Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Белкина, Ю. М. Кабанов, Э. Л. Пресман,
О стохастической оптимальности для линейно-
квадратического регулятора, *Теория вероятн. и
ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 4, 661–675

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp250>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 12:37:03

© 2003 г.

БЕЛКИНА Т. А.*, КАБАНОВ Ю. М.**,
ПРЕСМАН Э. Л.*О СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ
ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА¹⁾

В работе показывается, что оптимальное на бесконечном интервале времени марковское управление $\hat{u}$ в стандартной задаче линейно-квадратического регулятора обладает следующим свойством. Существует такая константа b_* , что для любого $b > b_*$ процесс дефекта оптимального управления относительно любого конкурирующего управления, т.е. разность $J_T(\hat{u}) - J_T(u)$ между значением квадратического функционала $J_T(\hat{u})$, отвечающим оптимальному на бесконечности управлению, и значением $J_T(u)$, отвечающим конкурирующему управлению u , мажорируется на бесконечности функцией $b \ln T$, т.е. функция $b \ln T$ является верхней функцией для любого процесса дефекта. Этот результат в комбинации с примером линейно-квадратического регулятора, в котором при некотором $b > 0$ функция $b \ln T$ не является верхней функцией для некоторого процесса дефекта, дает ответ на давно стоящий вопрос о наилучшей весовой функции для чувствительных вероятностных критериев. Приводимая постановка включает так называемую задачу оптимального «трекинга».

Ключевые слова и фразы: линейно-квадратический регулятор, оптимальность почти наверное, наблюдаемость, управляемость, уравнение Риккати, закон больших чисел для мартингалов, верхние функции, процесс Орнштейна–Уленбека.

1. Введение

Рассмотрим совокупность $\mathcal{Z}$ случайных процессов $z = (z_t)$, заданных на некотором стохастическом базисе. Пусть

$$J_T(z) := F_T(z_T) + \int_0^T f_t(z_t) dt, \quad (1)$$

* ЦЭМИ РАН, Нахимовский пр., 47, 117 418 Москва, Россия.

** Университет Безансона, Франция и ЦЭМИ РАН; Youri.Kabanov@descartes.univ-fcomte.fr

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 03-01-00479, РАН, грант 105 по 6-му конкурсу-экспертизе проектов молодых ученых, и НАТО, грант CRG-972115.

где $f_t(z_t) \geq 0$ интерпретируется как текущие платежи, а $F_T(z_T)$ — как финальная плата. Следуя работе [9], мы говорим, что $\hat{z}$ *оптимально п.н. с весовой функцией g* или, коротко, *g -оптимально п.н.*, $g = (g_t)$ — положительная невозрастающая функция, если для любого $z \in \mathcal{Z}$

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} (J_T(\hat{z}) - J_T(z))^+ g_T = 0. \quad (2)$$

Эта постановка включает в себя многие частные случаи, встречающиеся в литературе. Обычно $\mathcal{Z} = \{(x, u): u \in \mathcal{U}\}$, где $x = x^u$ — решение стохастического уравнения, соответствующего управлению u , а $\mathcal{U}$ — множество допустимых управлений. Если весовая функция равна константе, то получается «overtaking» оптимальность п.н. (введенная в работе [15]). Если $g_T = 1/T$, то получается *стохастическое долговременное среднее*, которое изучалось для различных моделей (в том числе и с дискретным временем) многими авторами (см. [1], [3], [5], [11], [12], [15], [16], [18], [21], [23], а также книгу [6]). Другие близкие подходы можно найти в [14] («overtaking» оптимальность для математических ожиданий) и в [17], [2] (оптимальность по распределению с $g_T = T^{-1/2}$).

Концепция стохастической оптимальности естественным образом возникает в классической задаче на бесконечном интервале времени с ожидаемыми средними за единицу времени расходами:

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbf{E} J_T(z) \rightarrow \min. \quad (3)$$

В важном случае стохастического уравнения с постоянными коэффициентами оптимальный процесс $\hat{z}$ эргодичен. Поскольку эргодическое среднее сходится при $T \rightarrow \infty$ к ожидаемому среднему значению, то можно надеяться, что $\hat{z}$ лучше, чем любой другой эргодический z , также и в стохастическом смысле. В упомянутых выше работах было показано, что в рассматриваемых моделях $\hat{z}$ на самом деле «лучше», чем любой конкурирующий управляемый процесс (и не только эргодический) при условии, что сравнение производится в смысле (2) с $g_T = 1/T$.

В большинстве существующих работ кандидат $\hat{z}$ известен. Он возникает из решения некоторой стандартной задачи (например, (3)), а поэтому вопрос сводится к изучению семейства $\mathcal{D}$ процессов дефекта $\Delta_T := J_T(\hat{z}) - J_T(z)$ (точнее, его положительной части), $z \in \mathcal{Z}$.

Для этой цели удобно использовать следующее определение.

Возрастающая функция h является *верхней функцией* для совокупности процессов дефекта, соответствующих процессу $\hat{z}$, если для любого $z \in \mathcal{Z}$ существует конечный (п.н.) момент времени, после которого функция h мажорирует (п.н.) соответствующий процесс дефекта Δ . Цель состоит в нахождении верхней функции $\hat{h}$ наименьшего роста.

Очевидно, что весовая функция $1/T$ соответствует закону больших чисел, и, в самом деле, мартингальная версия этого закона являлась

основным средством в предшествующих работах (его использование в задачах оптимального управления восходит, по-видимому, к работе [10]). Поиск наиболее медленно убывающей весовой функции g , для которой $\hat{z}$ все еще оптимально п.н. (начатый в работе [9]), или поиск самой медленно растущей h выявляет связь изучаемого вопроса с более деликатными вероятностными результатами такими, как закон повторного логарифма.

Мы концентрируем наши усилия на классической задаче линейно-квадратического регулятора и показываем, что при соответствующих предположениях существует такая константа b , что $b \ln T$ является верхней функцией для семейства $\mathcal{D}$. Данная статья завершает исследования задачи линейно-квадратического регулятора со стохастическим критерием оптимальности. Такие исследования для не зависящих от времени коэффициентов проводились в работе [15], где в качестве конкурирующих к оптимальному управлению рассматривались только управления, задаваемые в виде синтеза, затем в работе [21] был рассмотрен скалярный случай, но с произвольными управлениями, в работах [9] и [20] результат был обобщен на многомерный случай с последовательным улучшением до $g_T = 1/T^{1/2+\varepsilon}$ и $g_T = 1/T^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, соответственно.

Для удобства читателя сначала мы сформулируем результат для стандартной модели с постоянными коэффициентами:

$$dx_t = (Ax_t + Bu_t) dt + G dw_t, \quad x_0 = \xi, \quad (4)$$

$$f_t(x_t, u_t) = \|Cx_t\|^2 + \|u_t\|^2, \quad F_T(x_T, u_T) = 0, \quad (5)$$

где w является p -мерным винеровским процессом, $\xi \in \mathbf{R}^n$, $\mathcal{U}$ состоит из адаптированных m -мерных процессов, для которых (4) имеет смысл, а матрица C симметрична и неотрицательно определена.

Пусть $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{u})$ — соответственно фазовый процесс и процесс управления, отвечающие оптимальному синтезу в задаче с критерием (3).

Теорема 1. *Предположим, что пара (A, B) стабилизируема, а (A, C) выявляема. Тогда существует такая не зависящая от ξ константа b , что $b \ln T$ является верхней функцией для семейства процессов дефекта, отвечающего всем допустимым управлениям.*

Отметим, что предположения теоремы выполняются в случае, когда пара (A, B) управляема, а пара (A, C) наблюдаема (условия, которые рассматривались в предыдущих исследованиях [15], [9], [20]).

Точное описание $\hat{u}$ и обсуждение предположений приводится ниже в разделах 2 и 4. Сформулированная выше теорема выводится из более общей теоремы, которая является основным результатом работы и формулируется для модели, с зависящими от времени коэффициентами. Хотя формулировка носит несколько технический характер, она проливает свет на свойства, необходимые для того, чтобы функция $b \ln T$ была

верхней функцией для совокупности процессов дефекта, отвечающей самому широкому классу конкурирующих управлений. Более того, неоднородная по времени постановка позволяет рассмотреть практически важный случай «трекинга» (см. [14], где рассматривались эргодические конкурирующие управления).

Идея доказательства совпадает с идеей [20]: для процесса дефекта находится мажоранта, которая является суммой квадратичной нормы процесса Орнштейна–Уленбека и непрерывного супермартингала со сносом, пропорциональным квадратичной характеристике его мартингальной части. Результат следует из этого представления, поскольку вторая компонента либо имеет предел, либо стремится к минус бесконечности, в то время как первая компонента мажорируется логарифмической функцией (см. дополнение).

Напомним, что в [19] было показано, что в одномерном случае с $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$, $C = G = 1$ существуют z^* и такая константа $b > 0$, что

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{J_T(\hat{z}) - J_T(z^*)}{\ln T} > b.$$

Заметим также, что более узкий класс конкурирующих управлений, порождающий только эргодические фазовые процессы, обладает даже так называемым свойством «overtaking» оптимальности п.н. (см. [15]). С другой стороны, если процессы $\hat{z}$ и z определяются по различным винеровским процессам, то самая медленно растущая функция имеет порядок $O(T^{1/2})$ (см. [7]).

Рассмотрим значение b_* , которое является инфимумом тех b , для которых выполняется утверждение теоремы. Как найти значение b_* ? Рассуждения в [19] дают некоторые оценки, но точное значение не известно даже для рассмотренного простого примера. Является ли функция $b_* \ln T$ верхней функцией для совокупности процессов дефекта? Этот вопрос также остается открытым.

2. Основной результат

Рассматривается модель

$$dx_t = (A_t x_t + B_t u_t) dt + l_t dt + G_t dw_t, \quad x_0 = \xi, \quad (6)$$

$$f_t(x_t, u_t) = \|C_t x_t\|^2 + \|u_t\|^2 + 2m'_t x_t, \quad F_T(x_T, u_T) = \|F_T x_T\|^2 + 2n'_T x_T, \quad (7)$$

где A, B, C, F, G, l, m и n — ограниченные (измеримые) функции времени t . Классический результат (см. [8], [4]), который следует также из

приводимого ниже тождества (23), утверждает, что для любого конечного T оптимальное управление в задаче

$$\mathbf{E} J_T(z) \rightarrow \min \quad (8)$$

единственно, имеет вид синтеза и может быть описано следующим образом.

Пусть $\Pi^T = (\Pi_t^T)_{t \leq T}$ — функция со значениями в множестве симметричных неотрицательно определенных матриц, абсолютно непрерывная и удовлетворяющая уравнению Риккати

$$\dot{\Pi}_t + \Pi_t A_t + A_t' \Pi_t - \Pi_t B_t B_t' \Pi_t + C_t^2 = 0 \quad (9)$$

с граничным условием $\Pi_T^T = F_T^2$, и пусть $r^T = (r_t^T)_{t \leq T}$ — решение уравнения

$$\dot{r}_t + (A_t' - \Pi_t B_t B_t') r_t + \Pi_t l_t + m_t = 0 \quad (10)$$

с граничным условием $r_T^T = n_T$.

Определим процесс $\hat{x}^T = (\hat{x}_t^T)_{t \leq T}$ как решение стохастического уравнения

$$d\hat{x}_t^T = (A_t - B_t B_t' \Pi_t^T) \hat{x}_t^T + (l_t - B_t B_t' r_t^T) dt + G_t dw_t, \quad \hat{x}_0^T = \xi. \quad (11)$$

Тогда

$$\hat{u}_t^T := -B_t' (\Pi_t^T \hat{x}_t^T + r_t^T) \quad (12)$$

является оптимальным управлением, которому соответствует фазовый процесс $\hat{x}^T$.

Форма синтеза, соответствующего управлению $\hat{u}^T$ в (12), не зависит от G . При естественных предположениях функции Π^T и r^T сходятся при $T \rightarrow \infty$ к некоторым функциям Π и r , определенным на всей полуоси и не зависящим от F и n . Эти функции определяют оптимальный синтез в задаче минимизации математического ожидания за единицу времени на бесконечном интервале. Как мы увидим позже, в однородном случае предположения теоремы 1 гарантируют существование соответствующих пределов. В общем случае мы приводим условия, которые гарантируют как существование пределов $\Pi_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \Pi_t^T$ и $r_t = \lim_{T \rightarrow \infty} r_t^T$, так и выполнение приводимых ниже предположений.

А. Функции A , B и C таковы, что существует абсолютно непрерывная функция $\Pi = (\Pi_t)$, которая удовлетворяет уравнению Риккати (9) и такова, что фундаментальная матрица $\Psi(t, s)$ для функции

$$\mathcal{A}_t := A_t - B_t B_t' \Pi_t$$

допускает экспоненциальную оценку

$$\|\Psi(t, s)\| \leq \gamma e^{-\kappa(t-s)}, \quad s \leq t, \quad (13)$$

с положительными константами γ и κ .

Напомним, что $\Psi(t, s)$ является решением следующего матричного уравнения:

$$\frac{\partial \Psi(t, s)}{\partial t} = \mathcal{A}_t \Psi(t, s), \quad \Psi(s, s) = I, \quad (14)$$

где I — тождественная матрица. При этом $\Psi(t, s) = \Psi(t, 0)\Psi^{-1}(s, 0)$ и

$$\frac{\partial \Psi(t, s)}{\partial s} = -\Psi(t, s) \mathcal{A}_s, \quad \Psi(s, s) = I. \quad (15)$$

Следующая гипотеза описывает свойства детерминированного линейного регулятора

$$dy_t = (A_t y_t + B_t v_t) dt, \quad y_0 = 0. \quad (16)$$

В. Существует такая константа $c_0 > 0$, что для любого $T > 0$ и любой пары $(y_t, v_t)_{t \leq T}$, удовлетворяющей (16),

$$\|y_T\|^2 + \int_0^T \|y_t\|^2 dt \leq c_0 \int_0^T (\|C_t y_t\|^2 + \|v_t\|^2) dt. \quad (17)$$

Положим

$$\hat{u}_t := -B'_t (\Pi_t \hat{x}_t + r_t), \quad (18)$$

где функция

$$r_t = \int_t^\infty \Psi'(v, t) (\Pi_v l_v + m_v) dv \quad (19)$$

является решением уравнения (10), а $\hat{x}$ — решением стохастического уравнения

$$d\hat{x}_t = (A_t - B_t B'_t \Pi_t) \hat{x}_t dt + (l_t - B_t B'_t r_t) dt + G_t dw_t, \quad \hat{x}_0 = \xi. \quad (20)$$

Очевидно, что $\hat{x}$ — фазовый процесс, соответствующий управлению $\hat{u}$.

Теорема 2. Пусть выполнены предположения **А** и **В**. Тогда существует такая константа $b > 0$, что функция $b \ln t$ является верхней функцией для всех процессов дефекта.

З а м е ч а н и е. Предположим, что Γ_t — периодическая ограниченная функция. Рассмотрим модель (4), (7) с $F_T(x, u) = 0$ и $f_t(x_t, u_t) = \|C(x_t - \Gamma_t)\|^2 + \|u_t\|^2$. Получается так называемая задача «трекинга» (см. [14]). Для этой модели справедливо утверждение теоремы, поскольку она является частным случаем (6) и (7) с $l_t = n_t = 0$ и $m_t = \Gamma_t$.

3. Доказательство основного результата

Пусть $z = (x, u)$ удовлетворяет (6) на $[0, T]$, и пусть $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{u})$ задается соотношениями (20), (18), где Π_t и r_t удовлетворяют (9), (10) с произвольным граничным условием. Положим $y := x - \hat{x}$, $v := u - \hat{u}$. Тогда пара (y, v) удовлетворяет (16) и

$$\Delta_T := J_T(\hat{z}) - J_T(z) = -\|F_T y_T\|^2 - 2y'_T(F_T \hat{x}_T + n_T) - \int_0^T (\|C_t y_t\|^2 + \|v_t\|^2) dt - 2 \int_0^T (y'_t C_t^2 \hat{x}_t + v'_t \hat{u}_t - 2y'_t m_t) dt. \quad (21)$$

Используя (9), (10) и (20), нетрудно проверить, что

$$d(\Pi_t \hat{x}_t + r_t) = -(A'_t \Pi_t + C_t^2) \hat{x}_t dt - (A'_t r_t + m_t) dt + \Pi_t G_t dw_t. \quad (22)$$

Используя (16), (22) и (18), получаем:

$$\begin{aligned} d(y'_t(\Pi_t \hat{x}_t + r_t)) &= (y'_t A'_t + v'_t B'_t)(\Pi_t \hat{x}_t + r_t) dt + y'_t d(\Pi_t \hat{x}_t + r_t) \\ &= -(y'_t C_t^2 \hat{x}_t + v'_t \hat{u}_t + y'_t m_t) dt + y'_t \Pi_t G_t dw_t. \end{aligned}$$

Подставляя во второй интеграл в (21) выражение, получающееся из этого тождества, приходим к формуле:

$$\begin{aligned} \Delta_T &= -\|F_T y_T\|^2 - \int_0^T (\|C_t y_t\|^2 + \|v_t\|^2) dt \\ &\quad + 2y'_T ((\Pi_T - F_T^2) \hat{x}_T + (r_T - n_T)) - 2 \int_0^T y'_t \Pi_t G_t dw_t. \end{aligned} \quad (23)$$

Если $\Pi_t = \Pi_t^T$, $r_t = r_t^T$, т.е. выполняются граничные условия $\Pi_T^T = F_T^2$ и $r_T^T = n_T$, то математическое ожидание левой части (23) неположительно, и, следовательно, $\hat{x}_t^T$ является (единственным) оптимальным процессом в задаче (8).

Возьмем в (23) функцию Π_t из **A**, r_t из (19). Элементарное неравенство

$$2a(d_1 + d_2) \leq 2c_0(d_1^2 + d_2^2) + a^2 c_0^{-1}$$

и условие **B** приводят к неравенству

$$\Delta_T \leq 2c_0 \left(\|(\Pi_T^{1/2} - F_T) \hat{x}_T\|^2 + (r_T - n_T)^2 \right) - \frac{1}{c_0} \int_0^T \|y_t\|^2 dt - 2 \int_0^T y'_t \Pi_t G_t dw_t.$$

Из (19) и **A** следует, что функция r_T ограничена. Поскольку G , Π , F и n также ограничены, то отсюда следует, что для некоторых $c_1, c_2 > 0$ выполняется:

$$\Delta_T \leq c_1 \|\hat{x}_T\|^2 + R_T, \quad (24)$$

где

$$R_T = c_2 - c_1 \int_0^T \|G'_t \Pi_t y_t\|^2 dt - 2 \int_0^T y'_t \Pi_t G_t dw_t. \quad (25)$$

Утверждение теоремы следует из приведенной оценки. В самом деле, в соответствии с леммой А.1 из дополнения $\limsup_{T \rightarrow \infty} R_T g_T \leq 0$ даже для $g_T = o(1)$ при $T \rightarrow \infty$. Для оценки $\|\hat{x}_T\|^2$ используем лемму А.2 из дополнения. Согласно (20) разность между $\hat{x}_T$ и процессом, задаваемым (38) с $\mathcal{A}_t = A_t - B_t B'_t \Pi_t$, равна

$$\Psi(T, 0) \xi + \int_0^T \Psi(T, t) (l_t - B_t B'_t r_t) dt.$$

Полученное выражение ограничено в силу ограниченности l , r , B и экспоненциального неравенства (13). А поэтому, в силу леммы А.2,

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\|\hat{x}_T\|^2}{\ln T} < c.$$

Теорема доказана.

4. О предположениях

В этом разделе приводятся достаточные условия для выполнения предположений основной теоремы, формулируемые в стандартных терминах для модели, задаваемой дифференциальным уравнением (16), и доказывается теорема 1.

Обозначим $\Phi(t, s)$ фундаментальную матрицу, соответствующую матрице $A = (A_t)$. Поскольку A ограничена, из леммы Гронуолла–Беллмана получаем экспоненциальную оценку

$$\|\Phi(t, s)\| \leq e^{a(t-s)}, \quad t \geq s, \quad (26)$$

с $a := \sup_r \|A_r\|$.

Положим

$$W(t, t_0) := \int_{t_0}^t \Phi(t, s) B_s B'_s \Phi'(t, s) ds,$$

$$M(t, t_0) := \int_{t_0}^t \Phi'(s, t_0) C_s^2 \Phi(s, t_0) ds.$$

Пара ограниченных матриц-функций (A, B) называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие положительные константы α и σ , что

$$W(t + \sigma, t) \geq \alpha I \quad \text{для любого } t \geq 0, \quad (27)$$

где знак неравенства между двумя матрицами означает, что их разность неотрицательно определена.

Пара ограниченных матриц-функций (A, C) называется *равномерно вполне восстанавливаемой*, если существуют такие положительные константы β и h , что

$$M(t+h, t) \geq \beta I \quad \text{для любого } t \geq 0, \quad (28)$$

или, что эквивалентно,

$$\int_t^{t+h} \|C_s \Phi(s, t) \eta\|^2 ds \geq \beta \|\eta\|^2 \quad (29)$$

для любых $t \geq 0$ и $\eta \in \mathbf{R}^n$.

Для объяснения смысла введенных понятий рассмотрим явное решение уравнения (16), задаваемое формулой Коши

$$y_t = \Phi(t, t_0) y_{t_0} + \int_{t_0}^t \Phi(t, s) B_s v_s ds. \quad (30)$$

В частности, для $v_s = B'_s \Phi'(t_1, s) \eta$, $s \in [t_0, t_1]$, получаем

$$y_{t_1} = \Phi(t_1, t_0) y_{t_0} + W(t_1, t_0) \eta.$$

Таким образом, если матрица $W(t_1, t_0)$ обратима, то из любого состояния в момент t_0 можно попасть в любое состояние в момент t_1 , т.е. система «управляема». Например, для того, чтобы попасть в момент t_1 в начало координат, находясь в момент t_0 в состоянии y_{t_0} , нужно на отрезке $[t_0, t_1]$ использовать управление, задаваемое формулой

$$\bar{v}_s = -B'_s \Phi'(t_1, s) W^{-1}(t_1, t_0) \Phi(t_1, t_0) y_{t_0}. \quad (31)$$

Матрица $W^{-1}(t_1, t_0)$ связана с минимальной «энергией управления» (измеряемой как интеграл от $\|v_s\|^2$), необходимой для перехода из одного состояния в другое. Равномерная управляемость гарантирует не только возможность перехода, но и то свойство, что энергия управления и время перехода не зависят от начального и конечного состояний.

Равномерная восстанавливаемость гарантирует, что, зная значение y_{t+h} и значения $z_s = C_s y_s$ при всех $s \in [t, t+h]$, можно определить значение y_t .

З а м е ч а н и е. Если A и C ограничены и $|\det C_t| \geq \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то пара (A, C) равномерно вполне восстанавливаема.

Лемма 1. Любое из следующих двух условий обеспечивает выполнение условия В:

(i) пара (A, C) равномерно вполне восстанавливаема;

(ii) функция A такова, что соответствующая ей фундаментальная матрица $\Phi(t, s)$ допускает экспоненциальную оценку

$$\|\Phi(t, s)\| \leq \gamma_1 e^{-\kappa_1(t-s)}, \quad t \geq s, \quad (32)$$

для некоторых $\gamma_1 > 0$ и $\kappa_1 > 0$.

Доказательство. Рассмотрим случай (i). Положим $v(t, s) := \int_s^t \Phi(t, r) B_r v_r dr$, $s \leq t$. Используя неравенство Буняковского, экспоненциальное неравенство (26), и ограниченность B , легко получить, что для любого $t \leq s + h$

$$\|v(t, s)\|^2 \leq \int_s^t \|\Phi(t, r) B_r\|^2 dr \int_s^t \|v_r\|^2 dr \leq c \int_s^{s+h} \|v_r\|^2 dr. \quad (33)$$

Здесь и в дальнейшем c обозначает константу, точное значение которой не играет роли и которая меняется от формулы к формуле.

Из представления $\Phi(\theta, t) y_t = y_\theta - v(\theta, t)$ (которое представляет собой просто формулу Коши) и из (33) вытекает, что

$$\|C_\theta \Phi(\theta, t) y_t\|^2 \leq 2(\|C_\theta y_\theta\|^2 + \|C_\theta v(\theta, t)\|^2) \leq c \left(\|C_\theta y_\theta\|^2 + \int_t^{t+h} \|v_r\|^2 dr \right)$$

при $t \leq \theta \leq t + h \leq T$. Подставляя y_t вместо η в (29) и используя полученную оценку, получаем, что для $t \leq T - h$

$$\beta \|y_t\|^2 \leq \int_t^{t+h} \|C_\theta \Phi(\theta, t) y_t\|^2 d\theta \leq c \int_t^{t+h} (\|C_s y_s\|^2 + \|v_s\|^2) ds. \quad (34)$$

Интегрируя полученное неравенство на $[0, T - h]$ и изменяя порядок интегрирования, приходим к оценке

$$\int_0^{T-h} \|y_t\|^2 dt \leq c \int_0^T (\|C_t y_t\|^2 + \|v_t\|^2) dt. \quad (35)$$

Для $t \in [T - h, T]$, используя аналогичные выкладки, получаем с помощью (34), что

$$\|y_t\|^2 \leq 2(\|\Phi(t, T - h) y_{T-h}\|^2 + \|v(t, T - h)\|^2) \leq c \int_0^T (\|C_t y_t\|^2 + \|v_t\|^2) dt.$$

Таким образом, интеграл от $\|y_t\|^2$ по $[T - h, T]$ также оценивается левой частью (35) с точностью до изменения константы. То же самое справедливо для $\|y_T\|^2$, а значит, **В** выполняется.

В случае (ii) можно получить следующую оценку, которая лучше, чем (17):

$$\|y_T\|^2 + \int_0^T \|y_t\|^2 dt \leq c_0 \int_0^T \|v_t\|^2 dt. \quad (36)$$

В самом деле, используя формулу Коши (30), ограниченность B и (32), получаем

$$\|y_t\| = \left\| \int_0^t \Phi(t, s) B_s v_s ds \right\| \leq c \int_0^t e^{-\kappa_1(t-s)} \|v_s\| ds. \quad (37)$$

Таким образом, в силу неравенства Буняковского

$$\|y_t\|^2 \leq \frac{c^2}{\kappa_1} \int_0^t e^{-\kappa_1(t-s)} \|v_s\|^2 ds$$

и

$$\int_0^T \|y_t\|^2 dt \leq \frac{c^2}{\kappa_1} \int_0^T \int_0^t e^{-\kappa_1(t-s)} \|v_s\|^2 ds dt \leq \frac{c^2}{\kappa_1^2} \int_0^T \|v_s\|^2 ds,$$

что завершает доказательство результата.

Предложение 1. Любое из следующих двух условий обеспечивает выполнение **A**, **B** и сходимость Π^T к Π и r^T к r :

(i) пара (A, B) равномерно вполне управляема, а пара (A, C) равномерно вполне восстанавливаема;

(ii) функция A такова, что соответствующая ей фундаментальная матрица $\Phi(t, s)$ допускает экспоненциальную оценку (32).

Доказательство. При наших предположениях сходимость Π^T к решению уравнения Риккати и справедливость экспоненциальной оценки (13) для Ψ^T и Ψ хорошо известны (см., например, [13]). В соответствии с (10)

$$r_t^T = \Psi^{T'}(T, t) n_T + \int_t^T \Psi^{T'}(u, t) (\Pi_u^T l_u + m_u) du,$$

и сходимость r^T к r , которое определяется из (19), следует из сходимости Π^T и экспоненциальной оценки (13) для Ψ^T . Таким образом, остается доказать только условие **A**. Хорошо известно (см., например, [13]), что для детерминированной оптимизационной задачи на $[t_0, \infty[$ с $l = m = n = 0$, $F_T = 0$ и с начальным состоянием y_{t_0} минимальное значение функционала равно $\|\Pi_{t_0}^{1/2} y_{t_0}\|^2$. Таким образом, остается проверить, что последнее свойство Π вместе с предположением о том, что (A, B) равномерно вполне управляемы, обеспечивает ограниченность Π . Для доказательства этого факта в случае (i) рассмотрим на $[t_0, \infty[$ пару $(\bar{y}, \bar{v})$, где управление $\bar{v}$ задается формулой (31) на интервале $[t_0, t_1]$, $t_1 := t_0 + \sigma$, и равно нулю вне этого интервала. Автоматически, $\bar{y}_t = 0$ для всех $t \geq t_1$. В силу определения оптимальности

$$\|\Pi_{t_0}^{1/2} y_{t_0}\|^2 \leq \int_{t_0}^{t_1} (\|C_s \bar{y}_s\|^2 + \|\bar{v}_s\|^2) ds.$$

Из определения $\bar{v}$ и $W(t_1, t_0)$ вытекает, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\bar{v}_s\|^2 ds = y_{t_0} \Phi'(t_1, t_0) W^{-1}(t_1, t_0) \Phi(t_1, t_0) y_{t_0} \leq c \|y_{t_0}\|^2.$$

Формула Коши (30) позволяет получить аналогичную оценку для интеграла от $\|C_s \bar{y}_s\|^2$. Таким образом, $\|\Pi_{t_0}^{1/2} y_{t_0}\| \leq c \|y_{t_0}\|$, что доказывает результат для случая (i).

В случае (ii) рассмотрим на $[t_0, \infty[$ пару $(\bar{y}, \bar{v})$, где $\bar{v}$ тождественно равно нулю. В силу свойства оптимальности, ограниченности C и экспоненциальной оценки для $\bar{y}$ получаем

$$\|\Pi_{t_0}^{1/2} y_{t_0}\|^2 \leq \int_{t_0}^{\infty} \|C_s \bar{y}_s\|^2 ds \leq c \|\bar{y}_{t_0}\|^2.$$

Это завершает доказательство теоремы.

Приведем теперь достаточные условия, гарантирующие выполнение предположений теоремы 2 в случае постоянных коэффициентов.

Напомним, что пара матриц (A, B) называется *управляемой*, если матрица $[B: AB: \dots: A^{n-1}B]$ имеет полный ранг. Пара матриц (A, C) является *наблюдаемой*, если (A', C') управляема.

Легко проверить, что пара постоянных матриц-функций $A = A_t$, $B = B_t$ равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда пара (A, B) управляема; аналогичное соответствие имеет место между понятиями равномерной вполне восстанавливаемости и наблюдаемости (см. [13]). Поэтому из предложения 1 непосредственно следует:

Предложение 2. *Предположим, что в модели с постоянными коэффициентами пара (A, B) управляема, а пара (A, C) наблюдаема. Тогда Π не зависит от t и выполняются условия **A** и **B**.*

Оказывается, что приведенные условия можно ослабить. А именно, справедливо следующее утверждение, которое превращает теорему 1 в следствие теоремы 2.

Предложение 3. *Предположим, что в модели с постоянными коэффициентами пара (A, B) стабилизируема, а пара (A, C) выявляема. Тогда Π не зависит от t и выполняются условия **A** и **B**.*

Используемые в формулировке понятия имеют следующий смысл. Пара матриц (A, B) называется *стабилизируемой*, если существует такая матрица K , что матрица $A + BK$ устойчива. Пара матриц (A, C) является *выявляемой*, если (A', C') стабилизируема. Из управляемости следует стабилизируемость, а значит, из наблюдаемости следует выявляемость (см., например, [8]).

Хорошо известно (см. [13]), что условие **A** остается верным при ослабленных предположениях, поэтому остается доказать **B**. Оказывается, что это утверждение предположения 3, будучи формально более общим, на самом деле является простым следствием соответствующего утверждения предложения 2 в силу теоремы разложения, которая позволяет представить в соответствующем базисе модель с выявляемыми (A, C) в так называемой канонической форме наблюдаемости

(см. [13]). Если с самого начала модель записана в этом базисе, то

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где пара (A_{11}, C_{11}) наблюдаема, а матрица A_{22} устойчива. Неравенство (17) можно переписать в виде

$$\|y_T\|^2 + \int_0^T \|y_t\|^2 dt \leq c_0 \int_0^T (\|C_{11}y_{1t}\|^2 + \|v_t\|^2) dt,$$

где y_{1t} (наблюдаемая часть y_t) включает только координаты y_t , соответствующие матрице A_{11} . Ясно, что соответствующее утверждение можно доказать, рассматривая отдельно траекторию y_{1t} (для которой результат уже известен) и y_{2t} , которая включает остальные координаты. Поскольку матрица A_{22} устойчива, можно воспользоваться леммой 1 (ii) с «управлением» $A_{21}y_{1t} + B_2v_t$.

Дополнение: два вероятностных утверждения

Для удобства читателей мы приводим версию усиленного закона больших чисел для непрерывного локального мартингала и утверждение о скорости роста «обобщенного» процесса Орнштейна–Уленбека, которое является простым следствием закона повторного логарифма для винеровского процесса.

Лемма А.1. Пусть M — локальный мартингал, $M_0 = 0$, и $c > 0$ — некоторая константа. Тогда

- (а) $M_T - c\langle M \rangle_T \rightarrow -\infty$ п.н. на $\{\langle M \rangle_\infty = \infty\}$,
- (б) $M_T - c\langle M \rangle_T \rightarrow M_\infty - c\langle M \rangle_\infty$ п.н. на $\{\langle M \rangle_\infty < \infty\}$.

Доказательство. Это утверждение следует из двух хорошо известных фактов (см., например, [22]):

$$\begin{aligned} \{\langle M \rangle_\infty < \infty\} &= \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} M_t \text{ существует и конечен} \right\} \text{ п.н.,} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} M_t / \langle M \rangle_t &= 0 \quad \text{п.н. на } \{\langle M \rangle_\infty = \infty\}. \end{aligned}$$

Лемма А.2. Пусть x — решение линейного стохастического уравнения

$$dx_t = \mathcal{A}_t x_t dt + G_t dw_t, \quad x_0 = 0, \quad (38)$$

где $\mathcal{A}$ и G — ограниченные предсказуемые процессы, а фундаментальная матрица $\Psi(t, s)$ допускает экспоненциальную оценку

$$\|\Psi(t, s)\| \leq \gamma e^{-\kappa(t-s)}, \quad s \leq t. \quad (39)$$

Тогда

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\|x_T\|}{\sqrt{\ln T}} < \text{const.} \quad (40)$$

Доказательство. Сначала мы докажем (40) для процесса $\tilde{x}$, который является решением (38) с $\mathcal{A} = -I$. Легко видеть, что в этом случае достаточно рассмотреть скалярную задачу

$$d\tilde{x}_t = -\tilde{x}_t dt + dm_t, \quad \tilde{x}_0 = 0,$$

где m — непрерывный мартингал с $d\langle m \rangle/dt \leq 1$.

Решая приведенное выше уравнение и используя классическую замену времени (которая требует расширения вероятностного пространства), получаем, что

$$\tilde{x}_t = e^{-t} \int_0^t e^s dm_s = e^{-t} M_t = e^{-t} W_{\langle M \rangle_t}, \quad (41)$$

где W — винеровский процесс и $\langle M \rangle_t \leq e^{2t}$. Таким образом,

$$\frac{|\tilde{x}_T|}{\sqrt{\ln 2T}} = \frac{|W_{\langle M \rangle_T}|}{e^T \sqrt{\ln 2T}} \leq \frac{|W_{\langle M \rangle_T}|}{\sqrt{\langle M \rangle_T \ln \ln \langle M \rangle_T}}. \quad (42)$$

Представление (41) показывает, что на множестве $\{\langle M \rangle_\infty < \infty\}$ предел $\tilde{x}_t$ равен нулю. На дополнении этого множества можно применить закон повторного логарифма для винеровского процесса.

Таким образом, (40) выполняется в случае, когда $\mathcal{A} = -I$. Для того чтобы получить результат для общего случая, положим $\Delta := x - \tilde{x}$. Тогда $d\Delta_t = \mathcal{A}_t \Delta_t dt + (\mathcal{A}_t + I) \tilde{x}_t dt$, $\Delta_0 = 0$. Следовательно,

$$\Delta_t = \int_0^t \Psi(t, s) (\mathcal{A}_s + I) \tilde{x}_s ds.$$

Выше мы доказали, что существует такая константа c , что для некоторого $t_0 = t_0(\omega)$ справедливо $\sup_{s \geq t_0} \|\tilde{x}_s\|/\sqrt{\ln s} \leq c$. Из ограниченности $\mathcal{A}$ и экспоненциальной оценки (39) вытекает, что

$$\frac{\|\Delta_T\|}{\sqrt{\ln T}} \leq \frac{1}{\sqrt{\ln T}} \int_0^{t_0} \Psi(t_0, s) (\mathcal{A}_s + I) \tilde{x}_s ds + C \sup_{t_0 \leq t \leq T} \frac{\|\tilde{x}_t\|}{\sqrt{\ln t}}$$

для некоторой константы C . Тем самым утверждение доказано.¹⁾

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Asriev A. V., Rotar' V. I.* On asymptotic optimality in probability and almost surely in dynamic control. — *Stochastics Stochastics Rep.*, 1990, v. 33, p. 1–16.
2. *Белкина Т. А., Пресман Э. Л.* Асимптотически оптимальные по распределению управления для линейной стохастической системы с квадратичным функционалом. — *Автоматика и телемеханика*, 1997, т. 58, в. 3, с. 106–115.

¹⁾ Первоначальная версия этой статьи была представлена авторами для публикации в *SIAM Journal on Control and Optimization (SICON)* и была отклонена этим журналом на основании отзыва, который, по убеждению авторов, содержит ошибочные утверждения. Подробности переписки авторов с редакцией SICON можно найти на сайте www.gcnet.ru/~elpresma. — *Прим. автора.*

3. Белкина Т. А., Ротарь В. И. Об условиях асимптотической оптимальности по вероятности и почти наверное в модели управляемого диффузионного процесса. — Автоматика и телемеханика, 1999, т. 60, в. 2, с. 46–56.
4. Bensoussan A. Stochastic Control of Partially Observable Systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
5. Borkar V. S. Optimal Control of Diffusion Processes (Pitman Research Notes in Mathematics Series, 203). Harlow: Longman, 1989.
6. Carlson D. A., Haurie A. B., Leizarowitz A. Infinite Horizon Optimal Control. Deterministic and Stochastic Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1991.
7. Dai Pra P., Di Masi G. B., Trivellato B. Almost sure optimality and optimality in probability for stochastic control problems over an infinite time horizon. — Ann. Oper. Res., 1999, v. 88, p. 161–171.
8. Дэвис М. Х. А. Линейное оценивание и стохастическое управление. М.: Наука, 1984, 202 с.
9. Di Masi G. B., Kabanov Yu. On sensitive probabilistic criteria in the linear regulator problem with the infinite horizon. — Обзорение прикладной и промышленной математики, 1998, т. 5, в. 2, с. 410–422.
10. Föllmer H., Majumdar M. On the asymptotic behavior of stochastic economic processes. Two examples from intertemporal allocation under uncertainty. — J. Math. Econom., 1978, v. 5, p. 275–287.
11. Конюхова (Белкина) Т. А. Асимптотически оптимальные по вероятности управления в задаче о линейном регуляторе с переменными параметрами. — Автоматика и телемеханика, 1994, т. 55, в. 2, с. 110–120.
12. Конюхова (Белкина) Т. А., Ротарь В. И. Управления, асимптотически оптимальные по вероятности и почти наверное в задаче о линейном регуляторе. — Автоматика и телемеханика, 1992, т. 53, в. 6, с. 65–78.
13. Kwakernaak H., Sivan R. Linear Optimal Control Systems. New York–London: Wiley-Interscience, 1972.
14. Leizarowitz A. Infinite horizon stochastic regulation and tracking with the overtaking criteria. — Stochastics, 1987, v. 22, p. 117–150.
15. Leizarowitz A. On almost sure optimization for stochastic controls systems. — Stochastics, 1988, v. 23, p. 85–107.
16. Lippman S. Maximal average-reward policies for semi-Markov decision processes with arbitrary state and action space. — Ann. Math. Statist., 1971, v. 42, p. 1717–1726.
17. Mandl P. Asymptotic ordering of probability distributions for linear controlled systems with quadratic cost. — Stochastic Differential Systems. Eds. N. Christopeit, K. Helmes, M. Kohlmann. Lecture Notes in Control and Inform. Sci., Berlin–New York: Springer-Verlag, 1986, p. 277–283.
18. Mandl P., Romera Ayllón M. R. On controlled Markov processes with average cost criterion. — Kybernetika (Prague), 1987, v. 23, p. 433–442.
19. Нагаев С. В., Пресман Э. Л. Закон повторного логарифма в одной задаче управления. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 2, с. 364–369.
20. Пресман Э. Л. Оптимальность почти наверное и по вероятности для стохастического линейно-квадратического регулятора. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 3, с. 627–632.
21. Presman E., Rotar' V., Taksar M. Optimality in probability and almost surely. The general scheme and a linear regulator problem. — Stochastics Stochastics Rep., 1993, v. 43, p. 127–137.
22. Revuz D., Yor M. Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin: Springer-Verlag, 1991.
23. Rotar' V. I. The recurrency property and optimality almost surely and in probability. New Trends in Probability and Statistics. 1. Proceedings of Bakuriany Colloquium in Honor of Yu. V. Prohorov. Utrecht: VSP, 1990.