Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Заиграев, А. В. Нагаев, Абелевы теоремы, граничные свойства сопряженных распределений и большие отклонения сумм независимых случайных векторов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 4, 701–719

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp252>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 17:25:03

© 2003 г.

ЗАИГРАЕВ А. Ю.*, НАГАЕВ А. В.*

АБЕЛЕВЫ ТЕОРЕМЫ, ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА СОПРЯЖЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ¹⁾

Рассматривается класс многомерных абсолютно непрерывных распределений. Каждое распределение имеет конечную в некотором ограниченном выпуклом множестве S производящую функцию, порождающую семейство так называемых сопряженных распределений. В центре внимания находятся предельные распределения для этого семейства, когда параметр сопряжения стремится к границе S . Как и в одномерном случае, каждое такое предельное распределение может быть получено как следствие теоремы абелева типа. Полученные результаты используются для установления локальной предельной теоремы для больших уклонений произвольно высокого порядка.

Ключевые слова и фразы: гамма-подобное распределение, локальная предельная теорема, опорная функция, правильное изменение, сверхбольшие уклонения, условие Крамера, функция уклонений.

1. Введение. Пусть случайные векторы $\xi, \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}, \dots$ со значениями в $\mathbf{R}^d$, $d \geq 1$, независимы и имеют общее существенно d -мерное распределение $\mathbf{P}_0$. Образует суммы $S_n = \xi^{(1)} + \dots + \xi^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$.

Если $\mathbf{E}|\xi|^2 < \infty$, то, согласно центральной предельной теореме, для любого A , являющегося множеством непрерывности d -мерной меры Лебега, при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{n^{-1/2}(S_n - na) \in A\} \longrightarrow \int_A \varphi_B(u) du,$$

где $a = \mathbf{E}\xi$, а $\varphi_B(u)$ — плотность случайного вектора, имеющего d -мерное нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и ковариационной матрицей $B = \mathbf{E}(\xi - a)(\xi - a)^T$.

Если множество A изменяется вместе с n таким образом, что $\inf_{x \in A} |x| \rightarrow \infty$, то возникает так называемая *проблема больших уклонений*, состоящая в нахождении асимптотики стремящейся к нулю вероятности $\mathbf{P}\{n^{-1/2}(S_n - na) \in A\}$. Нам будет далее удобно называть вероятностью больших уклонений $\mathbf{P}\{S_n - na \in A\}$ при $r_n(A) =$

* Университет Николая Коперника, Торунь, Польша.

$n^{-1/2} \inf_{x \in A} |x| \rightarrow \infty$. В случае $r_n(A) = O(n^{1/2})$ будем говорить о больших уклонениях порядка $O(n^{1/2})$. При $n^{-1/2} r_n(A) \rightarrow \infty$ можно говорить о *сверхбольших* уклонениях. В отличие от [6]–[8], нас интересует *точная асимптотика* вероятности больших уклонений, а не *грубая*, иначе *логарифмическая*, асимптотика.

В контексте точной асимптотики к настоящему времени наиболее полно изучен случай $d = 1$. Желаящему получить представление о нем можно порекомендовать обзор [21], а также работы [14], [20], [24], [26], [28], [29].

Впервые достаточно общие результаты по проблеме больших уклонений в многомерном случае были получены в [3] в предположении, что выполнено так называемое условие Крамера

$$f(s) = \mathbf{E} e^{(s, \xi)} = \int_{\mathbf{R}^d} e^{(s, x)} \mathbf{P}_0(dx) < \infty, \quad s \in S, \quad (1.1)$$

где $S \subset \mathbf{R}^d$ — существенно d -мерное множество, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$. Там же были изучены основные свойства функции $f(s)$ и *функции уклонений*

$$\rho(x) = \inf_{s \in S} f(s) e^{-(s, x)}, \quad x \in \mathbf{R}^d,$$

играющей важную роль в изучении вероятностей больших уклонений. Стоит отметить, что многие авторы функцией уклонений называют $-\ln \rho(x)$ (см., например, [4], [6]–[8]).

При выполнении условия (1.1) вероятности больших уклонений изучаются с помощью так называемых *сопряженных распределений*. Для исходного распределения $\mathbf{P}_0$ сопряженное распределение $\mathbf{P}_s$, $s \in S$, определяется с помощью соотношения

$$\mathbf{P}_s(A) = (f(s))^{-1} \int_A e^{(s, x)} \mathbf{P}_0(dx).$$

Обозначим через $\gamma(s)$ и $B(s)$ соответственно градиент и гессиан $\ln f(s)$. Легко видеть, что $\gamma(s)$ является вектором средних, а $B(s)$ — ковариационной матрицей сопряженного распределения $\mathbf{P}_s$. Поскольку исходное распределение существенно d -мерно, то $\det B(s) > 0$ и, следовательно, вектор-функция $\gamma(s)$ взаимно однозначно отображает S , область существования $f(s)$, в некоторую область $X \subset \mathbf{R}^d$. Обозначим через $s(x)$ функцию, обратную к $\gamma(s)$.

В упомянутой работе [3] были получены локальная и интегральные предельные теоремы для больших уклонений. Любопытно, что основные результаты той работы были почти через 20 лет воспроизведены в [22] без какого бы то ни было упоминания о ней.

Сформулируем одно следствие из локальной теоремы, доказанной в [3]. Пусть F — произвольное замкнутое ограниченное подмножество множества внутренних точек S , а $\gamma(F)$ — его образ при отображении γ .

Предложение 1.1. *Предположим, что при $n \geq n_0 \geq 1$ существует и ограничена $p_n(x)$ — плотность распределения суммы S_n . Если выполняется также условие Крамера (1.1), то при $n \rightarrow \infty$*

$$\sup_{x \in \gamma(F)} \left| \frac{p_n(nx)}{\psi_n(x)\rho^n(x)} - 1 \right| = o(1),$$

где $\psi_n(x) = (2\pi n)^{-d/2} [\det B(s(x))]^{-1/2}$.

В существенно более поздней работе [4] были продолжены исследования свойств функции уклонений, а также доказаны более сильные формы интегральной и локальной теорем о больших уклонениях, в которых утверждение предложения 1.1 выполняется равномерно в некотором классе исходных распределений.

Следует отметить, что в упомянутых работах так же, как и в [1], [2], [13], [15], [23], [27], [31], [32] изучался случай больших уклонений порядка $O(n^{1/2})$.

Возникает вопрос: *при каких дополнительных условиях можно снять ограничения на порядок уклонений?* Точнее, каким должно быть исходное распределение, чтобы выполнялось соотношение

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^d} \left| \frac{p_n(nx)}{\psi_n(x)\rho^n(x)} - 1 \right| = o(1)? \quad (1.2)$$

Основной целью данной работы является попытка найти хотя бы частичный ответ на этот вопрос. При этом мы рассматриваем случай, когда множество S ограничено, а $\lim_{s \rightarrow \partial S} f(s) = \infty$. В этой связи уместно вспомнить работы [17], [18], посвященные большим уклонениям на полупрямой $\mathbf{R}_+^1$. При $d = 1$ ограниченность $S = (s_-, s_+)$ означает, в частности, что $0 \leq s_+ < \infty$. Из упомянутых работ следует, что при $0 < s_+ < \infty$ случаи $f(s_+) = \infty$ (см. [17]) и $f(s_+) < \infty$ (см. [18]) отвечают совершенно разному поведению вероятностей сверхбольших уклонений. Таким образом, в данной работе нас интересует многомерный аналог случая, рассмотренного в [17].

Как обычно, при переходе к высшим размерностям возникает целый ряд вопросов. К числу таковых относятся, например, вопросы о том, как связана форма области существования производящей функции $f(s)$ со свойствами исходного распределения, как ведет себя $f(s)$ при $s \rightarrow \partial S$, что представляет собой область, в которую $\gamma(s)$ отображает S , и т.п. Ответы на эти вопросы, имеющие и самостоятельный интерес с точки зрения теории асимптотических оценок, были даны в работе [19]. Содержащиеся в ней результаты играют существенную роль в приводимых ниже рассуждениях.

Несколько слов о построении данной работы. Во втором разделе описывается один класс абсолютно непрерывных распределений, для ко-

торых справедливо соотношение (1.2). Третий раздел посвящен предельным теоремам для сопряженных распределений. Доказательство основного результата (1.2) и его статистическая интерпретация даны в заключительном четвертом разделе.

Авторы весьма признательны рецензенту за ценные замечания.

2. Формулировка основного результата. Введем следующий класс абсолютно непрерывных распределений, удовлетворяющих условию Крамера.

О п р е д е л е н и е 2.1. Для ненулевого вектора $x \in \mathbf{R}^d$ определим $e_x = |x|^{-1}x \in S^{d-1}$. Будем говорить, что функция $a(x)$ принадлежит классу $\mathcal{A}$, если

- 1) $a(x)$ непрерывна и выпукла в $\mathbf{R}^d$;
- 2) $a(x)$ однородна в том смысле, что $a(x) = |x|a(e_x)$ для всех $x \neq 0$;
- 3) $0 < \min_{e \in S^{d-1}} a(e) \leq \max_{e \in S^{d-1}} a(e) < \infty$.

Каждая функция $a(x) \in \mathcal{A}$ является опорной для некоторого ограниченного выпуклого множества, имеющего начало координат своей внутренней точкой (см., например, [30, гл. 3, § 13]).

Следующее определение правильно изменяющейся функции в $\mathbf{R}^d$ стоит сравнить с определением, приведенным в [25, гл. 5.4.2].

О п р е д е л е н и е 2.2. Пусть неотрицательная функция $\lambda(e)$ непрерывна на единичной сфере S^{d-1} . Будем говорить, что функция $b(x)$, $x \in \mathbf{R}^d$, (β, λ) -правильно изменяется, если при $|x| \rightarrow \infty$

$$\sup_{e_x \in E_\lambda} \left| \frac{b(x)}{r_\beta(|x|)} - \lambda(e_x) \right| = o(1),$$

где $r_\beta(t)$ правильно изменяется при $t \rightarrow \infty$ с показателем β , а $E_\lambda = \{e \in S^{d-1} : \lambda(e) > 0\}$. Если $E_\lambda = S^{d-1}$, то говорим просто о β -правильном изменении.

Условимся обозначать через χ_{d-1} нормированную меру Хаара на S^{d-1} .

Рассмотрим плотность вида

$$p(x) = b(x)e^{-a(x)}, \quad x \in \mathbf{R}^d, \quad (2.1)$$

где $a(x) \in \mathcal{A}$, а $b(x)$ — β -правильно изменяется при $|x| \rightarrow \infty$.

В частном случае, когда

$$b(x) = \frac{q(e_x)|x|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+d-1)}, \quad \alpha+d-1 > 0,$$

где $\int_{S^{d-1}} q(e)(a(e))^{-\alpha-d+1} \chi_{d-1}(de) = 1$, получаем плотность

$$p(x) = g_\alpha(x; a, q) = \frac{q(e_x)|x|^{\alpha-1}e^{-a(x)}}{\Gamma(\alpha+d-1)}, \quad (2.2)$$

которую можно с полным основанием назвать d -мерной гамма-плотностью.

В отличие от одномерного случая параметрического семейства гамма-распределений с общей плотностью вида

$$p(x) = g_\alpha(x; \lambda) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0, \quad (2.3)$$

где $\lambda > 0$, $\alpha > 0$, в многомерном случае плотности вида (2.2) образуют полупараметрическое семейство.

Гамма-распределение в $\mathbf{R}^1$, подобно нормальному, обладает свойством воспроизводимости при переходе к сопряженным распределениям. Точнее, пусть $p_s(x)$ — плотность, отвечающая сопряженному распределению $\mathbf{P}_s$. Легко понять, что сопряженная к (2.3) плотность имеет вид

$$p_s(x) = g_\alpha^{(s)}(x; \lambda) = g_\alpha(x; \lambda - s), \quad s < \lambda.$$

Аналогично этому при $d > 1$ и $p(x) = g_\alpha(x; a, q)$ производящая функция имеет вид

$$f(s) = \int_{S^{d-1}} q(e)(a(e) - \langle s, e \rangle)^{-\alpha-d+1} \chi_{d-1}(de),$$

и, следовательно,

$$p_s(x) = g_\alpha^{(s)}(x; a, q) = g_\alpha(x; a_s, q_s),$$

где

$$a_s(\varepsilon) = a(\varepsilon) - \langle s, \varepsilon \rangle, \quad q_s(\varepsilon) = \frac{q(\varepsilon)}{\int_{S^{d-1}} q(e)(a(e) - \langle s, e \rangle)^{-\alpha-d+1} \chi_{d-1}(de)}.$$

Таким образом, класс распределений (2.2) замкнут относительно преобразования Крамера — перехода к сопряженному распределению.

Из определения 2.2 и формулы (2.2) нетрудно понять, что плотность вида (2.1), где $b(x)$ — $(\alpha - 1)$ -правильно изменяется с $\alpha > 1 - d$, при $|x| \rightarrow \infty$ с точностью до медленно изменяющейся функции ведет себя как введенная нами d -мерная гамма-плотность с $q(e) = \lambda(e) \Gamma(\alpha + d - 1)$. Поэтому такие плотности мы называем *асимптотически гамма-подобными* или просто *гамма-подобными*.

В дальнейшем всюду мы рассматриваем только такие плотности.

Легко понять, что класс гамма-подобных плотностей является достаточно богатым. Помимо d -мерных гамма-плотностей он содержит, например, эллипсоидальные плотности вида

$$p(x) = K_d (x^T A x)^{(\alpha-1)/2} \exp(- (x^T A x)^{1/2}), \quad K_d > 0,$$

где A — положительно определенная матрица.

Если $a(x) \in \mathcal{A}$, а S — соответствующее ей, как опорной функции, ограниченное выпуклое множество, то, согласно определению,

$$a(x) = \sup_{y \in S} \langle y, x \rangle = |x| \sup_{y \in S} \langle y, e_x \rangle = |x| a(e_x), \quad x \in \mathbf{R}^d.$$

Рассмотрим функцию

$$k(y) = \inf\{\lambda \geq 0: y \in \lambda S\}, \quad y \in \mathbf{R}^d.$$

Известно (см., например, [30, гл. 3, § 15]), что

$$k(y) = \sup_{x \neq 0} \frac{\langle y, x \rangle}{a(x)} = |y| \sup_{e \in S^{d-1}} \frac{\langle e_y, e \rangle}{a(e)}.$$

Положим $h(e) = 1/k(e)$. Тогда множество внутренних точек S допускает представление

$$\text{int } S = \{s: s = te, 0 \leq t < h(e)\}. \quad (2.4)$$

Заметим, что функции $a(e)$ и $k(y)$ иногда называют функциями Минковского.

В работе [19] была установлена форма области существования производящей функции $f(s) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{(s,x)} p(x) dx$. Оказывается, если $p(x)$ имеет представление (2.1), где $a(x) \in \mathcal{A}$, а $b(x)$ — β -правильно изменяется при $|x| \rightarrow \infty$, то производящая функция $f(s)$ ограничена в $\text{int } S$, где S — ограниченное выпуклое множество, содержащее начало координат, для которого $a(x)$ является опорной функцией. И наоборот, для любого ограниченного выпуклого множества S такого, что $0 \in \text{int } S$, существует плотность вида (2.1), имеющая S областью существования $f(s)$.

Заметим, что при $\beta \geq -d$ область существования $f(s)$ открыта, поскольку $f(te) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow h(e)$. Если же $\beta < -d$, то $f(h(e)e) < \infty$, т.е. $f(s)$ конечна в замкнутой области $S = \{s: s = te, 0 \leq t \leq h(e)\}$. Как уже отмечалось во введении, нас интересует случай открытого множества существования $f(s)$.

Перейдем теперь к формулировке основного результата нашей работы. Обозначим $\Delta_e(\varepsilon) = a(\varepsilon) - h(e) \langle e, \varepsilon \rangle$, где $h(e)$ имеет тот же смысл, что и в (2.4). Нам потребуются следующие предположения.

(А) Для любого направления $e \in S^{d-1}$ множество

$$\arg \min_{\varepsilon \in S^{d-1}: \langle e, \varepsilon \rangle > 0} [a(\varepsilon) \langle e, \varepsilon \rangle^{-1}]$$

содержит единственную точку $\varepsilon' = \varepsilon'(e)$.

(В) Для любого направления $e \in S^{d-1}$ функция $\Delta_e(\varepsilon)$ в окрестности точки $\varepsilon'(e)$ допускает представление

$$\Delta_e(\varepsilon) = 2^{-1}(\varepsilon - \varepsilon'(e))^T \Lambda_e(\varepsilon - \varepsilon'(e)) + w_e(\varepsilon),$$

где матрица Λ_e неотрицательно определена и имеет ранг $d - 1$, а $|w_e(\varepsilon)| = o(|\varepsilon - \varepsilon'(e)|^2)$. При этом матрица Λ_e непрерывна по $e \in S^{d-1}$, $\Lambda_e \varepsilon'(e) = 0$ и

$$0 < \min_{e \in S^{d-1}} \min_j \lambda_j(e) \leq \max_{e \in S^{d-1}} \max_j \lambda_j(e) < \infty, \quad j = 1, \dots, d - 1,$$

где $\{\lambda_j(e)\}_{j=1}^{d-1}$ — ненулевые собственные числа Λ_e , а

$$\sup_{e \in S^{d-1}} \sup_{(\varepsilon: |\varepsilon - \varepsilon'(e)| \leq t)} |w_e(\varepsilon)| \leq w(t) = o(t^2), \quad t \rightarrow 0.$$

(C) Для $\varepsilon \in S^{d-1}$ и всех достаточно малых $\delta > 0$

$$\min_{e \in S^{d-1}} \min_{(\varepsilon \in S^{d-1}: |\varepsilon - \varepsilon'(e)| > \delta)} \Delta_e(\varepsilon) = d(\delta) > 0.$$

Теорема 2.1. Если гамма-подобная плотность удовлетворяет условиям (A), (B) и (C), то справедливо (1.2).

Прежде чем приступить к доказательству сформулированной теоремы, уместно заметить следующее.

Из условия (A), в частности, следует, что в каждой точке $\varepsilon'(e)$ существует только одна опорная гиперплоскость к S , т.е. граница выпуклой области S не имеет угловых точек. Более того, кривизна границы равномерно положительна и ограничена. Это справедливо, например, в случае, когда S — эллипсоид, но не имеет места в случае, когда, например, S — квадрат.

Пример 2.1. Пусть

$$p(x) = b(x)e^{-(x^T B x)^{1/2}}, \quad x \in \mathbf{R}^d,$$

где функция $b(x)$ β -правильно изменяется при $|x| \rightarrow \infty$ с $\beta \geq -d$, а B — положительно определенная матрица.

Нетрудно видеть, что в этих условиях

$$a(e) = (e^T B e)^{1/2}, \quad h(e) = (e^T B^{-1} e)^{-1/2}, \quad e \in S^{d-1},$$

т.е. область S представляет собой эллипсоид

$$S = \{s \in \mathbf{R}^d: s = te, 0 \leq t < (e^T B^{-1} e)^{-1/2}\}.$$

В следующем примере граница области S имеет угловые точки.

Пример 2.2. Пусть $d = 2$, а

$$p(x) = b(x)e^{-|x_1| - |x_2|}, \quad x \in \mathbf{R}^2,$$

где функция $b(x)$ β -правильно изменяется при $|x| \rightarrow \infty$ с $\beta \geq -2$.

Нетрудно видеть, что в этих условиях

$$a(e) = |e_1| + |e_2|, \quad h(e) = \min\{|e_1|^{-1}, |e_2|^{-1}\}, \quad e \in S^1,$$

т.е. множество S представляет собой квадрат

$$S = \{(s_1, s_2): \max\{|s_1|, |s_2|\} < 1\}.$$

Оказывается, что при $s \rightarrow s' \in \partial S$ поведение производящей функции $f(s)$ существенно зависит от того, является ли s' угловой точкой или нет. Разнообразие в поведении производящей функции вблизи границы области существования приводит к большему разнообразию предельных законов для сопряженных распределений. Изучению таких случаев будет посвящена отдельная работа.

3. Предельные теоремы для сопряженных распределений.

3.1. Теорема абелева типа. Условия (А), (В) и (С) являются равномерными аналогами так же обозначенных условий в [19]. Поэтому утверждение теоремы 1.3 из цитируемой работы выполняется равномерно по направлениям $e \in S^{d-1}$.

Имеет смысл привести точную формулировку равномерного аналога этой теоремы.

Рассмотрим семейство функций

$$f^{(e)}(\tau) = f\left((h(e) - \sigma(e)\tau)e\right), \quad e \in S^{d-1},$$

где $0 < \tau < \min_{e \in S^{d-1}} \sigma^{-1}(e)h(e) = \min_{e \in S^{d-1}} a(e)$, а $\sigma(e) = \langle \varepsilon'(e), e \rangle^{-1}$.

Теорема 3.1. Пусть $p(x)$ гамма-подобна с $\alpha > -(d-1)/2$ и выполнены условия (А), (В) и (С). Тогда при $\tau \downarrow 0$

$$\sup_{e \in S^{d-1}} \left| \frac{\tau^{\alpha+(d-1)/2} f^{(e)}(\tau)}{l(\tau^{-1})} - c_\alpha g(e) \right| = o(1),$$

где $c_\alpha = \Gamma(\alpha + (d-1)/2)(2\pi)^{(d-1)/2}$, а

$$g(e) = \lambda(\varepsilon'(e))(\lambda_1(e) \cdots \lambda_{d-1}(e))^{-1/2} = \lambda(\varepsilon'(e))(\det \bar{\Lambda}_e^{(0)})^{-1/2},$$

$$\bar{\Lambda}_e^{(0)} = \text{diag}(\lambda_1(e), \dots, \lambda_{d-1}(e)).$$

Пусть $e_\tau \rightarrow e$ при $\tau \rightarrow 0$. Из теоремы 3.1 следует, что

$$\left| \frac{\tau^{\alpha+(d-1)/2} f^{(e_\tau)}(\tau)}{l(\tau^{-1})} - c_\alpha g(e) \right| = o(1)$$

при любой скорости приближения e_τ к пределу. Это означает, что нами установлена сильная форма абелевой теоремы, в которой нет ограничений на характер сближения аргумента с границей области существования производящей функции.

Положим для $q > 1$

$$I_q(s) = \int_{\mathbf{R}^d} (e^{(s,x)} p(x))^q dx,$$

$$I_q^{(e)}(\tau) = I_q\left((h(e) - \sigma(e)\tau)e\right), \quad e \in S^{d-1}, \quad 0 < \tau < \min_{e \in S^{d-1}} a(e).$$

Повторяя с очевидными изменениями рассуждения, приводящие к утверждению теоремы 1.3 в [19] и теоремы 3.1, можно показать, что при $q(\alpha-1) + (d+1)/2 > 0$ и $\tau \downarrow 0$

$$\sup_{e \in S^{d-1}} \left| \frac{\tau^{q(\alpha-1)+(d+1)/2} I_q^{(e)}(\tau)}{l^q(\tau^{-1})} - c_{\alpha,q} g_q(e) \right| = o(1), \quad (3.1)$$

где $c_{\alpha,q} = \Gamma(q(\alpha-1) + (d+1)/2) q^{-q(\alpha-1)-d} (2\pi)^{(d-1)/2}$, $g_q(e) = \lambda^q(\varepsilon'(e))(\lambda_1(e) \cdots \lambda_{d-1}(e))^{-1/2}$. Это предельное соотношение нам понадобится позже.

Следуя доказательству теоремы 1.3 в [19] и теоремы 3.1 нетрудно также показать, что при $s = (h(e) - \sigma(e)\tau)e$, $\tau \downarrow 0$, для всех $i = 1, \dots, d$

$$\sup_{e \in S^{d-1}} \left| \frac{\tau^{\alpha+(d+1)/2} \partial f(s) / \partial s_i}{l(\tau^{-1})} - c'_\alpha g(e) \varepsilon'_i(e) \right| = o(1),$$

где $c'_\alpha = \Gamma(\alpha + (d+1)/2)(2\pi)^{(d-1)/2}$, а $\varepsilon'(e) = (\varepsilon'_1(e), \dots, \varepsilon'_d(e))^T$. Вместе с теоремой 3.1 это дает

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \sup_{e \in S^{d-1}} \left| \tau \gamma((h(e) - \sigma(e)\tau)e) - \left(\alpha + \frac{d-1}{2} \right) \varepsilon'(e) \right| = 0, \quad (3.2)$$

где, напомним, $\gamma(s) = \text{grad} \ln f(s)$ — вектор средних для сопряженного распределения.

3.2. Предельные теоремы для сопряженных распределений.

В работах [12], [16], [17] изучались вероятности больших отклонений произвольно высокого порядка для сумм скалярных случайных величин. При этом оказалось, что важно знать поведение сопряженного распределения вблизи границы области изменения параметра s . В частности, было установлено, что при соответствующей нормировке сопряженное распределение сходится либо к нормальному, либо к гамма-распределению. Разумеется, это происходит при определенной правильности изменения хвостов исходного распределения.

Здесь мы показываем, что нечто подобное имеет место и в случае многомерных сопряженных распределений. Во всяком случае, гамма-подобные распределения приводят к весьма интересным предельным законам для сопряженных к ним распределений.

Пусть $p^{(s)}(x)$ — плотность сопряженного распределения $\mathbf{P}_s$, т.е.

$$p^{(s)}(x) = \frac{e^{(s,x)} p(x)}{f(s)}, \quad x \in \mathbf{R}^d, \quad s \in S.$$

Рассмотрим ортогональное преобразование C_e , которое переводит вектор $\varepsilon^{(d)} = (0, \dots, 0, 1)^T$ в $\varepsilon'(e)$, т.е. $C_e \varepsilon^{(d)} = \varepsilon'(e)$. Положим $p^{(s)}(C_e x) = p_e^{(s)}(x)$. Если случайный вектор ξ имеет плотность распределения $p^{(s)}(x)$, то, как легко понять, $p_e^{(s)}(x)$ отвечает случайному вектору $C_e^T \xi$.

Обозначим векторы из первых $d-1$ компонент x через y , а последнюю компоненту x обозначим z . Таким образом,

$$x = (y, z), \quad p_e^{(s)}(x) = p_e^{(s)}(y, z).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. В условиях теоремы 3.1 при $s = (h(e) - \sigma(e)\tau)e$, $\tau \downarrow 0$, и любом $\delta > 0$

$$\sup_{e \in S^{d-1}} \sup_{y \in \mathbf{R}^{d-1}, z \geq \delta} \left| \tau^{-(d+1)/2} p_e^{(s)}(\tau^{-1/2} y, \tau^{-1} z) - \pi_e(y, z) \right| = o(1),$$

где

$$\pi_e(y, z) = \frac{z^{\alpha+(d-3)/2} e^{-z}}{\Gamma(\alpha + (d-1)/2)} \varphi_{B_{e,z}}(y),$$

а $\varphi_{B_{e,z}}$ — плотность $(d-1)$ -мерного нормального распределения с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей $B_{e,z} = z(\bar{\Lambda}_e^{(0)})^{-1}$.

Прежде чем доказывать сформулированную теорему, сделаем ряд замечаний.

Нетрудно понять, что последняя компонента случайного вектора, имеющего плотность распределения $\pi_e(y, z)$, распределена по закону гамма с параметром формы $\alpha + (d-1)/2$. В то же время условное распределение первых $d-1$ компонент при условии, что последняя принимает значение z , является $(d-1)$ -мерным нормальным с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей $B_{e,z}$. Последнее означает, что маргинальное распределение первых $d-1$ компонент представляет собой смесь нормальных распределений, в которой в качестве параметра смеси выступает масштаб, а весовой функцией является плотность упомянутого гамма-распределения.

Утверждение теоремы допускает простую интерпретацию. Представим случайный вектор ξ , имеющий $p^{(s)}(x)$ плотностью своего распределения, в виде

$$\xi = \xi' + \langle \xi, \varepsilon'(e) \rangle \varepsilon'(e).$$

Из сформулированной теоремы следует, что при $s = (h(e) - \sigma(e)\tau)e$, $\tau \downarrow 0$, составляющая $\langle \xi, \varepsilon'(e) \rangle$ имеет в качестве предельного закона гамма-распределение, тогда как вектор ξ' — смесь $(d-1)$ -мерных нормальных распределений.

Нетрудно также понять, что нельзя без дополнительных ограничений, налагаемых на α , снять в теореме 3.2 ограничения снизу на z . Действительно, при $x = 0$, согласно теореме 1.3 в [19], имеем

$$\tau^{-(d+1)/2} p^{(s)}(0) = \frac{\tau^{-(d+1)/2} p(0)}{f(s)} \sim \frac{c\tau^{\alpha-1}}{l(\tau^{-1})},$$

если, разумеется, $0 < p(0) < \infty$ (ср. с леммой 5 в [17]).

Доказательство теоремы 3.2. Далее на протяжении оставшейся части работы c будет обозначать положительную постоянную, конкретное значение которой для нас неважно, т.е. считается, что $c+c=c$, $c^2=c$ и т.д. Через $\omega(t)$ обозначим произвольную неотрицательную функцию такую, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = 0$, а через θ — любую величину, принимающую значения из интервала $[-1, 1]$.

Зафиксируем $\delta > 0$, после чего запишем

$$\begin{aligned} S &= \sup_{e \in S^{d-1}} \sup_{y \in \mathbf{R}^{d-1}, z \geq \delta} \left| \tau^{-(d+1)/2} p_e^{(s)}(\tau^{-1/2} y, \tau^{-1} z) - \pi_e(y, z) \right| \\ &= \sup_{e \in S^{d-1}} \max(S_1, S_2), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$S_1 = \sup_{(x=(y,z): x \in Y'_{12})} \left| \tau^{-(d+1)/2} p_e^{(s)}(\tau^{-1/2}y, \tau^{-1}z) - \pi_e(y, z) \right|,$$

$$S_2 = \sup_{(x=(y,z): x \notin Y'_{12}, z \geq \delta)} \left| \tau^{-(d+1)/2} p_e^{(s)}(\tau^{-1/2}y, \tau^{-1}z) - \pi_e(y, z) \right|,$$

а $Y'_{12} = \{x = (y, z): |y| \leq M, \delta \leq z \leq N\}$, где M и N — произвольно большие положительные числа.

Для $x = (y, z) \in Y_{12} = \{x: |y| \leq M\tau^{-1/2}, \delta \leq z\tau \leq N\}$ имеем (см. оценку $f_{12}(s)$ в доказательстве теоремы 1.3 в [19])

$$\bar{\varepsilon} = z^{-1}y\tau^{1/2} + O(\tau^{3/2}), \quad \varepsilon_d = 1 + O(\tau), \quad \sigma(e) = e_d^{-1} + O(\tau),$$

и, следовательно,

$$\bar{\varepsilon}^T \bar{\Lambda}_e^{(0)} \bar{\varepsilon} = \tau z^{-2} y^T \bar{\Lambda}_e^{(0)} y + o(\tau), \quad \tau \sigma(e) \langle e, \varepsilon \rangle = \tau + O(\tau^{3/2}),$$

где $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d-1})^T$. Поэтому $\langle s, x \rangle - a(x) = -z - (2z)^{-1} y^T \bar{\Lambda}_e^{(0)} y + o(1)$, откуда ввиду теоремы 3.1 и (2.1), где, напоминаем, $\beta = \alpha - 1$, получаем $\tau^{-(d+1)/2} p_e^{(s)}(\tau^{-1/2}y, \tau^{-1}z) = \pi_e(y, z) + o(1)$ равномерно по $x \in Y'_{12}$ и, конечно же, по $e \in S^{d-1}$. Таким образом,

$$S_1 = o(1) \quad (3.4)$$

равномерно по $e \in S^{d-1}$.

Приступим к оценке S_2 в (3.3). Легко видеть, что

$$S_2 \leq \sup_{x \notin Y'_{12}, z \geq \delta} \pi_e(y, z) + \sup_{x \notin Y'_{12}, z \geq \delta} \tau^{-(d+1)/2} p_e^{(s)}(\tau^{-1/2}y, \tau^{-1}z) = S_{21} + S_{22}. \quad (3.5)$$

Далее, из определения $\pi_e(y, z)$ следует, что

$$S_{21} \leq c \sup_{z > N} (z^{\alpha'-1} e^{-z}) + c \sup_{z \geq \delta} (z^{\alpha'-1} e^{-z-cM^2 z^{-1}}), \quad \alpha' = \alpha + \frac{d-1}{2}.$$

Поскольку δ зафиксировано, то

$$\begin{aligned} \sup_{z \geq \delta} (z^{\alpha'-1} e^{-z-cM^2 z^{-1}}) &\leq \sup_{z \geq \delta} (z^{\alpha'-1} e^{-z/2}) \sup_{z > 0} (e^{-z/2-cM^2 z^{-1}}) \\ &= e^{-cM} \sup_{z \geq \delta} (z^{\alpha'-1} e^{-z/2}) = \omega(M). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$S_{21} \leq \omega(M) + \omega(N). \quad (3.6)$$

Воспользуемся обозначениями X_2, X_3, X_{12} и X_{13} из доказательства теоремы 1.3 в [19], поменяв в них только местами δ и δ' . Заметим, что область Y'_{12} , очевидным образом связанная с Y_{12} , отвечает области X_{12} в доказательстве теоремы 1.3 в [19]. Не ограничивая общности, можно считать, что $X_{12} \subset Y_{12}$, т.е. $\mathbf{R}^d \setminus Y_{12} \subset \mathbf{R}^d \setminus X_{12}$, откуда

$$S_{22} \leq \max(S', S'', S'''), \quad (3.7)$$

где справа стоят супремумы от $\tau^{-(d+1)/2} p_e^{(s)}(y, z)$ по областям X'_2, X'_3 и X_{13} соответственно, где $X'_i = X_i \cap \{x: z \geq \delta \tau^{-1}\}$, $i = 2, 3$. При $x \in X'_2$ имеем

$$\langle s, x \rangle - a(x) \leq -cM^2\tau|x|, \quad b(x) \leq c|x|^{\alpha-1}l(|x|^{-1}),$$

откуда, согласно (2.1) и теореме 3.1,

$$\begin{aligned} \tau^{-(d+1)/2} p_e^{(s)}(x) &\leq c(\tau|x|)^{\alpha-1} \frac{l(|x|)}{l(1/\tau)} e^{-cM^2\tau|x|} \\ &\leq c(\tau|x|)^{\alpha-1} \max((\tau|x|)^\eta, (\tau|x|)^{-\eta}) e^{-cM^2\tau|x|} = \omega(M), \quad \eta > 0. \end{aligned}$$

Напомним, что δ фиксировано, а $\tau|x| \geq \delta$. Таким образом, $S' \leq \omega(M)$ равномерно по $e \in S^{d-1}$. При $x \in X'_3$ в соответствии с условием (C) имеем при всех достаточно малых τ

$$\langle s, x \rangle - a(x) \leq -c|x|, \quad b(x) \leq c|x|^{\alpha-1}l(|x|^{-1}).$$

С помощью (2.1) и теоремы 3.1 получаем

$$\tau^{-(d+1)/2} p_e^{(s)}(x) \leq c \sup_{u \geq \delta} (u^{\alpha-1} \max(u^\eta, u^{-\eta}) e^{-(c/\tau)u}) = o(1), \quad \eta > 0.$$

Иными словами, $S'' = o(1)$ равномерно по $e \in S^{d-1}$. Если же $x \in X_{13}$, то

$$\tau^{-(d+1)/2} p_e^{(s)}(x) \leq c(\tau|x|)^{\alpha-1+\eta} \frac{l(|x|)}{l(\tau^{-1})} e^{-c\tau|x|} \leq \omega(M), \quad \eta > 0.$$

Тем самым, для всех достаточно малых τ получаем

$$S_{22} \leq \omega(\min(M, N)) \quad (3.8)$$

равномерно по $e \in S^{d-1}$.

Собирая вместе (3.3)–(3.8), получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Несложные вычисления показывают, что ковариационная матрица, отвечающая $\pi_e(y, z)$, имеет вид

$$\Sigma_e = \left(\alpha + \frac{d-1}{2} \right) \text{diag}(\lambda_1^{-1}(e), \dots, \lambda_{d-1}^{-1}(e), 1).$$

Положим

$$D_\tau = \text{diag}(\tau^{1/2}, \dots, \tau^{1/2}, \tau).$$

Из теоремы 3.2 следует, что случайный вектор $\Sigma_e^{-1/2} D_\tau C_e^T \xi$ сходится по $\mathbf{P}_s$ -распределению к случайному вектору с единичной ковариационной матрицей, плотность которого имеет вид

$$\pi(y, z) = \frac{1}{\sigma} \frac{(z/\sigma)^{\alpha+(d-3)/2} e^{-z/\sigma}}{\Gamma(\alpha + (d-1)/2)} \varphi_{\sigma z I}(y), \quad y \in \mathbf{R}^{d-1}, \quad z \in \mathbf{R}_+^1, \quad (3.9)$$

где I — единичная матрица, а $\sigma = (\alpha + (d-1)/2)^{-1/2}$.

С другой стороны, случайный вектор $\xi_s = B^{-1/2}(s)\xi$, где $B(s)$ — ковариационная матрица, отвечающая $p^{(s)}(x)$, также имеет единичную

ковариационную матрицу. Однако пока ничего не известно о сходимости этого вектора. Заметим попутно, что положительно определенная матрица $B(s)$ допускает представление $B(s) = C(s) B_0(s) C^T(s)$, где ортогональная матрица $C(s)$ и диагональная матрица $B_0(s)$ составлены, соответственно, из собственных векторов и соответствующих им собственных чисел. Поскольку матрица $B(s)$ непрерывна в S , то матрицы $C(s)$ и $B_0(s)$ тоже непрерывны (см., например, [11, гл. 7]).

Сходимость по распределению ξ_s устанавливается в следующих двух леммах.

Лемма 3.1. Пусть выполнены условия (A), (B) и (C). Тогда при $s = (h(e) - \sigma(e)\tau)e$, $\tau \downarrow 0$,

$$\sup_{e \in S^{d-1}} \|D_\tau C_e^T B(s) C_e D_\tau - \Sigma_e\| = o(1),$$

где $B(s)$ — ковариационная матрица, отвечающая $p^{(s)}(x)$, а $\|\cdot\|$ — любая из норм матрицы.

Доказательство. Ввиду теоремы 3.2 достаточно установить равномерную интегрируемость $\xi'_s = D_\tau C_e^T \xi$. Легко видеть, что

$$\mathbf{E}_s |\xi'_s|^2 = \int_{\mathbf{R}^{d-1} \times \mathbf{R}^1} (\tau|y|^2 + \tau^2 z^2) p_e^{(s)}(y, z) dy dz,$$

или, вспоминая определение $p_e^{(s)}(y, z)$,

$$\mathbf{E}_s |\xi'_s|^2 = \frac{1}{f(s)} \int_{\mathbf{R}^d} (\tau|y|^2 + \tau^2 z^2) p(C_e \bar{x}) e^{(s, C_e \bar{x})} d\bar{x},$$

где $x = (y_1, \dots, y_{d-1}, z) = (y, z)$.

Рассмотрим

$$\bar{f}(s) = \int_{\mathbf{R}^d} (\tau|y|^2 + \tau^2 z^2) p(C_e \bar{x}) e^{(s, C_e \bar{x})} d\bar{x}.$$

Пусть области X_i , $i = 1, \dots, 4$, X_{1i} , $i = 1, 2, 3$, те же, что и в доказательстве теоремы 1.3 в [19]. Обозначим через $\bar{f}_i(s)$, $\bar{f}_{1i}(s)$ части интеграла $\bar{f}(s)$, отвечающие указанным областям. Необходимо показать, что все отношения $\bar{f}_i(s)/f(s)$, $\bar{f}_{1i}(s)/f(s)$, кроме $\bar{f}_{12}(s)/f(s)$, могут быть сделаны произвольно малыми. Заметим, что интегралы $\bar{f}_i(s)$, $\bar{f}_{1i}(s)$ оцениваются почти дословно так же, как соответствующие им интегралы $f_i(s)$, $f_{1i}(s)$. Например, при оценке $\bar{f}_2(s)$ следует воспользоваться очевидным неравенством

$$|y|^2 + \tau x^2 \leq cr^2(|\bar{\varepsilon}|^2 + \tau), \quad C_e x \in X_2,$$

где $x = (y, z) = r\varepsilon$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)^T$, $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d-1})^T$. Далее,

$$\begin{aligned} \bar{f}_2(s) &\leq c\tau \int_L^\infty r^{\alpha+d} l(r) e^{-c\tau r} \left(\int_{|\bar{\varepsilon}| \geq M\tau^{1/2}} |\bar{\varepsilon}|^2 \exp(-cr|\bar{\varepsilon}|^2) d\bar{\varepsilon} \right) dr \\ &\quad + c\tau^2 \int_L^\infty r^{\alpha+d} l(r) e^{-c\tau r} \left(\int_{|\bar{\varepsilon}| \geq M\tau^{1/2}} \exp(-cr|\bar{\varepsilon}|^2) d\bar{\varepsilon} \right) dr. \end{aligned}$$

Рассуждая так же, как и при оценке $f_2(s)$ в доказательстве теоремы 1.3 в [19], получаем $\bar{f}_2(s) \leq \tau^{-\alpha-(d-1)/2} l(\tau^{-1}) \omega(M)$, откуда ввиду теоремы 3.1 $\bar{f}_2(s)/f(s) \leq \omega(M)$. Столь же просто оцениваются и остальные соотношения. Лемма доказана.

Пусть $\mathcal{C}_0$ объединяет все ортогональные $d \times d$ -матрицы, имеющие последнюю строку, а следовательно, и столбец, вида $(0, \dots, 0, a)$ с $|a| = 1$. Ясно, что плотность $\pi(y, z)$ инвариантна относительно преобразований $C \in \mathcal{C}_0$.

Лемма 3.2. Положим $\bar{p}^{(s)}(x) = (\det B(s))^{1/2} p^{(s)}(B^{1/2}(s)x)$. В условиях теоремы 3.2

$$\lim_{s \rightarrow \partial S} \sup_{x_d \geq \delta} |\bar{p}^{(s)}(x) - \pi(x)| = 0.$$

Доказательство. Пусть $\tau = \tau(s) = (h(e_s) - |s|)/\sigma(e_s)$. Из леммы 3.1 следует, что

$$C_e^T B(s) C_e = \tau^{-1} \Sigma(s),$$

где

$$\Sigma(s) = \begin{pmatrix} \sigma_1 + o(1) & \dots & o(1) & o(\tau^{-1/2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ o(1) & \dots & \sigma_{d-1} + o(1) & o(\tau^{-1/2}) \\ o(\tau^{-1/2}) & \dots & o(\tau^{-1/2}) & \sigma_d \tau^{-1} + o(\tau^{-1}) \end{pmatrix},$$

а σ_j , $j = 1, \dots, d$, — элементы диагональной матрицы Σ_e . Непосредственной проверкой убеждаемся, что собственные значения матрицы $B(s)$ ведут себя следующим образом:

$$\begin{cases} \beta_j(s) = \sigma_j \tau^{-1}(1 + o(1)), & j = 1, \dots, d-1, \\ \beta_d(s) = \sigma_d \tau^{-2}(1 + o(1)). \end{cases} \quad (3.10)$$

С другой стороны, как уже отмечалось, $B(s) = C(s) B_0(s) C^T(s)$, где $B_0(s) = \text{diag}(\beta_1(s), \dots, \beta_d(s))$, а ортогональная матрица $C(s)$ составлена из собственных векторов матрицы $B(s)$. Из леммы 3.1 следует, что

$$\begin{cases} \tau(c_{i1}c_{j1}\beta_1 + \dots + c_{id}c_{jd}\beta_d) = \sigma_i\delta_{ij} + o(1), & i, j = 1, \dots, d-1, \\ \tau^{3/2}(c_{i1}c_{d1}\beta_1 + \dots + c_{id}c_{dd}\beta_d) = o(1), & i = 1, \dots, d-1, \\ \tau^2(c_{d1}^2\beta_1 + \dots + c_{dd}^2\beta_d) = \sigma_d + o(1), \end{cases} \quad (3.11)$$

где $\beta_j = \beta_j(s)$, а $c_{ij} = c_{ij}(s)$, $i, j = 1, \dots, d$, — элементы матрицы $C_e^T C(s)$.

Из (3.10) и (3.11) следует, что

$$c_{dd}^2 = 1 + o(1), \quad c_{id} = o(\tau^{1/2}), \quad i = 1, \dots, d-1,$$

и, значит, $c_{dj} = o(\tau^{1/2})$, $j = 1, \dots, d-1$. Таким образом,

$$\lim_{s \rightarrow \partial S} \min_{C \in \mathcal{C}_0} \|C_e^T C(s) - C\| = 0. \quad (3.12)$$

Положим

$$B^{1/2}(s) = C(s)B_0^{1/2}(s), \quad R(s) = \Sigma_e^{-1/2} D_\tau C_e^T.$$

Пусть при $s = s_k = (h(e_k) - \sigma(e_k) \tau_k) e_k$ последовательности $R(s_k)B^{1/2}(s_k)$ и $C_{e_k}^T C(s_k)$ сходятся, соответственно, к C' и C'' . Ввиду (3.12) имеем $C'' \in \mathcal{C}_0$. Тогда $C' = \lim_{k \rightarrow \infty} \Sigma_{e_k}^{-1/2} D_{\tau_k} C'' B_0^{1/2}(s_k)$, и, следовательно, $C' \in \mathcal{C}_0$. Далее ввиду леммы 3.1 при $s \rightarrow \partial S$ имеем $(\det B(s))^{1/2} \det R(s) \rightarrow 1$. Но тогда

$$\begin{aligned} & \sup_{x_d \geq \delta > 0} \left| (\det B(s))^{1/2} p^{(s)} \left(B^{1/2}(s) x \right) - \pi(x) \right| \\ & \leq \sup_{x_d \geq \delta > 0} \left| (\det B(s))^{1/2} p^{(s)} \left(R^{-1}(s) R(s) B^{1/2}(s) x \right) \right. \\ & \quad \left. - (\det B(s))^{1/2} \det R(s) \pi \left(R(s) B^{1/2}(s) x \right) \right| \\ & \quad + \sup_{x_d \geq \delta > 0} \left| (\det B(s))^{1/2} \det R(s) \pi \left(R(s) B^{1/2}(s) x \right) - \pi(x) \right| = o(1). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия (A), (B) и (C). Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{s \in S} \sup_{u \in \mathbf{R}^d} \left| (2\pi n)^{d/2} (\det B(s))^{1/2} p_{ns} (n^{1/2} B^{1/2}(s) u + n\gamma(s)) - e^{-|u|^2/2} \right| = o(1).$$

Доказательство. Рассмотрим характеристическую функцию

$$\psi_s(t) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{i\langle t, x \rangle} \bar{p}^{(s)}(x) dx, \quad t \in \mathbf{R}^d,$$

отвечающую плотности $\bar{p}^{(s)}(x)$.

Из леммы 3.2 немедленно получаем (ср. с (17)–(19) в [17]) следующие соотношения: при $n \rightarrow \infty$ для любого $T > 0$

$$\sup_{s \in S} \sup_{|t| < T} \left| \psi_s^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - \exp \left(-\frac{1}{2} |t|^2 \right) \right| = o(1); \quad (3.13)$$

для всех достаточно малых $\delta > 0$ существует $c_\delta > 0$ такое, что

$$\sup_{s \in S} |\psi_s(t)| \leq 1 - c_\delta |t|^2, \quad 0 < |t| \leq \delta; \quad (3.14)$$

для любого $\delta > 0$

$$\sup_{s \in S} \sup_{|t| > \delta} |\psi_s(t)| = \rho_\delta < 1. \quad (3.15)$$

Остается показать, что существует $n_0 > 1$ такое, что $|\psi_s(t)|^{n_0}$ интегрируема равномерно по $s \in S$. Представим s , как и прежде, в виде

$$s = (h(e) - \sigma(e) \tau) e, \quad 0 < \tau < \min_{e \in S^{d-1}} a(e).$$

Из (2.1) имеем

$$p^{(s)}(x) = \frac{b(x) \exp\{-|x|(\Delta_e(e_x) + \tau\sigma(e) \langle e, e_x \rangle)\}}{f((h(e) - \tau\sigma(e))e)}.$$

Из условий (А) и (С) следует, что $\sup_{e \in S^{d-1}} \sup_{\tau > \tau_0} \sup_x \bar{p}^{(s)}(x) < \infty$ для любого $\tau_0 > 0$. Это означает, что для любого $\tau_0 > 0$

$$\sup_{e \in S^{d-1}} \sup_{\tau > \tau_0} \int_{\mathbf{R}^d} |\psi_s(t)|^2 dt < \infty. \quad (3.16)$$

Далее,

$$\int_{\mathbf{R}^d} (\bar{p}^{(s)}(x))^q dx = (\det B(s))^{(q-1)/2} (f(s))^{-q} I_q(s),$$

где $I_q(s)$ то же, что и в (3.1), а

$$1 < q < \begin{cases} \min\left(2, \frac{d+1}{2(1-\alpha)}\right), & \alpha < 1, \\ 2, & \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Из теоремы 3.1, а также из (3.1) и (3.10) следует, что существует конечный предел $\lim_{s \rightarrow \partial S} \int_{\mathbf{R}^d} (\bar{p}^{(s)}(x))^q dx$. Последнее в свою очередь означает (см., например, [5, с. 199])

$$\limsup_{s \rightarrow \partial S} \int_{\mathbf{R}^d} |\psi_s(t)|^{q/(q-1)} dt < \infty.$$

Таким образом, при $n_0 \geq q/(q-1)$

$$\sup_{s \in S} \int_{\mathbf{R}^d} |\psi_s(t)|^{n_0} dt < \infty. \quad (3.17)$$

Доказательство теоремы следует теперь из соотношений (3.13)–(3.17) (ср., например, с [9, гл. 4, § 3]). Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 2.1 и ее статистическая интерпретация.

4.1. Доказательство теоремы 2.1. Рассмотрим хорошо известное тождество

$$p_n(nx) = f^n(s) e^{-n\langle s, x \rangle} p_{ns}(nx), \quad s \in S,$$

где, напомним, $p_n(x)$ и $p_{ns}(x)$ — плотности распределения суммы S_n относительно $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_s$ соответственно.

При $x \in X$, $x = \gamma(s)$, получаем $p_n(nx) = \rho^n(x) p_{ns}(n\gamma(s))$. Из теоремы 3.3 следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{x \in X} \left| \frac{p_n(nx)}{\psi_n(x) \rho^n(x)} - 1 \right| = o(1).$$

Покажем, что $X = \mathbf{R}^d$. Поскольку S открыто, то и X открыто. Пусть $X \neq \mathbf{R}^d$, т.е. существует $x^* \notin X$, $x^* \in \partial X$, $|x^*| < \infty$. Возьмем произвольную последовательность $\{x^{(k)}\}_{k=1}^\infty$, $x^{(k)} \in X$, такую, что

$x^{(k)} \rightarrow x^*$, $k \rightarrow \infty$. Пусть $s^{(k)} \in S$ таковы, что $\gamma(s^{(k)}) = x^{(k)}$. Поскольку замыкание S компактно, то из последовательности $\{s^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{s^{(k_n)}\}_{n=1}^\infty$. Пусть s^* — предел этой последовательности. Поскольку x^* лежит на границе X , то $s^* \in \partial S$. Но тогда, ввиду (3.2), вопреки нашему предположению должно быть $|\gamma(s^*)| = |x^*| = \infty$. Таким образом, действительно, $X = \mathbf{R}^d$, и, следовательно, имеет место (1.2).

4.2. Статистическая интерпретация теоремы 2.1. С точки зрения математической статистики, семейство сопряженных распределений может рассматриваться как экспоненциальное. При этом $s \in S$ выступает в качестве оцениваемого параметра. Независимые случайные векторы $\xi^{(j)}$, $j = 1, \dots, n$, образуют выборку объема n . Отвечающая ей функция правдоподобия имеет вид $p_n(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}; s) = \prod_{j=1}^n p(\xi^{(j)}; s)$, где $p(x; s) = e^{\langle s, x \rangle} p(x) / f(s)$, или

$$\begin{aligned} p_n(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}; s) &= f^{-n}(s) \exp \left(\sum_{j=1}^n \langle s, \xi^{(j)} \rangle \right) \prod_{j=1}^n p(\xi^{(j)}) \\ &= f^{-n}(s) \exp(n \langle s, \bar{\xi} \rangle) \prod_{j=1}^n p(\xi^{(j)}), \end{aligned}$$

где $\bar{\xi} = n^{-1} \sum_{j=1}^n \xi^{(j)}$. Согласно критерию факторизации (см., например, теорему 1.1.1 в [10]), статистика $\bar{\xi}$ достаточна для параметра s . При этом информационная матрица Фишера, отвечающая единичному наблюдению, совпадает с ковариационной матрицей $B(s)$.

В качестве оценки максимального правдоподобия выступает статистика $s^* = s(\bar{\xi})$, где, напомним, $s(x)$ — вектор-функция, обратная $\gamma(s) = \text{grad} \ln f(s)$.

Пусть S_δ — замкнутое подмножество $\text{int } S$, определяемое следующим образом:

$$S_\delta = \{s: s = re, \ 0 \leq r \leq h(e) - \delta\}, \quad \delta > 0.$$

Легко проверить, что выполнены все условия так называемой локальной асимптотической нормальности (см., например, теорему 2.1.1 в [10]). Это означает, что логарифм отношения правдоподобия в близких точках вида s и $s + n^{-1/2} B^{-1/2}(s) t$, $t \in \mathbf{R}^d$, допускает представление

$$\begin{aligned} \ln \frac{p(\cdot; s + n^{-1/2} B^{-1/2}(s) t)}{p(\cdot; s)} &= n^{-1/2} \sum_{j=1}^n \langle B^{-1/2}(s) (\xi^{(j)} - \gamma(s)), t \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} t^T t + \Delta_n(s, t), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где функция $\Delta_n(s, t)$, в отличие от остаточного члена в теореме 2.1.1 [10], неслучайна и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t| < T} \sup_{s \in S_\delta} |\Delta_n(s, t)| = 0.$$

Представление (4.1) справедливо для любой плотности, удовлетворяющей условию Крамера с областью S . Возникает вопрос: *нельзя ли распространить (4.1) на все множество S , по крайней мере, для случая гамма-подобных исходных распределений?* Теоремы 3.1 и 3.2 позволяют утвердительно ответить на этот вопрос. Не приводя деталей доказательства, отметим следующие существенные моменты.

Пусть $\hat{s} = \arg \min_{s' \in \partial S} |s - s'|$ для $s \in \text{int } S$. Из теоремы 3.1 можно вывести, что при $s \rightarrow \partial S$

$$|\hat{s} - s| \asymp \|B^{-1/2}(s)\|,$$

т.е. при любом T и всех достаточно больших n точки $s + n^{-1/2} B^{-1/2}(s) t$, $|t| \leq T$, лежат в S . Более того, при $s \rightarrow \partial S$, $s' = s + o(|\hat{s} - s|)$,

$$B^{-1/2}(s) B(s') B^{-1/2}(s) = I + o(1).$$

Тогда (4.1) имеет место с $\Delta_n(s, t)$, удовлетворяющей соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t| < T} \sup_{s \in S} |\Delta_n(s, t)| = 0.$$

Тем самым, получается любопытный пример локальной асимптотической нормальности, равномерной по *открытому* параметрическому множеству.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алешкявичене А. К. Многомерные интегральные предельные теоремы для вероятностей больших отклонений. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. 28, в. 1, с. 62–82.
2. von Bahr B. Multi-dimensional integral limit theorems for large deviations. — Ark. Mat., 1967, v. 7, p. 89–99.
3. Боровков А. А., Рогозин Б. А. О центральной предельной теореме в многомерном случае. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 1, с. 61–69.
4. Боровков А. А., Мозульский А. А. Большие отклонения и проверка статистических гипотез. I: Большие отклонения сумм случайных векторов. — Труды Ин-та математики СО РАН, 1992, т. 3, с. 1–63.
5. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. М.: Наука, 1982, 288 с.
6. Dembo A., Zeitouni O. Large Deviations Techniques and Applications. Boston: Jones and Bartlett, 1993, 346 p.
7. Deuschel J.-D., Stroock D. W. Large Deviations. Boston: Academic Press, 1989, 307 p.
8. Ellis R. J. Entropy, Large Deviations and Statistical Mechanics. New York: Springer-Verlag, 1985, 364 p.
9. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
10. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979, 527 с.
11. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978, 280 с.
12. Нагаев А. В. Большие отклонения для одного класса распределений. — Предельные теоремы теории вероятностей. Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1963, с. 55–68.

13. Нагаев А. В. Предельные теоремы для сумм независимых двумерных случайных векторов. — Предельные теоремы и статистические выводы. Ташкент: Фан, 1966, с. 83–89.
14. Нагаев А. В. Локальные предельные теоремы специального вида, учитывающие большие отклонения. — Изв. АН УзССР, сер. физ.-матем., 1970, т. 14, в. 1, с. 29–34.
15. Нагаев А. В., Сакоян С. К. Предельные теоремы, учитывающие большие отклонения, в $\mathbf{R}^k$. — Докл. АН СССР, 1972, т. 204, в. 3, с. 554–556.
16. Нагаев А. В., Ходжабагян С. С. Предельные теоремы, учитывающие большие отклонения для сумм положительных случайных величин. — Литов. матем. сб., 1974, т. 14, в. 1, с. 149–163.
17. Нагаев А. В. Большие отклонения для сумм решетчатых случайных величин при выполнении условия Крамера. — Дискретн. матем., 1998, т. 10, в. 3, с. 115–130.
18. Нагаев А. В. Крамеровские большие отклонения в случае, когда крайнее сопряженное распределение имеет тяжелый хвост. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 3, с. 456–475.
19. Nagaev A. V., Zaigraev A. Abelian theorems for a class of probability distributions in $\mathbf{R}^d$ and their application. — J. Math. Sci. (New York), 2000, v. 99, № 4, p. 1454–1462.
20. Нагаев С. В. Некоторые предельные теоремы для больших отклонений. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 2, с. 231–254.
21. Nagaev S. V. Large deviations of sums of independent random variables. — Ann. Probab., 1979, v. 7, № 5, p. 745–789.
22. Ney P. Dominating points and the asymptotics of large deviations for random walk on $\mathbf{R}^d$. — Ann. Probab., 1983, v. 11, № 1, p. 158–167.
23. Osipov L. V. On large deviations for sums of random vectors in $\mathbf{R}^k$. — J. Multivariate Anal., 1981, v. 11, № 2, p. 115–126.
24. Петров В. В. О вероятностях больших отклонений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 2, с. 310–322.
25. Resnick S. I. Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes. New York: Springer-Verlag, 1987, 320 p.
26. Ризтер В. Локальные предельные теоремы для больших отклонений. — Докл. АН СССР, 1957, т. 115, с. 53–56.
27. Rozovsky L. V. On probabilities of large deviations in some classes of k -dimensional Borel sets. — J. Multivariate Anal., 1985, v. 17, № 1, p. 1–26.
28. Розовский Л. В. Вероятности больших отклонений на всей оси. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 1, с. 79–109.
29. Розовский Л. В. Вероятности больших отклонений суммы независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения несимметричного устойчивого закона. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 3, с. 496–530.
30. Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973, 468 с.
31. Саулис Л., Статулявичюс В. Предельные теоремы о больших отклонениях. Вильнюс: Мокслас, 1989, 208 с.
32. Светулявичене В. К. О вероятностях больших отклонений для сумм случайных векторов. — Литов. матем. сб., 1981, т. 21, в. 2, с. 191–199.

Поступила в редакцию
4.IV.2000

Исправленный вариант
23.I.2001