp\left(w\sqrt{l(j)}\right) \\ &= O(1) \sum_{i \geq 0} i^{\beta-1} s^i \sum_{0 \leq j \leq i/\ln i} \exp\left(w\sqrt{l(j)}\right) \\ &= O(1) \sum_{i \geq 0} i^{\beta-1} s^i o\left(i \exp\left(w\sqrt{l(i)}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= o(1) \sum_{i \geq 0} i^\beta s^i \exp(w\sqrt{l(i)}) \\
 &= o(1) O(k^{\beta+1} \exp(w\sqrt{l(k)})) \\
 &= o(km^\beta \exp(w\sqrt{l(k)}))
 \end{aligned} \tag{20}$$

при $n \rightarrow \infty$. Далее,

$$\begin{aligned}
 \Sigma_2 &\equiv \sum_{i \geq 0, j \geq i \ln i} j^{\beta-1} s^i u^j \exp\left((h(j) - 1) \sum_{t \in A(i)} \frac{v^t}{t}\right) \\
 &\leq \sum_{i \geq 0, j \geq i \ln i} j^{\beta-1} s^i u^j \exp((h(j) - 1)l(i)).
 \end{aligned} \tag{21}$$

Мы имеем при $j \geq i$:

$$l(i)h(j) \leq l(j) \exp\left(\frac{w}{\sqrt{l(j)}}\right) = l(j) + w\sqrt{l(j)} + O(1)$$

при $j \rightarrow \infty$. Поэтому для некоторых постоянных M и c_1 при $j \geq M$, $i \leq j$

$$l(i)h(j) \leq l(j) + w\sqrt{l(j)} + c_1.$$

Стало быть, при $j \geq i$ для некоторой постоянной $c_2 \geq c_1$

$$l(i)(h(j) - 1) \leq l(j) - l(i) + w\sqrt{l(j)} + c_2 \leq \ln \frac{j}{i} + w\sqrt{l(j)} + c_2. \tag{22}$$

Из (21) и (22) следует, что при $c_3 = \exp(c_2)$

$$\begin{aligned}
 \Sigma_2 &\leq c_3 \sum_{i \geq 0} i^{\beta-1} s^i \sum_{j \geq i \ln i} u^j \exp(w\sqrt{l(j)}) \\
 &= c_3 \sum_{i \geq 0} i^{\beta-1} s^i \sum_{j \geq i \ln i} \exp\left(-\frac{\mu j}{2m}\right) \exp\left(-\frac{\mu j}{2m}\right) \exp(w\sqrt{l(j)}) \\
 &\leq c_3 \sum_{i \geq 0} i^{\beta-1} s^i \exp\left(-\frac{\mu i \ln i}{2m}\right) \sum_{j \geq 0} \exp\left(-\frac{\mu j}{2m}\right) \exp(w\sqrt{l(j)}) \\
 &= O\left(m \exp(w\sqrt{l(m)})\right) \sum_{i \geq 0} i^{\beta-1} s^i \exp\left(-\frac{\mu i \ln i}{2m}\right).
 \end{aligned} \tag{23}$$

Заметим, что для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i \geq 0} i^{\beta-1} s^i \exp\left(-\frac{\mu i \ln i}{2m}\right) \\
 &\leq \sum_{i=0}^{[k\varepsilon]} i^{\beta-1} + \sum_{i=[k\varepsilon]+1}^{\infty} i^{\beta-1} s^i \exp\left(-\frac{\mu i \ln i}{2m}\right) \\
 &\leq c_4 \varepsilon^\beta k^\beta + \exp\left(-\frac{\mu \varepsilon k \ln(\varepsilon k)}{2m}\right) \sum_{i=0}^{\infty} i^{\beta-1} s^i \leq c_5 \varepsilon^\beta k^\beta
 \end{aligned}$$

при достаточно больших $k \geq k_0$ для некоторых постоянных c_4 и c_5 (последнее неравенство выполнено, поскольку $\mu \varepsilon k \ln(\varepsilon k)/(2m) \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$). В силу произвольности ε отсюда следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{i \geq 0} i^{\beta-1} s^i \exp\left(-\frac{\mu i \ln i}{2m}\right) = o(k^\beta). \quad (24)$$

Из (23) и (24) получаем, что

$$\Sigma_2 = o\left(k^\beta m \exp\left(w\sqrt{l(m)}\right)\right) = o\left(km^\beta \exp\left(w\sqrt{l(k)}\right)\right) \quad (25)$$

(так как $k \asymp m$, то $\sqrt{l(m)} = \sqrt{l(k)} + o(1)$). Положим

$$\Sigma_3 \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i/\ln i < j < i \ln i} j^{\beta-1} s^i u^j \exp\left((h(j)-1) \sum_{t \in A(i)} \frac{v^t}{t}\right). \quad (26)$$

Зафиксируем произвольное $M > 0$. Мы имеем при $i \leq Mn$:

$$0 \leq \sum_{t \in A(i)} \frac{1-v^t}{t} = \sum_{t \in A(i)} \frac{1-\exp(t\theta/n)}{t} \leq \sum_{t \in A(i)} \frac{\theta}{n} \leq \frac{i\theta}{n} \leq M\theta.$$

Таким образом, при $i \leq Mn$

$$\sum_{t \in A(i)} \frac{v^t}{t} = l(i) + O(1) \quad (n \rightarrow \infty),$$

где постоянная в « O » не зависит от i . Поэтому

$$\begin{aligned} \Sigma'_3 &\equiv \sum_{i=0}^{Mn} \sum_{i/\ln i < j < i \ln i} j^{\beta-1} s^i u^j \exp\left((h(j)-1) \sum_{t \in A(i)} \frac{v^t}{t}\right) \\ &\sim \sum_{i=0}^{Mn} \sum_{i/\ln i < j < i \ln i} j^{\beta-1} s^i u^j \exp((h(j)-1)l(i)) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (27)$$

При $i/\ln i < j < i \ln i$

$$\begin{aligned} (h(j)-1)l(i) &= l(i) \left(\frac{w}{\sqrt{l(j)}} + \frac{w^2}{2l(j)} + O((l(j))^{-3/2}) \right) \\ &= w\sqrt{l(i)} + \frac{w^2}{2} + \delta(i, j), \end{aligned} \quad (28)$$

где $\delta(i, j) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ равномерно по $j \in (i/\ln i, i \ln i)$, так как в силу оценки сразу после формулы (9) книги [23, раздел 3.2]

$$\sqrt{l(i)} - \sqrt{l(j)} \rightarrow 0$$

при $i \rightarrow \infty$ равномерно по $j \in (i/\ln i, i \ln i)$. Из (27) и (28) следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \Sigma'_3 &\sim \exp\left(\frac{w^2}{2}\right) \sum_{i=0}^{Mn} \sum_{i/\ln i < j < i \ln i} j^{\beta-1} s^i u^j \exp(w\sqrt{l(i)}) \\ &= \exp\left(\frac{w^2}{2}\right) \sum_{i=0}^{Mn} s^i \exp(w\sqrt{l(i)}) \sum_{i/\ln i < j < i \ln i} j^{\beta-1} u^j. \end{aligned} \quad (29)$$

Мы имеем:

$$\sum_{0 \leq j \leq i/\ln i} j^{\beta-1} u^j \leq \sum_{0 \leq j \leq i/\ln i} j^{\beta-1} = o(i^\beta) \quad (i \rightarrow \infty).$$

Поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{Mn} s^i \exp(w\sqrt{l(i)}) \sum_{0 \leq j \leq i/\ln i} j^{\beta-1} u^j \\ &= o\left(\sum_{i=0}^{\infty} i^\beta s^i \exp(w\sqrt{l(i)})\right) = o(k^{\beta+1} \exp(w\sqrt{l(k)})). \end{aligned}$$

Точно так же, как и в оценках (23)–(25), получаем, что

$$\sum_{i=0}^{Mn} s^i \exp(w\sqrt{l(i)}) \sum_{j \geq i \ln i} j^{\beta-1} u^j = o(k^{\beta+1} \exp(w\sqrt{l(k)}))$$

при $n \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{Mn} s^i \exp(w\sqrt{l(i)}) \sum_{i/\ln i < j < i \ln i} j^{\beta-1} u^j \\ &= \sum_{i=0}^{Mn} s^i \exp(w\sqrt{l(i)}) \sum_{j=0}^{\infty} j^{\beta-1} u^j + o(k^{\beta+1} \exp(w\sqrt{l(k)})) \end{aligned} \quad (30)$$

при $n \rightarrow \infty$. Но

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^{\beta-1} u^j = \sum_{j=0}^{\infty} j^{\beta-1} \exp\left(-\frac{\mu j}{m}\right) \sim \Gamma(\beta) m^\beta \mu^{-\beta} \quad (n \rightarrow \infty). \quad (31)$$

Из (29), (30) и (31) следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \Sigma'_3 &= (1 + o(1)) \exp\left(\frac{w^2}{2}\right) \sum_{i=0}^{Mn} s^i \exp(w\sqrt{l(i)}) \sum_{j=0}^{\infty} j^{\beta-1} u^j \\ &\quad + o(k^{\beta+1} \exp(w\sqrt{l(k)})) \\ &= (1 + o(1)) \Gamma(\beta) \left(\frac{m}{\mu}\right)^\beta \exp\left(\frac{w^2}{2}\right) \sum_{i=0}^{Mn} s^i \exp(w\sqrt{l(i)}) \\ &\quad + o(k^{\beta+1} \exp(w\sqrt{l(k)})). \end{aligned} \quad (32)$$

Далее,

$$\begin{aligned}\Sigma_3'' &\equiv \sum_{i=Mn+1}^{\infty} \sum_{i/\ln i < j < i \ln i} j^{\beta-1} s^i u^j \exp\left((h(j)-1) \sum_{t \in A(i)} \frac{v^t}{t}\right) \\ &\leq \sum_{i=Mn+1}^{\infty} \sum_{i/\ln i < j < i \ln i} j^{\beta-1} s^i u^j \exp((h(j)-1)l(i)).\end{aligned}$$

Оценивая Σ_3'' точно так же, как и Σ_3' , получаем, что для некоторой постоянной c_6 , не зависящей от M ,

$$\Sigma_3'' \leq c_6 m^\beta \sum_{i=Mn+1}^{\infty} s^i \exp(w\sqrt{l(i)}) + \varepsilon(k) k^{\beta+1} \exp(w\sqrt{l(k)}), \quad (33)$$

где $\varepsilon(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Мы имеем:

$$\begin{aligned}\sum_{i=Mn+1}^{\infty} s^i \exp(w\sqrt{l(i)}) &= \sum_{i=Mn+1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\lambda i}{k}\right) \exp(w\sqrt{l(i)}) \\ &\leq \exp\left(-\frac{\lambda M}{2}\right) \sum_{i=Mn+1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\lambda i}{2k}\right) \exp(w\sqrt{l(i)}) \\ &= (1+o(1)) \exp\left(-\frac{\lambda M}{2}\right) \frac{2k}{\lambda} \exp(w\sqrt{l(k)}) \quad (n \rightarrow \infty).\end{aligned} \quad (34)$$

Из (33) и (34) следует, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Sigma_3''}{km^\beta \exp(w\sqrt{l(k)})} \leq 2c_6 \frac{\exp(-\lambda M/2)}{\lambda}. \quad (35)$$

Далее,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{Mn} s^i \exp(w\sqrt{l(i)})}{k \exp(w\sqrt{l(k)})} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{\infty} s^i \exp(w\sqrt{l(i)})}{k \exp(w\sqrt{l(k)})} = \frac{1}{\lambda}. \quad (36)$$

Из (34) следует, что

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{Mn} s^i \exp(w\sqrt{l(i)})}{k \exp(w\sqrt{l(k)})} &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{\infty} s^i \exp(w\sqrt{l(i)})}{k \exp(w\sqrt{l(k)})} \\ &\quad - \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=Mn}^{\infty} s^i \exp(w\sqrt{l(i)})}{k \exp(w\sqrt{l(k)})} \geq \frac{1}{\lambda} - \frac{2}{\lambda} \exp\left(-\frac{\lambda M}{2}\right).\end{aligned} \quad (37)$$

Из (32) и (37) получаем, что

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\Sigma_3}{km^\beta \exp(w\sqrt{l(k)})} &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\Sigma_3'}{km^\beta \exp(w\sqrt{l(k)})} \\ &\geq \frac{\Gamma(\beta)}{\mu^\beta} \exp\left(\frac{w^2}{2}\right) \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{2}{\lambda} \exp\left(-\frac{\lambda M}{2}\right)\right).\end{aligned} \quad (38)$$

Из (32), (35) и (36) следует, что

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Sigma_3}{km^\beta \exp(w\sqrt{l(k)})} \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Sigma'_3}{km^\beta \exp(w\sqrt{l(k)})} + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Sigma''_3}{km^\beta \exp(w\sqrt{l(k)})} \\ & \leq \frac{\Gamma(\beta)}{\mu^\beta} \exp\left(\frac{w^2}{2}\right) \frac{1}{\lambda} + 2c_6 \frac{\exp(-\lambda M/2)}{\lambda}. \end{aligned} \quad (39)$$

Так как Σ_3 не зависит от M , то, устремляя в (38) и (39) M к бесконечности, убеждаемся в том, что на самом деле существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Sigma_3}{km^\beta \exp(w\sqrt{l(k)})} = \frac{\Gamma(\beta)}{\mu^\beta} \exp\left(\frac{w^2}{2}\right) \frac{1}{\lambda}.$$

С учетом оценок (20) и (25) для Σ_1 и Σ_2 , из последнего соотношения вытекает (18). Лемма 1 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 2. Доказательство леммы 2 похоже на доказательство леммы 1 работы [24], поэтому мы отметим только места, в которых имеются отличия. В доказательстве леммы 2 константы $c, c_1, c_2, \dots$, вообще говоря, не совпадают с константами $c, c_1, c_2, \dots$ доказательства леммы 1. Мы имеем:

$$a(i, j, n) = p(n) + \sum_{\tau=1}^n \frac{(h(j) - 1)^\tau}{\tau!} S_\tau(i, n) = p(n) + \sum_{\tau=1}^n b_\tau(i, j, n), \quad (40)$$

где

$$S_\tau(i, n) = \sum_{i_1, \dots, i_\tau \in A(i)} \frac{1}{i_1 \cdots i_\tau} p(n - i_1 - \cdots - i_\tau) \quad (41)$$

(см. доказательство леммы 1 из [24]). Для данной последовательности $r = r(n)$, $r = n + o(n)$ найдется последовательность $g(n) > 0$, $g(n) = o(n)$, $(r - n)/g(n) \rightarrow 0$. Для

$$I_1(\tau, i, n) = \sum_{i_1, \dots, i_\tau \in A(i), \sum_{l=1}^{\tau} i_l \in [n - g(n), n]} \frac{1}{i_1 \cdots i_\tau} p(n - i_1 - \cdots - i_\tau) \quad (42)$$

справедлива оценка:

$$I_1(\tau, i, n) \leq \delta(n) \tau^2 p(n) (l(i))^{\tau-1}, \quad (43)$$

где $\delta(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (см. соотношения (23)–(27) из [24]). Зафиксируем $c \in (0, 1)$ и положим

$$I_2(\tau, i, n) = \sum_{i_1, \dots, i_\tau \in A(i), \sum_{l=1}^{\tau} i_l \in (cn, n]} \frac{1}{i_1 \cdots i_\tau} p(n - i_1 - \cdots - i_\tau), \quad (44)$$

$$I_3(\tau, i, n) = \sum_{i_1, \dots, i_\tau \in A(i), \sum_{l=1}^{\tau} i_l \leq cn} \frac{1}{i_1 \cdots i_\tau} p(n - i_1 - \cdots - i_\tau). \quad (45)$$

Для $I_2(\tau, i, n)$ и $I_3(\tau, i, n)$ мы имеем следующие оценки:

$$I_2(\tau, i, n) = O\left(\tau^2 p(n)(l(i))^{\tau-1}\right), \quad (46)$$

$$I_3(\tau, i, n) = O\left(p(n)(l(i))^\tau\right), \quad (47)$$

где константы в « O » не зависят от τ и i . Далее, оценим снизу величину $S_\tau(i, n)$ при $\tau \leq cn$:

$$\begin{aligned} S_\tau(i, n) &\geq \sum_{i_1, \dots, i_\tau \in A(i), \sum_{l=1}^\tau i_l \leq cn} \frac{1}{i_1 \cdots i_\tau} p(n - i_1 - \cdots - i_\tau) \\ &\geq c_1 p(n) \sum_{i_1, \dots, i_\tau \in A(i), \sum_{l=1}^\tau i_l \leq cn} \frac{1}{i_1 \cdots i_\tau} \\ &\geq c_1 p(n) \sum_{i_1, \dots, i_\tau \in A(t)} \frac{1}{i_1 \cdots i_\tau} = c_1 p(n)(l(t))^\tau, \end{aligned}$$

где $t = \min(cn/\tau, i)$. Если $i \leq cn/\tau$, то

$$S_\tau(i, n) \geq c_1 p(n)(l(i))^\tau.$$

Пусть $i > cn/\tau$. Зафиксируем произвольные u_1 и u_2 , $0 < u_1 < u_2 < \infty$. Будем считать далее, что $i \in [u_1 k, u_2 k]$. Тогда так как $i \leq u_2 k \leq u_2 n$, то при $c_2 = u_2 c$

$$l(i) - l\left(\frac{cn}{\tau}\right) \geq l(i) - l\left(\frac{c_2 i}{\tau}\right).$$

Далее точно так же, как и в [24], получаем, что для некоторой постоянной $M > 0$ существуют такие постоянные $c_3 \in (0, \infty)$ и $n_1 \in \mathbf{N}$, что при $n \geq n_1$, $\tau \leq M\sqrt{\ln k}$ и $i \in [u_1 k, u_2 k]$

$$(l(t))^\tau \geq \left(l\left(\frac{c_2 i}{\tau}\right)\right)^\tau \geq c_3 (l(i))^\tau.$$

Поэтому для некоторой постоянной $c_4 \in (0, \infty)$ при $n \geq n_1$, $\tau \leq M\sqrt{\ln k}$ и $i \in [u_1 k, u_2 k]$

$$S_\tau(i, n) \geq c_4 p(n)(l(i))^\tau. \quad (48)$$

Из (44)–(47) получаем, что при $n \rightarrow \infty$ и $\tau \leq n$

$$S_\tau(i, n) = I_2(\tau, i, n) + I_3(\tau, i, n) = O(\tau^2 p(n)(l(i))^\tau).$$

Значит, существуют такие $n_2 > n_1$ и $c_5 \in (0, \infty)$, что при $n \geq n_2$, $\tau \leq n$ и $i \in [u_1 k, u_2 k]$

$$S_\tau(i, n) \leq c_5 \tau^2 p(n)(1 + \ln i)^\tau \leq c_5 \tau^2 p(n)(2 \ln k)^\tau. \quad (49)$$

Далее, при $n \rightarrow \infty$ и $j \asymp m \asymp k$

$$h(j) - 1 = (1 + o(1)) \frac{w}{\sqrt{l(j)}} = (1 + o(1)) \frac{w}{\sqrt{\sigma \ln j}} = (1 + o(1)) \frac{w}{\sqrt{\sigma} \sqrt{\ln k}}.$$

Стало быть, для произвольных постоянных s_1 и s_2 , $0 < s_1 < s_2 < \infty$, и некоторой постоянной $c_6 \in (w/\sqrt{\sigma}, \infty)$, зависящей от s_1 и s_2 , существует такое $n_3 > n_2$, что при $n \geq n_3$ и $j \in [s_1 k, s_2 k]$

$$h(j) - 1 \leq \frac{c_6}{\sqrt{\ln k}}. \quad (50)$$

В силу (49) и (50), при $n \geq n_3$, $i \in [u_1 k, u_2 k]$ и $j \in [s_1 k, s_2 k]$

$$\begin{aligned} b_\tau(i, j, n) &= \frac{(h(j) - 1)^\tau}{\tau!} S_\tau(i, n) \leq c_5 \tau^2 c_6^\tau \frac{(2 \ln k)^\tau}{\tau! (\ln k)^{\tau/2}} p(n) \\ &= c_5 \tau^2 c_7^\tau \frac{(\sqrt{\ln k})^\tau}{\tau!} p(n), \end{aligned} \quad (51)$$

где $c_7 = 2c_6$. Используя для $\tau!$ формулу Стирлинга, убеждаемся в том, что при $i \in [u_1 k, u_2 k]$ и $j \in [s_1 k, s_2 k]$

$$\sum_{\tau > e^2 c_7 \sqrt{\ln k}} b_\tau(i, j, n) = o(p(n)) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Дальнейшее доказательство леммы 2 с учетом полученных оценок практически дословно повторяет доказательство леммы 1 из [24].

Доказательство теоремы 3. Пусть $\mathfrak{B}$ — совокупность ограниченных борелевских множеств из $\mathbf{R}_+^3 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3: x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$. Для произвольного множества $B \in \mathfrak{B}$ положим

$$\mu_n(B) = \sum_{i, j, r: (i/k, j/m, r/n) \in B} \frac{j^{\beta-1} a(i, j, r)}{k m n \varrho(n)}. \quad (52)$$

В силу (9) для преобразования Лапласа мер μ_n выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_n(\mathbf{y}) &\equiv \int_{\mathbf{R}_+^3} e^{-(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \mu_n(d\mathbf{x}) = \frac{A(e^{-y_1 k}, e^{-y_2 m}, e^{-y_3 n})}{k m n \varrho(n)} \\ &\longrightarrow \psi(\mathbf{y}) = \tilde{\mu}(\mathbf{y}) = \int_{\mathbf{R}_+^3} e^{-(\mathbf{x}, \mathbf{y})} x_2^{\beta-1} x_3^{\sigma-1} dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned} \quad (53)$$

при $n \rightarrow \infty$ для произвольного фиксированного $\mathbf{y} \in \text{Int } \mathbf{R}_+^3$. Таким образом, предельная функция $\psi(\mathbf{y})$ в (53) является преобразованием Лапласа абсолютно непрерывной меры μ :

$$\mu(B) = \int_B e^{-(\mathbf{x}, \mathbf{y})} x_2^{\beta-1} x_3^{\sigma-1} dx_1 dx_2 dx_3, \quad B \in \mathfrak{B}. \quad (54)$$

Из (53) в силу тауберовой теоремы 1.3.2 из [23] следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mu_n \Rightarrow \mu,$$

т.е. для произвольного $B \in \mathfrak{B}$ такого, что $\mu(\partial B) = 0$, мы имеем:

$$\mu_n(B) \longrightarrow \mu(B) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (55)$$

Предположим для определенности, что $a(i, j, r)$ не убывает по i и не возрастает по j и $\beta > 1$, как в нашем конкретном приложении тауберовой теоремы 3. Из дальнейшего будет ясно, как поступать в других случаях. Зафиксируем произвольные $x, y, z > 0$. Для произвольных $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in (0, 1)$, используя (54) и (55) при $B = \{(x_1, x_2, x_3): x \leq x_1 \leq x(1 + \delta_1), y(1 - \delta_2) \leq x_2 \leq y, z \leq x_3 \leq z(1 + \delta_3)\}$, мы имеем:

$$\Sigma \equiv \sum^* \frac{j^{\beta-1} a(i, j, r)}{kmn\varrho(n)} \longrightarrow \delta_1 x \frac{y^\beta (1 - (1 - \delta_2)^\beta)}{\beta} \frac{z^\sigma ((1 + \delta_3)^\sigma - 1)}{\sigma} \quad (56)$$

при $n \rightarrow \infty$, где $\sum^*$ означает суммирование по $i \in [kx, kx(1 + \delta_1)]$, $j \in [my(1 - \delta_2), my]$, $r \in [nz, nz(1 + \delta_3)]$. Далее,

$$\Sigma \geq \sum^* \frac{(my(1 - \delta_2))^{\beta-1} a(kx, my, r)}{kmn\varrho(n)}. \quad (57)$$

Согласно (10) и замечанию после теоремы 3, для произвольного $\varepsilon \in (0, 1)$ найдутся такие δ_3 и n_0 , что при $n \geq n_0$ и $|r - [nz]| \leq \delta_3 nz$ выполнено неравенство

$$|a(kx, my, r) - a(kx, my, nz)| \leq \varepsilon a(kx, my, nz). \quad (58)$$

Стало быть, при $n \geq n_0$ мы получаем из (57) и (58):

$$\Sigma \geq \frac{(1 - \varepsilon) a(kx, my, nz) (y(1 - \delta_2))^{\beta-1} \sum^* 1}{m^{1-\beta} \varrho(n) mnk}. \quad (59)$$

Из (56) и (59) следует, что

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a(kx, my, nz)}{m^{1-\beta} \varrho(n)} &\leq \frac{(y(1 - \delta_2))^{1-\beta}}{1 - \varepsilon} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum mnk}{\sum^* 1} \\ &= \frac{\delta_1 x (y(1 - \delta_2))^{1-\beta} y^\beta (1 - (1 - \delta_2)^\beta) z^\sigma ((1 + \delta_3)^\sigma - 1)}{(1 - \varepsilon) \delta_1 x \beta \delta_2 y \sigma \delta_3 z} \\ &= \frac{1}{1 - \varepsilon} \frac{(1 - \delta_2)^{1-\beta} (1 - (1 - \delta_2)^\beta)}{\beta \delta_2} z^{\sigma-1} \frac{(1 + \delta_3)^\sigma - 1}{\sigma \delta_3}. \end{aligned} \quad (60)$$

Поскольку левая часть (60) не зависит от ε, δ_2 и δ_3 , то, устремляя ε, δ_2 и δ_3 к нулю в правой части (60), убеждаемся в том, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a(kx, my, nz)}{m^{1-\beta} \varrho(n)} \leq z^{\sigma-1}. \quad (61)$$

Далее положим $B' = \{(x_1, x_2, x_3): x(1 - \delta_1) \leq x_1 \leq x, y \leq x_2 \leq y(1 + \delta_2), z(1 - \delta_3) \leq x_3 \leq z\}$. Используя (54) и (55) для B' , мы имеем:

$$\Sigma' \equiv \sum^{**} \frac{j^{\beta-1} a(i, j, r)}{kmn \varrho(n)} \rightarrow \delta_1 x \frac{y^\beta ((1 + \delta_2)^\beta - 1)}{\beta} \frac{z^\sigma (1 - (1 - \delta_3)^\sigma)}{\sigma}, \quad (62)$$

где $\sum^{**}$ означает суммирование по $i \in [kx(1 - \delta_1), kx]$, $j \in [my, my(1 + \delta_2)]$, $r \in [nz(1 - \delta_3), nz]$. С учетом (58) мы получаем, что при $n \geq n_0$

$$\Sigma' \leq \frac{(1 + \varepsilon) a(kx, my, nz) (y(1 + \delta_2))^{\beta-1}}{m^{1-\beta} \varrho(n)} \frac{\sum^{**} 1}{mnk}. \quad (63)$$

Из (62) и (63) следует, что

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a(kx, my, nz)}{m^{1-\beta} \varrho(n)} &\geq \frac{(y(1 + \delta_2))^{1-\beta}}{1 + \varepsilon} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum' mnk}{\sum^{**} 1} \\ &= \frac{\delta_1 x (y(1 + \delta_2))^{1-\beta} y^\beta ((1 + \delta_2)^\beta - 1) z^\sigma (1 - (1 - \delta_3)^\sigma)}{(1 + \varepsilon) \delta_1 x \beta \delta_2 y \sigma \delta_3 z} \\ &= \frac{1}{1 + \varepsilon} \frac{(1 + \delta_2)^\beta - 1}{\beta \delta_2 (1 + \delta_2)^{\beta-1}} z^{\sigma-1} \frac{(1 - (1 - \delta_3)^\sigma)}{\sigma \delta_3}. \end{aligned} \quad (64)$$

Поскольку левая часть (64) не зависит от ε , δ_2 и δ_3 , то, устремляя ε , δ_2 и δ_3 к нулю в правой части (64), убеждаемся в том, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a(kx, my, nz)}{m^{1-\beta} \varrho(n)} \geq z^{\sigma-1}. \quad (65)$$

Из (61) и (65) следует (11). Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 2. Из лемм 1 и 2 следует, что для $a(i, j, r)$ и $\varrho(n)$, удовлетворяющих (12) и (13), и некоторого $\beta > 1$ выполнены все предположения теоремы 3. По этой теореме имеем при $m = k \leq n$, $x = y = z = 1$ и $k, n \rightarrow \infty$

$$a(k, k, n) \sim \varrho(n) m^{1-\beta},$$

откуда, учитывая (12) и (13), получаем, что

$$\mathbf{E} \exp \left(\frac{\zeta_n(k) w}{\sqrt{l(k)}} \right) \sim \exp \left(w \sqrt{l(k)} + \frac{w^2}{2} \right).$$

Иными словами, при $k, n \rightarrow \infty$, $k \leq n$

$$\mathbf{E} \exp \left(\left(\frac{\zeta_n(k) - l(k)}{\sqrt{l(k)}} \right) w \right) \rightarrow \exp \left(\frac{w^2}{2} \right).$$

Поэтому при $k, n \rightarrow \infty$, $k \leq n$ последовательность случайных величин

$$\zeta_n''(k) = \frac{\zeta_n(k) - l(k)}{\sqrt{l(k)}}$$

слабо сходится к стандартному нормальному закону. Так как $l(k) \sim \sigma \ln k$ при $k \rightarrow \infty$ (см. (4)), то отсюда следует, что и последовательность $\zeta'_n(k)$ слабо сходится к стандартному нормальному закону. Теорема 2 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Зафиксируем произвольное действительное x . Положим в равенстве (6)

$$r = \exp \left(\frac{g(n)}{\sigma} + x \frac{\sqrt{g(n)}}{\sigma} \right), \quad m = g(n) + o\left(\sqrt{g(n)}\right).$$

Мы имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \sigma \ln \eta_n(m) \leq g(n) + x \sqrt{g(n)} \right\} &= \mathbf{P} \left\{ \eta_n(m) \leq r \right\} \\ &= \mathbf{P} \left\{ \zeta_n(r) \geq m \right\} = \mathbf{P} \left\{ \zeta_n(r) \geq l(r) - l(r) + g(n) + o\left(\sqrt{g(n)}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Так как $l(r) = \sigma \ln r + o(\sqrt{\ln r}) = g(n) + (x + o(1))\sqrt{g(n)}$ (см. (3)), то

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \sigma \ln \eta_n(m) \leq g(n) + x \sqrt{g(n)} \right\} \\ &= \mathbf{P} \left\{ \zeta_n(r) \geq l(r) - g(n) - (x + o(1))\sqrt{g(n)} + g(n) + o\left(\sqrt{g(n)}\right) \right\} \\ &= \mathbf{P} \left\{ \zeta_n(r) \geq l(r) - (x + o(1))\sqrt{g(n)} \right\}. \end{aligned} \quad (66)$$

Но так как $\ln r = (1 + o(1))g(n)/\sigma$, то

$$g(n) = \sigma \ln r (1 + o(1)). \quad (67)$$

Подставляя (67) в (66), получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \sigma \ln \eta_n(m) \leq g(n) + x \sqrt{g(n)} \right\} \\ &= \mathbf{P} \left\{ \zeta_n(r) \geq l(r) - (x + o(1))\sqrt{\sigma \ln r} \right\} \rightarrow 1 - \Phi(-x) = \Phi(x) \end{aligned}$$

согласно теореме 2, где $\Phi(\cdot)$ — функция распределения стандартного нормального закона, так как $r \rightarrow \infty$, $r/n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Действительно, поскольку $(\sigma \ln n - g(n))/\sqrt{\ln n} \rightarrow +\infty$, то

$$\frac{g(n)}{\sigma} = \ln n - M(n)\sqrt{\ln n},$$

где $M(n) \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$, откуда

$$\frac{r}{n} = \exp \left(\frac{g(n)}{\sigma} - \ln n + x \frac{\sqrt{g(n)}}{\sigma} \right) = \exp \left(-M(n)\sqrt{\ln n} + O(\sqrt{\ln n}) \right) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Теорема 1 доказана.

В заключение автор выражает глубокую признательность рецензенту за ценные замечания, которые были учтены при подготовке рукописи к печати.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bender E. A.* Asymptotic methods in enumeration. — SIAM Rev., 1974, v. 16, № 4, p. 485–515; corrections: *ibid.*, 1976, v. 18, № 2, p. 292.
2. *Болотников Ю. В., Сачков В. Н., Тараканов В. Е.* Асимптотическая нормальность некоторых величин, связанных с цикловой структурой случайных подстановок. — Матем. сб., 1976, т. 99, № 1, с. 121–133.
3. *Волынец Л. М.* Пример нестандартной асимптотики числа подстановок с ограничениями на длины циклов. — Вероятностные процессы и их приложения. М.: МИЭМ, 1989, с. 85–90.
4. *Гончаров В. Л.* Из области комбинаторики. — Изв. АН СССР, 1944, т. 8, № 1, с. 3–48.
5. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Метод В. Л. Гончарова и его развитие в анализе различных моделей случайных подстановок. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 3, с. 558–566.
6. *Колчин В. Ф.* Одна задача о размещении частиц по ячейкам и циклы случайных подстановок. — Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. 16, в. 1, с. 67–82.
7. *Колчин В. Ф.* Случайные отображения. М.: Наука, 1984, 206 с.
8. *Колчин В. Ф.* О числе подстановок с ограничениями на длины циклов. — Дискретн. матем., 1989, т. 1, № 2, с. 97–109.
9. *Kolchin V. F.* The number of permutations with cycle lengths from a fixed set. — Random Graphs (Poznań, 1989), v. 2. New York: Wiley, 1992, p. 139–149.
10. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2000, 255 с.
11. *Минеев М. П., Павлов А. И.* О числе подстановок специального вида. — Матем. сб., 1976, т. 99, № 3, с. 468–476.
12. *Минеев М. П., Павлов А. И.* Об уравнении в подстановках. — Тр. МИАН, 1976, т. 142, с. 182–194.
13. *Павлов А. И.* О некоторых классах подстановок с теоретико-числовыми ограничениями на длины циклов. — Матем. сб., 1986, т. 129, № 2, с. 252–263.
14. *Павлов А. И.* О подстановках с длинами циклов из заданного множества. — Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. 31, в. 3, с. 618–619.
15. *Павлов А. И.* О числе подстановок с длинами циклов из заданного множества. — Дискретн. матем., 1991, т. 3, № 3, с. 109–123.
16. *Павлов А. И.* О двух классах подстановок с теоретико-числовыми ограничениями на длины циклов. — Матем. заметки, 1997, т. 62, № 6, с. 881–891.
17. *Сачков В. Н.* Отображения конечного множества с ограничениями на контуры и высоту. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. 17, в. 4, с. 679–694.
18. *Сачков В. Н.* Случайные отображения ограниченной высоты. — Теория вероятн. и ее примен., 1973, т. 18, в. 1, с. 122–132.
19. *Сачков В. Н.* Комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1977, 319 с.
20. *Сачков В. Н.* Вероятностные методы в комбинаторном анализе. М.: Наука, 1978, 287 с.
21. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 141 с.
22. *Якимив А. Л.* Распределение длины m -го максимального цикла случайной A -подстановки. — Дискретная матем., 2005, т. 17, № 4, с. 40–58.
23. *Якимив А. Л.* Вероятностные приложения тауберовых теорем. М.: Физматлит, 2005, 256 с.
24. *Якимив А. Л.* Предельная теорема для общего числа циклов случайной A -подстановки. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 1, с. 69–83.
25. *Якимив А. Л.* Случайные A -подстановки: сходимость к пуассоновскому процессу. — Матем. заметки, 2007, т. 81, № 6, с. 939–947.

Поступила в редакцию
1.XII.2006

Исправленный вариант
31.X.2007