Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Ахмед, А. К. Мд. Е. Салий, А. И. Володин, И. Н. Володин, Асимптотические разложения для вероятностей накрытия доверительными множествами, центрированными оценками Джеймса–Стейна, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 4, 776–785

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp25>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 13:16:37

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2006 г.

АХМЕД И. С.*, САЛИЙ А. К. Мд. Е.**,
ВОЛОДИН А. И.***, ВОЛОДИН И. Н.[†]АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
НАКРЫТИЯ ДОВЕРИТЕЛЬНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ,
ЦЕНТРИРОВАННЫМИ ОЦЕНКАМИ ДЖЕЙМСА–СТЕЙНА

Предлагается новый подход к построению асимптотических разложений вероятности накрытия доверительными множествами, центрированными оценкой Джеймса–Стейна [5] и положительной модификацией оценки Стейна [11]. Вероятности накрытия данными доверительными множествами зависят от параметра нецентральности τ^2 , как и риски этих оценок. Новый подход (отличный от подхода Бергера [1], Хванга и Каселлы [8]) позволяет получать асимптотические разложения для вероятностей накрытия как в случае $\tau \rightarrow 0$, так и при $\tau \rightarrow \infty$. Графические и числовые иллюстрации точности этих формул указывают на приемлемую точность предлагаемых аппроксимаций.

Ключевые слова и фразы: доверительные множества, оценки Джеймса–Стейна, оценка Стейна, многомерное нормальное распределение, вероятность накрытия, асимптотические разложения.

1. Введение. Рассматривается проблема доверительной оценки вектора средних значений $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ p -мерного нормального распределения с независимыми компонентами, имеющими одинаковую дисперсию $\sigma^2 = 1$. Пусть $\bar{X} = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_p)$ — вектор выборочных средних значений, вычисляемых по выборкам одинакового объема n из маргинальных распределений. Доверительное множество

$$D_{\bar{X}} = \left\{ \theta: n \sum_1^p (\theta_i - \bar{X}_i)^2 \leq c^2 \right\}$$

имеет заданный доверительный коэффициент $1 - \alpha$, если c^2 определяется через квантиль распределения хи-квадрат с p степенями свободы посредством соотношения $K_p(c^2) = 1 - \alpha$, где $K_p(\cdot)$ — функция распределения хи-квадрат.

Такое доверительное множество обладает многими оптимальными свойствами: (i) несмещенность, (ii) инвариантность, (iii) минимаксность, но, как показал

* Department of Mathematics and Statistics, University of Windsor, Windsor, Ontario N9B 3P4, Canada; e-mail: seahmed@uwindsor.ca

** School of Mathematics and Statistics, Carleton University, Ottawa, Ontario K1S 5B6, Canada; e-mail: esaleh@math.carleton.ca

*** Department of Mathematics and Statistics, University of Regina, Regina, Saskatchewan S4S 4G2 Canada; e-mail: andrei@math.uregina.ca

[†] Казанский государственный университет, кафедра математической статистики, Казань-8, ул. Кремлевская, 18, 420008 Россия; e-mail: Igor.Volodin@ksu.ru

Стейн [11], существуют также другие множества, которые обладают большей вероятностью накрытия, сохраняя свойство минимаксности. Он предлагает рассмотреть варианты доверительного множества $D_{\bar{X}}$, имеющие тот же доверительный уровень $1 - \alpha$, но центрированные другими оценками вектора θ :

$$D_{\delta} = \{\theta: n\|\theta - \delta(\bar{X})\|^2 \leq c^2\}, \quad \text{где} \quad \delta(\bar{X}) = \left(1 - \frac{p-2}{n\|\bar{X}\|^2}\right) \bar{X}$$

— оценка Джеймса–Стейна [5], и

$$D_{\delta+} = \{\theta: n\|\theta - \delta^+(\bar{X})\|^2 \leq c^2\}, \quad \text{где} \quad \delta^+(\bar{X}) = \left(1 - \frac{p-2}{n\|\bar{X}\|^2}\right) \bar{X} I(n\|\bar{X}\|^2 > p-2)$$

(в обоих случаях предполагается, что $p > 2$). В последующем эти доверительные множества изучались многими авторами: Браун [2], Бергер [1], Хванг и Каселла [4], [7], [8], Роберт и Салий [9], Салий [10] и др. Наиболее значимыми были результаты Хванга и Каселлы [7], [8], которые показали, что $D_{\delta+}$ доминирует $D_{\bar{X}}$ равномерно по всем значениям $\tau^2 = n\|\theta\|^2$ при $p \geq 4$ с заменой $p-2$ на $0.8(p-2)$. Те же авторы (см. [8]) получили аппроксимацию для вероятности накрытия, когда $\tau \rightarrow \infty$. Мы предлагаем другой подход к аппроксимации вероятности накрытия, основанный на комбинации геометрических и аналитических методов, который устанавливает следующий порядок для вероятностей накрытия:

$$\mathbf{P}(D_{\bar{X}}) \leq \mathbf{P}(D_{\delta}) \leq \mathbf{P}(D_{\delta+})$$

при любых значениях τ^2 с аналогичным упорядочиванием рисков точечных оценок.

Мы исследуем асимптотику доверительных множеств, центрированных оценкой Джеймса–Стейна и положительной версией оценки Стейна. Устанавливается, что вероятности $Q_p(\tau) = \mathbf{P}(D_{\delta})$ и $Q_p^+(\tau) = \mathbf{P}(D_{\delta+})$ зависят от значений вектора θ через параметр $\tau^2 = n\|\theta\|^2$ и являются убывающими функциями τ^2 .

Если $\tau \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned} Q_p(\tau) &= K_p(w_2(c, \tau)) - K_p(w_1(c, \tau)) + O(\tau^2) \\ &= K_p(w_2(c, 0)) - K_p(w_1(c, 0)) + O(\tau^2), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$w_{1,2}(c, \tau) = p-2 + \frac{c^2 - \tau^2}{2} \mp \sqrt{\frac{(c^2 - \tau^2)^2}{4} + c^2\tau^2 - (p-2)(\tau^2 - c^2)}. \quad (1.2)$$

При центрировании положительной версией оценки Джеймса–Стейна имеем:

$$Q_p^+(\tau) = K_p(w_2(c, \tau)) + O(\tau^2) = K_p(w_2(c, 0)) + O(\tau^2). \quad (1.3)$$

Если же $\tau \rightarrow \infty$ (ср. с известными асимптотиками Бергера [1], Хванга и Каселлы [8]), то

$$Q_p(\tau) \sim Q_p^+(\tau) = K_p(w_2(c, \tau)) + O(\tau^{-2}) = K_p(c^2) + O(\tau^{-2}). \quad (1.4)$$

Заметим, что главные члены полученных асимптотик с сохранением $w_{1,2}(c, \tau)$ вместо $w_{1,2}(c, 0)$ намного повышают точность аппроксимации. Заслуживает внимания тот факт, что для доверительного множества, центрированного положительной версией оценки Джеймса–Стейна, имеет место одна и та же асимптотическая формула как при $\tau \rightarrow 0$, так и при $\tau \rightarrow \infty$. Как показывают приведенные в конце статьи графические и числовые иллюстрации, эта формула дает исключительно точные значения для вероятности накрытия при значениях $\tau \leq c$ и дает приемлемые в практических приложениях значения при любых $\tau \geq 0$.

Как известно, область практических применений оценок Джеймса–Стейна весьма своеобразна и требует большой осторожности в интерпретации результатов сжатия традиционной оценки. В первую очередь это относится к существованию реального центра μ сжатия (в нашей статье предполагается, что $\mu = 0$, что, естественно, не ограничивает общности). Имеются также и другие проблемы с использованием данных оценок, о чем подробно пишется во втором издании монографии Лемана и Каселлы [12] по теории точечного оценивания. В то же время существует достаточно

много публикаций, где оценки Джеймса–Стейна применяются к реальным данным и приводятся численные результаты о выигрыше в квадратичном риске при использовании этих оценок. В таких ситуациях, когда применимость сжимающих оценок оправдана, основные результаты нашей статьи указывают ту область значений параметров анализируемых нормальных распределений, при которых оценки Джеймса–Стейна имеют значимое преимущество перед выборочными средними с точки зрения повышенной точности и/или надежности. Эта область определяется неравенством $\tau^2/\sigma^2 \leq K_p^{-1}(1 - \alpha)$, ибо, как показывают табличные данные и графики рис. 5, при удалении параметров распределения от этой области вероятность накрытия стремительно приближается к номинальному доверительному коэффициенту $1 - \alpha$.

2. Интегральные представления вероятности накрытия. Наше асимптотическое исследование вероятностей накрытия истинного значения θ доверительными множествами, центрированными оценками Джеймса–Стейна, основано на следующем представлении опорных функций $\sum_1^p (\theta_i - \delta_i)^2$ и $\sum_1^p (\theta_i - \delta_i^+)^2$ соответствующих доверительных множеств D_δ и D_{δ^+} .

Введем стандартные нормальные случайные величины $Z_i = (\bar{X}_i - \theta_i) \sqrt{n}$, $i = 1, \dots, p$, и положим

$$a = p - 2, \quad \tau = \left[n \sum_1^p \theta_i^2 \right]^{1/2}, \quad X = \sum_1^p Z_i^2, \quad Y = \left[\sum_1^p \theta_i^2 \right]^{-1/2} \sum_1^p \theta_i Z_i.$$

Представим события

$$A = \left\{ n \sum_1^p \bar{X}_i^2 > a \right\} \quad \text{и} \quad B = \left\{ n \sum_1^p (\delta_i(\bar{X}) - \theta_i)^2 < c^2 \right\},$$

где, напомним, $c^2 = K_p^{-1}(1 - \alpha)$, в терминах введенных величин. Имеем

$$A = \{X + 2Y\tau + \tau^2 > a\},$$

$$B = \{X(X + 2Y\tau + \tau^2) - 2aY\tau - 2aX < c^2(X + 2Y\tau + \tau^2)\},$$

ибо $X + 2Y\tau + \tau^2 > 0$. Через данные события выражаются вероятности накрытия доверительными множествами D_δ и D_{δ^+} :

$$Q_p(\tau) = \mathbf{P}(B), \quad Q_p^+(\tau) = \mathbf{P}(A^c) I(\tau < C) + \mathbf{P}(A \cap B),$$

где $I(\cdot)$ — индикатор соответствующего события. (Роберт и Салий [9] получили точное выражение для $Q_p^+(\tau)$.)

Соответствующее ортогональное преобразование вектора Z показывает, что случайным величинам X и Y соответствует стохастическое представление $Y = \xi$, $X = \chi^2 + \xi^2$, в котором стандартная нормальная случайная величина ξ и случайная величина χ^2 , распределенная как хи-квадрат с $p - 1$ степенями свободы, независимы. Такое представление может быть полезным при моделировании доверительных областей методом Монте-Карло.

Из полученного стохастического представления немедленно вытекает следующий результат.

Предложение 1. Совместная функция плотности случайных величин X и Y отлична от нуля только в области $y^2 < x$ и имеет в этой области вид

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{(p-1)/2} \Gamma((p-1)/2)} (x - y^2)^{(p-1)/2 - 1} e^{-x/2}.$$

Изучим более подробно геометрию областей на плоскости, соответствующих событиям A и B . Начнем с того, что доверительная область D_{δ^+} совпадает с объединением следующих несовместных событий:

$$\begin{aligned} & \{Y^2 < X, X + 2Y\tau + \tau^2 < a\} \\ & + \left\{ Y^2 < X, c^2 + a - X > 0, X + 2Y\tau + \tau^2 > a, \right. \\ & \quad \left. Y > \frac{(X - a)^2 - c^2\tau^2 + X(\tau^2 - c^2)}{2\tau(c^2 + a - X)} \right\} \end{aligned}$$

$$+ \left\{ Y^2 < X, \quad c^2 + a - X < 0, \quad X + 2Y\tau + \tau^2 > a, \right. \\ \left. Y < \frac{(X - a)^2 - c^2\tau^2 + X(\tau^2 - c^2)}{2\tau(c^2 + a - X)} \right\}.$$

Если изобразить эти события в виде областей на плоскости (x, y) , то границы областей, соответствующих указанным событиям, будут определяться следующими кривыми, расположенными в полуплоскости $x > 0$:

$$x = y^2, \quad y = g(x) = \frac{a - x - \tau^2}{2\tau}, \\ y = h(x) = \frac{(x - a)^2 - c^2\tau^2 + x(\tau^2 - c^2)}{2\tau(c^2 + a - x)} = \frac{1}{2\tau} \left(a - x - \tau^2 + \frac{a(\tau^2 - c^2)}{c^2 + a - x} \right).$$

Вид линейно-гиперболической функции h указывает на существенное различие в форме доверительной области при разных соотношениях величин τ , c и a .

Рис. 1

Рис. 2

Отметим сразу, что при малых (используемых на практике) значениях α квантиль $c^2 = K_p^{-1}(1 - \alpha)$ распределения хи-квадрат больше среднего значения p этого распределения, и поэтому в дальнейшем будет предполагаться, что $a - c^2 < 0$.

Если $\tau < c$, то производная функции $y = h(x)$, $x > 0$, равная

$$h'(x) = \frac{1}{2\tau} \left(-1 + \frac{a(\tau^2 - c^2)}{(c^2 + a - x)^2} \right),$$

всегда отрицательна, откуда следует, что $h(x)$ — убывающая функция в области $x > 0$ (см. рис. 1 и рис. 2). Кривая $y = h(x)$ имеет две монотонно убывающие ветви, разделяемые вертикальной асимптотой $x = a + c^2$ и наклонной асимптотой $y = g(x)$ (прямая, определяющая событие $A!$). Одна из ветвей, расположенная слева от вертикальной асимптоты и лежащая ниже асимптоты $y = g(x)$, начинается на оси OX в точке $y = (a - c^2\tau^2)/(2\tau(c^2 + a)) > 0$, пересекает ось OX в точке w_1 , если $\tau < a/c$, и остается всегда ниже этой оси при $x > 0$ в противном случае; далее эта ветвь уходит на $-\infty$, прижимаясь слева к асимптоте $x = a + c^2$. Ветвь h , расположенная справа от вертикальной асимптоты и лежащая выше асимптоты $y = g(x)$, выходит из $+\infty$, пересекает ось OX в точке w_2 и уходит на $-\infty$, когда $x \rightarrow +\infty$.

Представленная картина говорит о том, что при $\tau < c$ доверительный коэффициент области, центрированной положительной частью δ^+ оценки Стейна, определяется вероятностью события $D_2 = \{X > Y^2, X > c^2 + a - X, Y < h(X)\}$ (вся заштрихованная область на рисунке), а выигрыш в использовании оценки δ^+ вместо δ определяется вероятностью события $D_1 = \{X > Y^2, Y < c^2 + a - X, Y > h(X)\}$ (область с более интенсивной штриховкой).

Итак, при $\tau < c$

$$Q_p^+(\tau) = \iint_{D_2} f(x, y) dx dy, \quad Q_p(\tau) = \iint_{D_2} f(x, y) dx dy - \iint_{D_1} f(x, y) dx dy,$$

и остается только расставить пределы в двойных интегралах.

Два уравнения

$$(x - a)^2 - c^2 \tau^2 + x(\tau^2 - c^2) = 2\tau\sqrt{x}(c^2 + a - x), \quad (2.1a)$$

$$(x - a)^2 - c^2 \tau^2 + x(\tau^2 - c^2) = -2\tau\sqrt{x}(c^2 + a - x), \quad (2.1b)$$

определяющие 4 точки пересечения параболы $x = y^2$ с кривой $y = h(x)$, имеют 4 корня, два из которых, скажем u_1 и u_2 , при $\tau < a/c$ располагаются по разные стороны точки w_1 и стягиваются к этой точке, когда $\tau \rightarrow 0$. Два других корня, скажем, v_1 и v_2 , при любом $\tau < c$ удовлетворяют неравенствам $v_1 < w_2 < v_2$ и стягиваются к w_2 , когда $\tau \rightarrow 0$. Итак, при $\tau < a/c$ мы имеем $u_1 < w_1 < u_2 < v_1 < w_2 < v_2$, причем корни u_1 и v_1 соответствуют уравнению (2.1a), а u_2 и v_2 — уравнению (2.1b). Заметим, что достаточно решить уравнение (2.1a), получив корни u_1 и v_1 , ибо корни u_2 и v_2 уравнения (2.1b) получаются простой заменой в найденных корнях τ на $-\tau$.

Для всех $\tau < c$ представим событие D_2 в виде $D_2 = D_{w_2} - D_{v_1} + D_{v_2}$, где $D_{w_2} = \{X > Y^2, X < w_2\}$, $D_{v_1} = \{v_1 < Y < w_2, h(X) < Y < \sqrt{X}\}$, $D_{v_2} = \{w_2 < Y < v_2, -\sqrt{X} < Y < h(X)\}$ (см. рис. 1). Если $\tau < a/c$, то аналогичное представление имеется и для D_1 с заменой w_2 на w_1 и v на u . В области $a/c < \tau < c$ значение $w_1 < 0$, и уравнение $h(x) = -\sqrt{x}$ имеет слева от вертикальной асимптоты два корня, скажем, u'_1 и u'_2 (см. рис. 2). В этом случае $D_1 = \{u'_1 < X < u'_2, -\sqrt{X} < Y < h(X)\}$.

Следовательно, при всех $\tau < c$ вероятность накрытия $Q_p^+(\tau) = P(D_2) = P(D_{w_2}) + P(D_{v_2}) - P(D_{v_1})$, а вероятность $Q_p(\tau) = P(D_2) - P(D_1)$, где $P(D_1) = P(D_{w_1}) + P(D_{u_2}) - P(D_{u_1})$, если $\tau < a/c$, и $P(D_1) = P\{u'_1 < X < u'_2, -\sqrt{X} < Y < h(X)\}$ при $a/c < \tau < c$. Такое представление вероятности накрытия замечательно тем, что первое слагаемое

$$P(D_{w_2}) = P\{X < w_2\} = K_p(w_2) = K_p\left(a + \frac{c^2}{2} + \sqrt{\frac{c^4}{4} + ac^2}\right) + O(\tau^2)$$

дает главный член асимптотики $Q_p^+(\tau)$ при $\tau \rightarrow 0$ (см. (1.3)). Разность $P(D_{v_2}) - P(D_{v_1})$ дает остаточный член, который, как будет показано ниже, имеет порядок $O(\tau^2)$. Достаточно изучить асимптотику $P(D_{w_2})$, ибо для области D_{w_1} все остается справедливым с заменой v на u и w_2 на w_1 .

Сформулируем полученный результат и перейдем к изучению геометрии доверительных областей при $\tau \geq c$.

Предложение 2. Если $\tau < c$, то

$$Q_p^+(\tau) = K_p(w_2) + \int_{w_2}^{v_2} dx \int_{-\sqrt{x}}^{h(x)} f(x, y) dy - \int_{v_1}^{w_2} dx \int_{h(x)}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy.$$

Если $\tau < a/c$, то

$$Q_p(\tau) = Q_p^+(\tau) - \left[K_p(w_1) + \int_{w_1}^{u_2} dx \int_{-\sqrt{x}}^{h(x)} f(x, y) dy - \int_{u_1}^{w_1} dx \int_{h(x)}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy \right],$$

а когда $a/c \leq \tau < c$,

$$Q_p(\tau) = Q_p^+(\tau) - \int_{u'_1}^{u'_2} dx \int_{-\sqrt{x}}^{h(x)} f(x, y) dy.$$

При $\tau = c$ ветви кривой $y = h(x)$ сливаются с ее асимптотами и доверительные области ограничиваются прямыми $x = a + c^2$, $y = (a - x - c^2)/(2c)$ и параболой $x = y^2$ (см. рис. 3). Прямая $y = (a - x - c^2)/(2c)$ (наклонная асимптота) пересекает ось OX в точках $x_{1,2} = (c \mp \sqrt{a})^2$, расположенных по разные стороны от точки $x = c^2 + a$, так что справедливо следующее утверждение.

Предложение 3. Если $\tau = c$, то вероятности накрытия определяются формулами

$$Q_p^+(\tau) = K_p(c^2) + \int_{c^2+a}^{x_2} dx \int_{-\sqrt{x}}^{(a-x-c^2)/(2c)} f(x, y) dy,$$

$$Q_p(\tau) = Q_p^+(\tau) - \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{-\sqrt{x}}^{(a-x-c^2)/(2c)} f(x, y) dy.$$

В случае $\tau > c$ картина области, определяющей вероятности накрытия, значительно упрощается (см. рис. 4).

Наклонная асимптота $y = (a - \tau^2 - x)/(2\tau)$ в области $x > 0$ имеет отрицательные значения ординат и пересекает нижнюю ветвь параболы $y = -\sqrt{x}$ в точках $x_{1,2} = (\tau \mp \sqrt{a})^2$. Область под этой асимптотой, расположенной выше нижней ветви параболы, совпадает с областью A^c нулевых значений оценки δ^+ , и поэтому правую ветвь кривой $y = h(x)$, $x > c^2 + a$, расположенную ниже наклонной асимптоты, можно просто игнорировать.

Рис. 3

Рис. 4

Что касается левой ветви этой кривой, расположенной над наклонной асимптотой в области $0 < x < c^2 + a$, то она начинается с точки $y = (a^2 - \tau^2 c^2)/(2\tau(c^2 + a)) < 0$ (напомним, что $a < c^2$), пересекает нижнюю ветвь параболы в точке $x = v_2$, ось OX — в точке $x = w_2$ и верхнюю ветвь параболы — в точке $x = v_1$ и при этом $v_2 < v_1$. Заметим сразу, что $w_2 \rightarrow c^2$, когда $\tau \rightarrow \infty$, а $v_1 - v_2 \rightarrow 0$. Таким образом, вероятности накрытия устанавливает следующее предложение.

Предложение 4. Если $\tau > c$, то

$$Q_p^+(\tau) = K_p(w_2) + \int_{w_2}^{v_1} dx \int_{h(x)}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy - \int_{v_2}^{w_2} dx \int_{-\sqrt{x}}^{h(x)} f(x, y) dy + \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{-\sqrt{x}}^{(a-\tau^2-x)/(2\tau)} f(x, y) dy$$

и

$$Q_p(\tau) = K_p(w_2) + \int_{w_2}^{v_1} dx \int_{h(x)}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy - \int_{v_2}^{w_2} dx \int_{-\sqrt{x}}^{h(x)} f(x, y) dy.$$

3. Асимптотические разложения вероятности накрытия. Интегральные представления вероятности накрытия, указанные в предложениях 2 и 4 (ср. с представлениями, полученными Хвангом и Каселлой [7]), сводят задачу ее асимптотического анализа к асимптотическому разложению при $\tau \rightarrow 0$ и, соответственно, при $\tau \rightarrow \infty$ интегралов вида

$$J(\tau) = \int_w^\beta dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy,$$

где нижний предел w имеет вид (1.2), верхний предел β является одним из корней уравнений (2.1), а функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ равны или $h(x)$, или $\pm\sqrt{x}$. Начнем с асимптотики корней уравнений (2.1); как было отмечено выше, достаточно рассмотреть уравнение (2.1a). Сделаем замену $x = w + z$ (напомним, что $h(w) = 0$) и представим это уравнение в виде

$$2z(w - a) + z^2 + z(\tau^2 - c^2) = 2\tau\sqrt{w + z}(c^2 + a - w - z). \quad (3.1)$$

Лемма. Если $\tau \rightarrow 0$, то для корня уравнения (3.1) имеет место асимптотическое разложение

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(w) \tau^k, \quad (3.2)$$

а если $\eta = 1/\tau \rightarrow 0$, то

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(w) \eta^k. \quad (3.3)$$

Доказательство. Для случая $\tau \rightarrow 0$ запишем уравнение (3.1) в виде $z = \tau/f(z)$, где $f(z) = [2(c^2 + a - w - z)\sqrt{w+z}]/[2(w-a) + z + \tau^2 - c^2]$ — голоморфная в окрестности точки $z = 0$ функция и $f(0) \neq 0$. Следовательно, в силу применимости формулы Бюрмана–Лагранжа (см., например, [3, § 2.2]) имеет место разложение (3.2) с

$$\lambda_k(w) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^{k-1} f^k(z)}{dz^{k-1}} \right]_{z=0}, \quad k = 1, 2, \dots$$

В случае $\tau \rightarrow \infty$ представляем уравнение (2.1a) в терминах $\eta = 1/\tau$, в результате чего оно принимает вид $\eta(x-a)^2 - c^2 + x = \eta^2 x c^2 = 2\eta(c^2 + a - x)\sqrt{x}$. Затем делаем в этом уравнении замену $x = w + z$ и перепишем его в виде $z = \eta/f(z)$ с $f(z) = [2(c^2 + a - w - z)\sqrt{w+z}]/[1 + \eta^2(2(w-a) + z - c^2)]$, после чего опять применяем формулу Бюрмана–Лагранжа и получаем разложение (3.3).

То, что в обоих случаях функция $f(z)$ зависит от малого параметра (τ^2 или, соответственно, η^2), который естественным образом перекоцует в коэффициенты разложения, особой роли не играет — можно провести дополнительное разложение коэффициентов по этому параметру, и при этом вид разложения останется прежним.

Таким образом, для корней $u_1, u_2; v_1, v_2$ предложения 2 при $\tau \rightarrow 0$ справедливы асимптотические разложения

$$u_{1,2} = w_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(w_1)(\pm\tau)^k, \quad v_{1,2} = w_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(w_2)(\pm\tau)^k,$$

а для корней v_1, v_2 предложения 4 ($\eta = 1/\tau \rightarrow 0$) — разложения

$$v_{1,2} = w_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(w_2)(\pm\eta)^k.$$

Существенной особенностью полученных разложений является то, что разложения v_1 и v_2 (а также u_1 и u_2) имеют одинаковые коэффициенты при четных степенях τ и отличающиеся только знаком коэффициенты при нечетных степенях τ . Это обстоятельство обеспечивает порядок остаточных членов в заявленных во введении (см. формулы (1.1) и (1.3)) асимптотиках вероятностей накрытия при $\tau \rightarrow 0$. Естественно, аналогичным свойством обладают разложения корней v_1 и v_2 по степеням η , что обеспечивает вид формулы (1.4) введения. Нам остается только доказать эти формулы.

Теорема. Если $\tau \rightarrow 0$, то для вероятности накрытия истинного значения доверительной областью D_δ , центрированной оценкой Джеймса–Стейна, справедливо асимптотическое представление

$$\begin{aligned} Q_p(\tau) &= K_p \left(p - 2 + \frac{c^2 - \tau^2}{2} + \sqrt{\frac{(c^2 - \tau^2)^2}{4} + c^2 \tau^2 - (p-2)(\tau^2 - c^2)} \right) \\ &\quad - K_p \left(p - 2 + \frac{c^2 - \tau^2}{2} - \sqrt{\frac{(c^2 - \tau^2)^2}{4} + c^2 \tau^2 - (p-2)(\tau^2 - c^2)} \right) + O(\tau^2) \\ &= K_p \left(p - 2 + \frac{c^2}{2} + \sqrt{\frac{c^4}{4} + (p-2)c^2} \right) \\ &\quad - K_p \left(p - 2 + \frac{c^2}{2} - \sqrt{\frac{c^4}{4} + (p-2)c^2} \right) + O(\tau^2), \end{aligned}$$

а для вероятности накрытия доверительной областью $D_{\delta+}$, центрированной положительной версией этой оценки, — асимптотическое представление

$$\begin{aligned} Q_p^+(\tau) &= K_p \left(p - 2 + \frac{c^2 - \tau^2}{2} + \sqrt{\frac{(c^2 - \tau^2)^2}{4} + c^2 \tau^2 - (p - 2)(\tau^2 - c^2)} \right) + O(\tau^2) \\ &= K_p \left(p - 2 + \frac{c^2}{2} + \sqrt{\frac{c^4}{4} + (p - 2)c^2} \right) + O(\tau^2). \end{aligned}$$

Если же $\tau \rightarrow \infty$, то вероятности накрытия для обеих областей асимптотически эквивалентны:

$$\begin{aligned} Q_p(\tau) &\sim Q_p^+(\tau) \\ &= K_p \left(p - 2 + \frac{c^2 - \tau^2}{2} + \sqrt{\frac{(c^2 - \tau^2)^2}{4} + c^2 \tau^2 - (p - 2)(\tau^2 - c^2)} \right) + O(\tau^{-2}) \\ &= K_p(c^2) + O(\tau^{-2}). \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что при $\tau \rightarrow 0$

$$\Delta(\tau) = \int_{w_2}^{v_2} dx \int_{-\sqrt{x}}^{h(x)} f(x, y) dy - \int_{v_1}^{w_2} dx \int_{h(x)}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy = O(\tau^2);$$

тогда аналогичная асимптотика будет иметь место и для интегралов, в пределах которых присутствуют корни u_1 и u_2 .

Сделаем в первом двойном интеграле замену $x - w_2 = t(v_2 - w_2)$, во втором — замену $w_2 - x = t(w_2 - v_1)$ и воспользуемся асимптотическим представлением

$$v_2 - w_2 \sim w_2 - v_1 = -\lambda_1 \tau + O(\tau^2),$$

из которого следуют асимптотические равенства

$$h(w_2 + t(v_2 - w_2)) \sim h(w_2 - t(w_2 - v_1)) = O(\tau^2) \quad (\text{так как } h(w_{1,2}) = 0),$$

$$[w_2 + t(v_2 - w_2)]^{1/2} \sim [w_2 - t(w_2 - v_1)]^{1/2} = -\lambda_1 \tau t \sqrt{w_2} + O(\tau^2),$$

$$f(w_2 + t(v_2 - w_2), y) \sim f(w_2 - t(w_2 - v_1), y) = -\lambda_1 \tau t f(w_2, y) + O(\tau^2).$$

В результате получим, что

$$\Delta(\tau) = -\lambda_1 \tau \left[\int_0^1 dt \int_{-\sqrt{w_2}}^0 f(w_2, y) dy - \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{w_2}} f(w_2, y) dy \right] + O(\tau^2) = O(\tau^2),$$

поскольку $f(x, y)$ — четная функция аргумента y .

При $\tau \rightarrow \infty$ разность интегралов по той же причине имеет порядок $O(\tau^2)$, а последний интеграл в представлении $Q_p^+(\tau)$ (см. предложение 4) имеет порядок

$$\int_{\tau - \sqrt{a}}^{\tau + \sqrt{a}} dx \int_{-\sqrt{x}}^{(a - \tau^2 - x)/(2\tau)} f(x, y) dy = O\left(\tau^{p-2} \exp\left\{-\frac{\tau^2}{2}\right\}\right).$$

Для того чтобы убедиться в этом, достаточно сделать в интеграле по dy замену $y = -\sqrt{x}t$.

Рис. 5

Таблица 1. Точность аппроксимаций вероятностей накрытия

τ	$p = 3$		$p = 4$		$p = 5$		$p = 7$		$p = 10$	
	Q	Δ	Q	Δ	Q	Δ	Q	Δ	Q	Δ
0.0	.0288	.0000	.0396	.0000	.0445	.0000	.0483	.0000	.0496	.0000
0.5	.0280	+.0003	.0386	-.0007	.0443	+.0000	.0482	+.0000	.0496	+.0000
1.0	.0278	+.0008	.0374	-.0009	.0438	+.0001	.0480	+.0000	.0496	+.0000
1.5	.0265	+.0016	.0356	-.0011	.0430	+.0004	.0476	+.0000	.0495	+.0000
2.0	.0246	+.0020	.0332	-.0013	.0417	+.0006	.0470	+.0001	.0493	+.0000
2.5	.0216	+.0020	.0295	-.0031	.0399	+.0008	.0462	+.0002	.0491	+.0000
3.0	.0133	-.0038	.0185	-.0104	.0373	+.0007	.0450	+.0003	.0487	+.0001
3.5	.0068	-.0080	.0126	-.0133	.0303	-.0036	.0433	+.0003	.0482	+.0001
4.0	.0043	-.0084	.0096	-.0134	.0219	-.0091	.0375	-.0034	.0473	+.0001
4.5	.0031	-.0078	.0077	-.0127	.0171	-.0110	.0311	-.0075	.0444	-.0017
5.0	.0025	-.0070	.0064	-.0117	.0140	-.0114	.0266	-.0096	.0402	-.0045
5.5	.0020	-.0062	.0054	-.0106	.0118	-.0111	.0230	-.0105	.0367	-.0064
6.0	.0017	-.0055	.0046	-.0096	.0100	-.0106	.0201	-.0110	.0334	-.0078
6.5	.0014	-.0050	.0040	-.0087	.0086	-.0099	.0176	-.0110	.0302	-.0089
7.0	.0012	-.0044	.0034	-.0078	.0075	-.0092	.0156	-.0108	.0274	-.0096
7.5	.0011	-.0039	.0030	-.0071	.0066	-.0085	.0138	-.0104	.0248	-.0100
8.0	.0009	-.0036	.0027	-.0061	.0058	-.0080	.0123	-.0100	.0225	-.0102
8.5	.0008	-.0032	.0024	-.0058	.0052	-.0073	.0110	-.0094	.0205	-.0102
9.0	.0007	-.0030	.0022	-.0053	.0046	-.0068	.0099	-.0089	.0187	-.0100
9.5	.0007	-.0026	.0020	-.0049	.0042	-.0062	.0090	-.0084	.0171	-.0098
10.0	.0006	-.0024	.0018	-.0044	.0038	-.0057	.0082	-.0079	.0157	-.0094
11.0	.0005	-.0020	.0015	-.0038	.0031	-.0050	.0068	-.0070	.0133	-.0087
12.0	.0004	-.0017	.0012	-.0032	.0026	-.0043	.0058	-.0062	.0114	-.0080
14.0	.0003	-.0013	.0009	-.0024	.0019	-.0033	.0043	-.0048	.0086	-.0066
16.0	.0002	-.0010	.0007	-.0019	.0015	-.0026	.0033	-.0039	.0067	-.0054
18.0	.0002	-.0008	.0006	-.0015	.0012	-.0021	.0026	-.0032	.0054	-.0045
20.0	.0002	-.0006	.0005	-.0012	.0009	-.0016	.0022	-.0026	.0044	-.0038
22.0	.0001	-.0006	.0004	-.0010	.0008	-.0014	.0018	-.0022	.0036	-.0032
25.0	.0001	-.0004	.0001	-.0010	.0006	-.0011	.0014	-.0017	.0028	-.0025
26.0	-	-	-	-	-	-	.0013	-.0016	.0026	-.0024
28.0	-	-	-	-	-	-	.0011	-.0014	.0023	-.0020
30.0	-	-	-	-	-	-	.0010	-.0012	.0020	-.0018

4. Заключительные замечания. Используемая в доказательстве этой теоремы методика замены переменной интегрирования с последующим применением разложений Тейлора для интегралов по dy , позволяет строить асимптотические разложения для вероятностей накрытия до любой требуемой степени малого параметра. Естественно, при $\tau \rightarrow \infty$ будут получены те же асимптотические формулы, что и в работе Бергера [1] (см. также исправленные формулы, приведенные в статье Хванга и Каселлы [8]). Мы не решились выписывать последующие члены разложений из-за их громоздкости, к тому же коэффициенты разложения имеют вид интегралов такой же сложности, как и в формулах для точных значений вероятности накрытия. О точности асимптотики $K_p(w_2(c, \tau))$ для $Q_p^+(\tau)$ при значениях $p = 3, 5, 10$ и $\alpha = 0.05$ можно судить по рис. 5 и данным, представленным в таблице 1. Жирные линии на рис. 5 соответствуют точным значениям $Q_p^+(\tau)$, тонкие — асимптотическим; в таблице 1 даны значения $Q = Q_p^+(\tau) - 0.95$ и ошибки аппроксимации $\Delta = Q_p^+(\tau) - K_p(w_2(c, \tau))$.

Рисунок 5 и таблица 1 указывают на исключительно высокую точность асимптотической формулы при $\tau \leq c$, причем асимптотика дает в этой области заниженное значение вероятности накрытия, указывая, тем самым консервативное решение проблемы гарантийности доверительной вероятности. В этой области значений τ

точность асимптотики возрастает с ростом p . При $\tau > c$ точное значение вероятности накрытия убывает значительно быстрее, чем полученная асимптотика, причем ошибка аппроксимации растет с ростом p . Так, при $p = 3$ максимальная ошибка равна 0.008, а при $p = 5$ и $p = 10$ — немногим больше 0.01, и значения ошибок одинаковы в пределах точности наших вычислений. Таким образом, можно сделать вывод о практической приемлемости расчетов вероятности накрытия по асимптотическим формулам, указанным в теореме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Berger J.* A robust generalized Bayes estimator and confidence region for a multivariate normal mean. — *Ann. Statist.*, 1980, v. 8, № 4, p. 716–761.
2. *Brown L. D.* On the admissibility of invariant estimators of one or more location parameters. — *Ann. Math. Statist.*, 1966, v. 37, p. 1087–1136.
3. *de Bruijn N. G.* Asymptotic Methods in Analysis. Amsterdam: North-Holland, 1958, 200 p.
4. *Casella G., Hwang J. T.* Confidence sets and the Stein effect. — *Comm. Statist. Theory Methods*, 1984, v. 15, № 7, p. 2043–2063.
5. *James W., Stein C.* Estimation with quadratic loss. — *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1961, p. 361–380.
6. *Joshi V. M.* Inadmissibility of the usual confidence sets for the mean of a multivariate normal population. — *Ann. Math. Statist.*, 1967, v. 38, p. 1868–1875.
7. *Hwang J. T., Casella G.* Minimax confidence sets for the mean of a multivariate normal distribution. — *Ann. Statist.*, 1982, v. 10, № 3, p. 868–881.
8. *Hwang J. T., Casella G.* Improved set estimators for a multivariate normal mean. Recent results in estimation theory and related topics. — *Statist. Decisions*, 1984, suppl. 1, p. 3–16.
9. *Robert C., Saleh A. K. Md. E.* Recentered confidence sets: a review. — *Data Analysis from Statistical Foundations*. Huntington: Nova Sci. Publ., 2001, p. 295–308.
10. *Saleh A. K. Md. E.* Asymptotic properties of Stein-type confidence sets — a U -statistics approach. — *Sankhyā*, 2003, v. 65, part 2, p. 411–421.
11. *Stein C.* Confidence sets for the mean of a multivariate normal distribution. — *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, 1962, v. 24, p. 265–296.
12. *Lehmann E. L., Casella G.* *Theory of Point Estimation*, 2-nd ed. New York: Springer-Verlag, 1998, 589 p.

Поступила в редакцию
17.XI.2004

© 2006 г.

ГАПОШКИН В. Ф.*

**ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ МЕТРИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ
МНОЖЕСТВА СРЕДНИХ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ**

Получены оценки ε -энтропии множества средних арифметических для R -квазистационарных систем в зависимости от скорости убывания функции $R(n)$. Показана неулучшаемость этих оценок по порядку при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Ключевые слова и фразы: стационарные и квазистационарные последовательности, R -системы, средние арифметические, ε -энтропия множества средних, верхние и нижние оценки.

* Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), ул. Образцова, 15, 101475 Москва, Россия; e-mail: gaposhkin@hotmail.com