Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Фаталов, Точные асимптотики типа Лапласа для умеренных отклонений распределений сумм независимых банаховозначных случайных элементов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 4, 720–744

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp253>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:18:45

© 2003 г.

ФАТАЛОВ В. Р.*

ТОЧНЫЕ АСИМПТОТИКИ ТИПА ЛАПЛАСА ДЛЯ УМЕРЕННЫХ УКЛОНЕНИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ БАНАХОВОЗНАЧНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ¹⁾

В работе получены формулы для нахождения точных асимптотик умеренных уклонений распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных элементов со значениями в банаховом пространстве. Результат доказан на основе метода Лапласа в банаховых пространствах. Последний является обобщением классического асимптотического метода Лапласа на случай интегралов по вероятностным мерам в бесконечномерных банаховых пространствах. С помощью доказанной в работе теоремы вычислены асимптотики вероятностей умеренных уклонений статистик типа ω_n^p , $p \geq 2$.

Ключевые слова и фразы: суммы независимых случайных элементов, метод Лапласа в банаховых пространствах, функционал действия, преобразование Крамера, вероятности умеренных уклонений статистик типа ω_n^p .

1. Введение и формулировка основных результатов

В последние два десятилетия значительное развитие получил асимптотический метод Лапласа в банаховых пространствах, [1]–[18], предназначенный для вычисления точных асимптотик вероятностных распределений, а также интегралов по вероятностным мерам типа Лапласа, зависящих от большого параметра. Оказалось, что этот метод носит универсальный характер. Эта универсальность заключается, во-первых, в том, что метод Лапласа применим к вероятностным распределениям различной природы таким, как: гауссовы меры, [3], [10], [13], [14], [17]; распределения сумм независимых банаховозначных случайных элементов, [1], [5], [9], [11]–[13], [15], [16], [18]; распределения диффузионных и

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, лаборатория теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 96-01-00917, 98-01-524 и 01-01-649.

марковских процессов, [2], [4], [6], [7]; распределения локальных времен для марковских процессов, [8] (обзор этих и других результатов имеется в [13]). Во-вторых, метод Лапласа в банаховых пространствах позволяет доказывать множество уже известных результатов (полученных ранее совершенно различными способами) методологически единым способом, в основе которого лежит мощный принцип больших уклонений. И, в-третьих, этот метод применим в тех случаях, когда терпели неудачу все предыдущие подходы; в частности, метод Лапласа свободен от каких бы то ни было требований независимости (координат случайного вектора и т.п.). Сказанное в своей основе имеет привлечение идей функционального анализа и может быть подтверждено многими примерами.

В данной статье мы рассмотрим возможности метода Лапласа для нахождения точных асимптотик умеренных уклонений распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных элементов со значениями в банаховом пространстве. В такой постановке построение метода Лапласа впервые осуществил де Акоста в статье [11], при этом он существенно опирался на глубокую основополагающую в данном круге вопросов работу Э. Больтхаузена [5], в которой был исследован случай больших уклонений, когда нормирующий множитель равен числу слагаемых. Де Акоста вслед за Больтхаузенем вычислил точную асимптотику при $n \rightarrow \infty$ среднего

$$\mathbf{E} \exp \left\{ \frac{b_n^2}{n} F \left(\frac{S_n}{b_n} \right) \right\}, \quad (1.1)$$

где S_n — сумма n независимых одинаково распределенных случайных элементов со значениями в банаховом пространстве B , $F: B \rightarrow \mathbf{R}$ — дважды дифференцируемая по Фреше функция, а последовательность положительных чисел $\{b_n\}$, удовлетворяет при $n \rightarrow \infty$ соотношениям

$$\frac{b_n}{n^{1/2}} \rightarrow \infty, \quad \frac{b_n}{n^{2/3}} \rightarrow 0. \quad (1.2)$$

При этом, помимо прочих условий, предполагалось выполненным экспоненциальное условие Крамера, а также что функция $F - I$ (где I — так называемый функционал действия) достигает своего максимума на B в одной точке. В этой ситуации асимптотика среднего (1.1) полностью определяется гауссовой мерой, являющейся слабым пределом для распределений $S_n/\sqrt{n}$, — этот факт объясняется довольно узкой зоной уклонений (1.2), которая соответствует случаю чисто гауссовского предела в теории больших уклонений, когда так называемый ряд Крамера (см. [19, гл. 8], [20], [21]) не оказывает влияния на главный член асимптотики. В работе [5] найдена асимптотика среднего (1.1) в случае, когда $b_n = n$.

В данной статье мы, как и в предыдущей работе [18], исследуем асимптотики не интегралов типа (1.1), а вероятностей вида $\mathbf{P}\{S_n/b_n \in$

$D\}$, что соответствует случаю, когда в (1.1) имеем индикаторную функцию

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in D, \\ -\infty, & \text{если } x \notin D. \end{cases}$$

При этом станет ясно, как исследовать асимптотику следующего среднего типа (1.1):

$$\mathbf{E} I_{\{S_n/b_n \in D\}} \exp \left\{ \frac{b_n^2}{n} F\left(\frac{S_n}{b_n}\right) \right\},$$

в случае, когда выполнено $b_n/n^{1/2} \rightarrow \infty$, $b_n/n \rightarrow 0$.

Итак, в данной статье мы обобщим известный результат Л. В. Осипова [20], доказанный им для гильбертова пространства, на случай банахова пространства, придав самому результату иную, более удобную формулировку, и в качестве применения этого результата выведем новую формулу для точной асимптотики вероятностей умеренных уклонений статистики типа ω_n^p при $p > 1$. Перейдем к точным формулировкам.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных элементов со значениями в действительном сепарабельном банаховом пространстве $(B, \|\cdot\|)$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $\mathcal{B}$ — борелевская σ -алгебра, B^* — сопряженное пространство, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — билинейная форма, устанавливающая двойственность между B и B^* . Необходимые сведения о распределениях в банаховых пространствах имеются в книге [22].

Будем обозначать первую и вторую производные по Фреше числовой функции $S: B \rightarrow \mathbf{R}^1$ в точке x через $S'(x)$ и $S''(x)$, рассматривая эти производные как ограниченные линейные операторы из B в $\mathbf{R}^1$ и из B в B^* соответственно. Введем следующее определение.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть U — открытое множество в B и $0 < \alpha < 1$. Обозначим через $\text{Hol}_\alpha^2(U)$ множество дважды дифференцируемых по Фреше на U числовых функций $S: B \rightarrow \mathbf{R}^1$, для которых $\|S''(x) - S''(y)\| = O(\|x - y\|^\alpha)$, $\|x - y\| \rightarrow 0$, $x, y \in U$ (вторая производная удовлетворяет на U условию непрерывности по Гёльдеру порядка α).

Здесь операторная норма также обозначена символом $\|\cdot\|$.

Обозначим также $\text{Ker } y := \{x \in B: \langle x, y \rangle = 0\}$ — ядро функционала $y \in B^*$, $\text{Dom}(C)$ — область определения оператора C и $\mathcal{I}$ — тождественный оператор в B .

Пусть выполнены следующие условия.

(F1) Распределение μ элемента X_1 имеет среднее 0: $\int x \mu(dx) = 0$, и невырождено, т.е. имеет строго положительный (инъективный) ковариационный оператор $A: B^* \rightarrow B: \langle Ay, y \rangle := \int \langle x, y \rangle^2 \mu(dx) > 0$ для всех $0 \neq y \in B^*$.

(F2) Выполнены экспоненциальное условие Крамера:

$$\int \exp\{t\|x\|\} \mu(dx) < \infty \quad \text{для всех } t > 0,$$

и центральная предельная теорема: последовательность мер $\mathbf{P}\{S_n/\sqrt{n} \in (\cdot)\}$ слабо сходится при $n \rightarrow \infty$ к гауссовой мере $\gamma(\cdot)$ на B (с нулевым средним и ковариационным оператором A).

(F3) Множество D замкнуто и допускает представление $D = \{x \in B: Q(x) \geq 0\}$, где $Q(x)$ — непрерывная действительная функция такая, что или D , или множество $B \setminus D$ представимо в виде конечного объединения непересекающихся выпуклых множеств из B . Пусть D имеет непустую внутренность и D не содержит нулевого элемента в B .

(F4) Квадратическая форма $\langle x, A^{-1}x \rangle$ достигает своего минимума на $D \cap \text{Dom}(A^{-1})$ в единственной точке x^0 (из границы множества D).

(F5) Функция Q дважды дифференцируема по Фреше в некоторой окрестности U_0 точки x^0 , принадлежит классу $\text{Hol}_\alpha^2(U_0)$ для некоторого $\alpha > 0$, $\langle x^0, Q'(x^0) \rangle \neq 0$, и выполнено условие невырожденности: имеет место неравенство

$$\langle x, [A^{-1} - \lambda Q''(x^0)]x \rangle > 0, \quad 0 \neq x \in B^0 \cap \text{Dom}(A^{-1}) \cap \text{Dom}(Q''(x^0)),$$

где $\lambda = \langle x^0, A^{-1}x^0 \rangle / \langle x^0, Q'(x^0) \rangle > 0$ (множитель Лагранжа, см. лемму 1 ниже), $B^0 := \text{Ker } Q'(x^0) = \{x \in B: \langle x, Q'(x^0) \rangle = 0\}$.

Введем экспоненциальное преобразование Крамера

$$\nu_n(dx) := \frac{\exp\{n^{-1}b_n\langle x, A^{-1}x^0 \rangle\}}{M(n^{-1}b_n A^{-1}x^0)} \mu(dx), \quad (1.3)$$

где $M(y) := \int \exp(\langle x, y \rangle) \mu(dx)$, $y \in B^*$, — конечная по условию (F2) функция.

Пусть $\{Y_{nj}, n \in \mathbf{N}, j = 1, \dots, n\}$ — последовательность серий независимых одинаково распределенных в каждой серии случайных элементов со значениями в B и распределением $\mathbf{P}\{Y_{nj} \in (\cdot)\} = \nu_n(\cdot)$, $j = 1, \dots, n$. Обозначим $a_n = \mathbf{E}Y_{nj}$.

(F6) Последовательность мер $\rho_n(\cdot) := \mathbf{P}\{\sum_{j=1}^n (Y_{nj} - a_n)/\sqrt{n} \in (\cdot)\}$ слабо сходится при $n \rightarrow \infty$ к гауссовой мере $\gamma(\cdot)$.

(F7) (равномерная локальная предельная теорема). Для достаточно больших n существуют плотности

$$f_n(t) := \frac{d}{dt} \rho_n\{x: \langle x, A^{-1}x^0 \rangle < t\}, \quad t \in \mathbf{R}^1,$$

и для некоторого $\theta > 0$ последовательность $\{f_n(t)\}$ при $n \rightarrow \infty$ сходится равномерно по t , $|t| < \theta$, к гауссовой плотности

$$f(t) := \frac{d}{dt} \gamma\{x: \langle x, A^{-1}x^0 \rangle < t\}.$$

(F8) Пусть последовательность положительных чисел $\{b_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, такова, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{b_n}{n^{1/2}} \rightarrow \infty, \quad \frac{b_n}{n} \rightarrow 0, \quad \left\| \sqrt{n} a_n - \frac{b_n}{\sqrt{n}} x^0 \right\| \rightarrow 0. \quad (1.4)$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (F1)–(F8). Тогда при $n \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическое равенство:

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{S_n}{b_n} \in D \right\} = \gamma \left(\frac{b_n}{\sqrt{n}} D \right) \exp \left\{ nl \left(\frac{b_n}{n} \right) \right\} (1 + o(1)),$$

где: (i) для гауссовой меры γ выполнено

$$\begin{aligned} \gamma \left(\frac{b_n}{\sqrt{n}} D \right) &= \exp \left\{ - \frac{b_n^2}{2n} \langle x^0, A^{-1} x^0 \rangle \right\} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi} b_n} \\ &\times |\det R \langle R^{-1} x^0, A^{-1} x^0 \rangle|^{-1/2} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.5)$$

$R := \mathcal{J} - \lambda A Q''(x^0)$ — оператор из B в B , — при условии, что конечен и отличен от нуля детерминант оператора R

$$\det R := \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \beta_k), \quad (1.6)$$

здесь β_k , $k = 1, 2, \dots$, суть собственные значения ядерного оператора $\lambda A Q''(x^0): B \rightarrow B$ (о детерминантах ядерных операторов см. замечание 1 в [14] и книгу [36, с. 99, 445]);

(ii) функция $l(t)$ имеет вид:

$$l(t) = d_3 t^3 + d_4 t^4,$$

где

$$\begin{aligned} d_3 &= \frac{1}{6} \int \langle x, A^{-1} x^0 \rangle^3 \mu(dx), \\ d_4 &= \frac{1}{24} \left[\int \langle x, A^{-1} x^0 \rangle^4 \mu(dx) - 3 \langle x^0, A^{-1} x^0 \rangle^2 \right]. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 1. Функция $l(t)$ представляет собой два первых слагаемых ряда Крамера, построенного в результате разложения Тейлора для малых t функции $\tilde{l}(t) = \ln M(tA^{-1}x^0) - (t^2/2) \langle x^0, A^{-1} x^0 \rangle$. Этот ряд Крамера можно оборвать в силу последнего соотношения в формуле (1.4), пояснения, данные в главе 8 книги [19] в случае распределений на $\mathbf{R}^1$, справедливы и теперь. Если мера μ такова, что $\int x \langle x, A^{-1} x^0 \rangle^2 \mu(dx) \neq 0$, то третье соотношение в формуле (1.4) (при наличии первых двух) эквивалентно условию $b_n/n^{3/4} \rightarrow 0$ (см. лемму 4 ниже) и вклад в асимптотику выражения $nl(b_n/n)$ даст только член, содержащий коэффициент d_3 . Если же $\int x \langle x, A^{-1} x^0 \rangle^2 \mu(dx) = 0$ (это так, например, в случае симметричных мер, т.е. таких, что $\mu(-C) = \mu(C)$,

$C \in \mathcal{B}$), то последнее соотношение в формуле (1.4) эквивалентно условию $b_n/n^{5/6} \rightarrow 0$, кроме того, теперь $d_3 = 0$, ср. с (1.7), (1.8) ниже.

Формула (1.5) доказана в [13, следствие 3.1] (см. также [14] и теорему 3.4 и замечание 3.4 в [13]).

Теорема 1 применима к тем многочисленным асимптотическим задачам математической статистики, в которых естественным образом возникают суммы независимых банаховозначных случайных элементов. Рассмотрим ее применение к распределениям интегральных функционалов от эмпирического процесса.

Пусть $x_1, \dots, x_n$ — выборка из равномерного распределения на $[0, 1]$, и пусть $F_n(t)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по выборке. Известно, что эмпирический процесс $\xi_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t)$ слабо сходится в $C[0, 1]$ к броуновскому мосту $w^0(t)$ при $n \rightarrow \infty$. Определим $\omega_n^p = \int_0^1 |\xi_n(t)|^p dt$. Тогда, применяя теорему 1, мы получаем следующий результат.

Теорема 2. Пусть $r = r(n)$ — последовательность такая, что при $n \rightarrow \infty$

$$r \rightarrow \infty, \quad \frac{r}{n^{1/3}} \rightarrow 0. \quad (1.7)$$

Тогда при $p > 1$ имеет место следующее асимптотическое соотношение: при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\omega_n^p > r^p\} &= \mathbf{P}\left\{\int_0^1 |w^0(t)|^p dt > r^p\right\} \\ &\times \exp\left\{-\frac{r^4}{n} \frac{\pi^2}{p(3p+2)} \left(\frac{p+2}{2}\right)^{4/p-2} \left(\frac{\Gamma(1/p)}{\Gamma(\frac{1}{2}+1/p)}\right)^4\right\} (1+o(1)), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где Γ — гамма-функция.

З а м е ч а н и е 2. В работе [14] (см. также [13]) вычислена точная асимптотика при $r \rightarrow \infty$ для гауссовой меры из формулы (1.8) при $p \geq 2$:

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1 |w^0(t)|^p dt > r^p\right\} = \exp\left\{-\frac{2r^2}{\sigma^2}\right\} \frac{\sigma}{r} \pi^{-3/4} \left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1/p)}{\Gamma(1+1/p)}\right]^{1/2} (1+o(1)), \quad (1.9)$$

где

$$\sigma = \left(\frac{2}{p\pi}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{p}{2}\right)^{(p-2)/(2p)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1/p)}{\Gamma(1+1/p)}.$$

Несложно доказать, что формула (1.9) справедлива и при $1 < p < 2$ (асимптотика для этих значений параметра подробно исследована в более общем случае винеровских полей в работе [38]).

При $p = 2$ асимптотическое выражение (1.8) с учетом (1.9) совпадает с известным результатом Л. В. Осипова [20]. При $r = \sqrt{n}$ и $p = 2$ результаты, подобные теоремам 1 и 2, доказаны в [18]. Уклонения в

случае $r = \sqrt{n}$ или $b_n = n$ называются в современной литературе большими, в то время как отклонения порядка (1.4) называются умеренными. (Отметим, что в ранней русскоязычной литературе отклонения порядка $r \rightarrow \infty$, $r/n^{1/2} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, также назывались умеренно большими или просто большими; мы придерживаемся современной терминологии, см. [11], [23].) Результат теоремы 2 в случае $p \geq 2$ впервые был приведен в работе [37].

Далее в разделе 2 представлены основные положения метода Лапласа для распределений сумм независимых банаховозначных случайных элементов в случае умеренных отклонений. В разделе 3 дано доказательство теоремы 1, и, наконец, доказательство теоремы 2 вынесено в раздел 4.

Структура данной работы повторяет структуру работы [18], но, тем не менее, подходы и результаты этих двух работ имеют принципиальное отличие. Это отличие основано на том, что в данной работе функционал действия, или энтропийный функционал (ответственный за логарифмическую асимптотику), имеет сугубо гауссовскую природу и зависит только от предельной меры γ , в то время как в работе [18] функционал действия определяется как преобразование Лежандра–Фенхеля–Крамера меры μ и зависит от распределения индивидуальных слагаемых.

Среди недавних близких по тематике работ укажем также работы [24]–[27].

2. Основные положения метода Лапласа для распределений сумм независимых банаховозначных случайных элементов

Напомним (см. [22, с. 120, 143]), что ковариационный оператор $A: B^* \rightarrow B$ вероятностной меры μ с конечным вторым моментом является

- (i) симметричным, т.е. $\langle Ax^*, y^* \rangle = \langle Ay^*, x^* \rangle$ для всех $x^*, y^* \in B^*$;
- (ii) положительным, т.е. $\langle Ax^*, x^* \rangle \geq 0$ для всех $x^* \in B^*$;
- (iii) ядерным, т.е. для некоторой последовательности $\{x_k\}$ элементов B такой, что $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < \infty$, верно представление $Ax^* = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k, x^* \rangle x_k$, $x^* \in B^*$. Пусть $(H_A, \|\cdot\|_A)$ обозначает гильбертово пространство, ассоциированное с оператором A , т.е. пополнение области значений $R(A) := \{Ax^*: x^* \in B^*\}$ оператора A относительно предгильбертовой нормы $\|Ax^*\|_A := \sqrt{\langle Ax^*, x^* \rangle}$, $x^* \in B^*$ (см. [22, с. 126]). Скалярное произведение в $H \equiv H_A$ будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$.

Определим *функционал действия* гауссовой меры γ из условия (F6) следующим образом:

$$I(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \|x\|_A^2, & \text{если } x \in H_A, \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Отсюда видно, что $I(x)$, рассматриваемый как функция на H_A , бесконечно дифференцируем по Фреше на $(H_A, \|\cdot\|_A)$. Однако $I(x)$ недифференцируем на $(B, \|\cdot\|)$. Свойства функционала $I(x)$ указаны, например, в работе [13, § 2], здесь мы отметим только его полунепрерывность снизу и компактность множеств уровня $\{x: I(x) \leq c\}$ для любого $c < \infty$ (в топологии, порожденной нормой $\|\cdot\|$).

Перейдем к изложению основных лемм метода Лапласа, полагая выполненными условия (F1)–(F8).

Лемма 1 (решение экстремальной задачи в D). (i) Функционал действия $I(x)$ достигает своего минимума на множестве D в одной точке x^0 , причем выполнены равенства

$$Q(x^0) = 0, \quad (2.2)$$

$$A^{-1}x^0 - \lambda Q'(x^0) = 0, \quad (2.3)$$

где λ — число из условия (F5).

(ii) Имеет место неравенство (условие второго порядка)

$$\langle x, [A^{-1} - \lambda Q''(x^0)]x \rangle \geq 0, \quad x \in \text{Ker } Q'(x^0).$$

Доказательство леммы проводится при помощи метода множителей Лагранжа, [28, с. 252, 287], дающего необходимые условия (первого и второго порядка) минимума функции $I(x)$ при ограничении $Q(x) \geq 0$. Равенство (2.2) очевидно. Докажем (2.3). Покажем, что

$$\inf \{I(x): x \in D\} = \inf \{ \langle x, A^{-1}x \rangle : x \in D \cap \text{Dom}(A^{-1}) \} = \langle x^0, A^{-1}x^0 \rangle. \quad (2.4)$$

Пусть x^1 — некоторая точка из D , в которой достигается минимум слева в (2.4). Такая точка существует, так как функционал I полунепрерывен снизу и имеет компактные множества уровня. Действительно, обозначим $I_0 := \inf \{I(x): x \in D\}$ и $G := \{x: I(x) \leq I_0\}$, тогда $I_0 = \inf \{I(x): x \in G_1\}$, где множество $G_1 = G \cap D$ уже компактно, так как G компактно и D замкнуто. Но полунепрерывный снизу функционал I достигает своего минимума на компактном множестве G_1 в некоторой точке x^1 . Итак, $I_0 = I(x^1)$.

Покажем, что $x^1 = x^0$. Предположим противное, т.е. $x^1 \neq x^0$. Тогда найдется число $\eta > 0$ такое, что $I(x^1) < \eta < I(x^0) = \langle x^0, A^{-1}x^0 \rangle$. В силу определения функционала I в (2.1) ясно, что точка x^1 должна принадлежать $H_A \cap D$. Сужение функционала $I(x)$ на H_A (обозначаемое снова через $I(x)$), очевидно, бесконечно дифференцируемо по Фреше в норме пространства H_A (см. [28, с. 142]); первую производную этого сужения обозначим через $I'(x)$. Из определения пространства $(H_A, \|\cdot\|_A)$ следует, что существует последовательность точек $\{z_k\}$ из множества

$R(A) \cap D = \text{Dom}(A^{-1}) \cap D$ такая, что $\|z_k - x^1\|_A \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Вследствие непрерывности сужения $I(x)$ на H_A , $I(z_k) \rightarrow I(x^1)$ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому для достаточно большого k_0 выполнено неравенство

$$I(z_{k_0}) = \langle z_{k_0}, A^{-1}z_{k_0} \rangle < \eta < I(x^0),$$

что противоречит свойству минимальности точки x^0 из условия (F4). Итак, $x^1 = x^0$, и равенство (2.4) доказано.

Далее, согласно принципу Лагранжа (см. [28, с. 252]), если точка x^0 является решением экстремальной задачи $I(x) \rightarrow \min$, $x \in H_A$, при ограничении $Q(x) \geq 0$, то найдутся два множителя Лагранжа λ_1 и λ_2 такие, что:

- a) $\lambda_1 I'(x^0) - \lambda_2 Q'(x^0) = 0$,
- b) $\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 > 0$,
- c) $\lambda_2 Q(x^0) = 0$.

Если предположить, что $\lambda_1 = 0$, то из соотношений а) и б) следует, что $Q'(x^0) = 0$, это противоречит условию (F5). Поэтому $\lambda_1 > 0$; мы можем без ущерба общности полагать $\lambda_1 = 1$ и обозначить для краткости $\lambda = \lambda_2$. Из равенства а) и условия (F4) вытекает, что $\lambda > 0$. Итак, мы вправе записать соотношение а) в виде

$$I'(x^0) - \lambda Q'(x^0) = 0. \quad (2.5)$$

Пусть $x \in H_A$, тогда $I'(x)[y] = \langle y, x \rangle_A$, $y \in H_A$. Отсюда и из (2.5), учитывая, что $Q'(x^0) \in B^*$, получаем

$$0 = (I'(x^0) - \lambda Q'(x^0))[y] = \left\langle y, [x^0 - \lambda A Q'(x^0)] \right\rangle_A$$

для всех $y \in H_A$. Следовательно, $x^0 - \lambda A Q'(x^0) = 0$, откуда получаем равенство (2.3) и вид множителя Лагранжа λ , приведенный в условии (F5). Утверждение (i) доказано.

Утверждение (ii) несложно вывести с помощью теоремы 1 из [28, с. 287].

Лемма доказана.

Отметим, что в условии невырожденности из (F5) мы требуем выполнения *строгого неравенства* в утверждении (ii) леммы 1.

Лемма 2 (о логарифмической асимптотике). *При выполнении условий (F1)–(F4) и (F8) имеет место соотношение*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{b_n^2} \ln \mathbf{P} \left\{ \frac{S_n}{b_n} \in D \right\} = - \inf_{x \in D} I(x) = -\frac{1}{2} \langle x^0, A^{-1}x^0 \rangle.$$

Лемма доказана в [1, I, теорема 2.1] и основана на применении принципа больших уклонений, см. [13, § 2]. Отметим, что условие выпуклости из (F3) введено для возможности применения леммы 2.

Эта лемма составляет основу метода Лапласа и позволяет ограничиться исследованием асимптотики распределения S_n/b_n в малой окрестности точки инфимума x^0 .

Для $\delta > 0$ обозначим $\mathcal{V} = \mathcal{V}(x^0, \delta) := \{x \in D: \|x - x^0\| < \delta\}$.

Лемма 3 (о выделении малой полуокрестности точки минимума). Для любого $\delta > 0$ найдется такое $c = c(\delta) > 0$, что при $n \rightarrow \infty$ имеет место равенство

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S_n}{b_n} \in D\right\} = \mathbf{P}\left\{\frac{S_n}{b_n} \in \mathcal{V}\right\}(1 + O(e^{-n^{-1}b_n^2c})).$$

Доказательство леммы стандартно; оно основано на лемме 2 и полунепрерывности снизу функционала действия $I(x)$ и проводится так же, как доказательство леммы 3 в [10]. Именно, используя полунепрерывность снизу функционала $I(x)$ и замкнутость множества $D \setminus \mathcal{V}$, мы получаем $\inf\{I(x): x \in D \setminus \mathcal{V}\} =: d > I(x^0)$. Поэтому найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что $c := d - (I(x^0) - \varepsilon_0) > 0$. Теперь, применяя лемму 2 для множества $D \setminus \mathcal{V}$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{b_n^2} \ln \mathbf{P}\left\{\frac{S_n}{b_n} \in D \setminus \mathcal{V}\right\} = - \inf_{x \in D \setminus \mathcal{V}} I(x) = -d.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n_0 , что для всех $n > n_0$ имеет место неравенство

$$\exp\left\{\frac{b_n^2}{n} I(x^0)\right\} \mathbf{P}\left\{\frac{S_n}{b_n} \in D \setminus \mathcal{V}\right\} \leq \exp\left\{-\frac{b_n^2}{n} (d - I(x^0) + \varepsilon)\right\}.$$

Взяв в последнем неравенстве $\varepsilon = \varepsilon_0$, получаем утверждение леммы.

3. Доказательство теоремы 1

В силу лемм 1–3 задача сводится к исследованию вероятности $\mathbf{P}\{S_n/b_n \in \mathcal{V}\}$ при $n \rightarrow \infty$.

3.1. Использование преобразования Крамера. Обозначим для краткости $B^n = B \times B \times \cdots \times B$ (n раз),

$$\underline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n, \quad s_n = s_n(\underline{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^n x_i, \quad \mu^n(d\underline{\mathbf{x}}) = \prod_{i=1}^n \mu(dx_i).$$

Тогда нашу вероятность можно записать в виде интеграла:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S_n}{b_n} \in \mathcal{V}\right\} = J_n,$$

где

$$J_n = \int_{U_n} \mu^n(d\underline{\mathbf{x}}) \quad (3.1)$$

и $U_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n: s_n/b_n \in \mathcal{V}\}$. Обозначим для краткости

$$y^0 = \lambda Q'(x^0) = A^{-1}x^0.$$

Для средних a_n из условия (F6) имеем следующее утверждение.

Лемма 4. *При $n \rightarrow \infty$ справедливо соотношение:*

$$a_n = \frac{b_n}{n} x_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{b_n}{n} \right)^2 \int x \langle x, y^0 \rangle^2 \mu(dx) + \frac{1}{6} \left(\frac{b_n}{n} \right)^3 \int x \langle x, y^0 \rangle^2 \mu(dx) + r_n, \quad (3.2)$$

где $\|r_n\| = O((b_n/n)^4)$

Доказательство леммы легко получается на основе равенства (1.3).

Преобразование Крамера (1.3) позволяет выделить первый член в логарифмической асимптотике. Именно, сделаем замену мер в интеграле (3.1) согласно формуле (1.3):

$$\nu_n(dx_i) := \frac{\exp\{n^{-1}b_n \langle x_i, y^0 \rangle\}}{M(n^{-1}b_n y^0)} \mu(dx_i), \quad i = 1, \dots, n;$$

получим:

$$J_n = \left[M\left(\frac{b_n}{n} y^0\right) \right]^n \int_{U_n} \exp \left\{ -\frac{b_n}{n} \langle s_n, y^0 \rangle \right\} \prod_{i=1}^n \nu_n(dx_i).$$

Имеем далее:

$$J_n = \left[M\left(\frac{b_n}{n} y^0\right) \right]^n \exp \{ -b_n \langle a_n, y^0 \rangle \} K(n), \quad (3.3)$$

где

$$K(n) = \int_{U_n} \exp \left\{ -\frac{b_n}{n} \left\langle \sum_{i=1}^n (x_i - a_n), y^0 \right\rangle \right\} \prod_{i=1}^n \nu_n(dx_i). \quad (3.4)$$

Осуществим в последнем интеграле преобразование сдвига $z_i = x_i - a_n$, $i = 1, \dots, n$, получим:

$$K(n) = \int_{\sum_{i=1}^n z_i/b_n \in \tilde{V}_n} \exp \left\{ -\frac{b_n}{n} \left\langle \sum_{i=1}^n z_i, y^0 \right\rangle \right\} \prod_{i=1}^n d\nu_n(z_i + a_n),$$

где $\tilde{V}_n = \mathcal{V} - (n/b_n) a_n$. Отсюда имеем

$$K(n) = \int_{b_n \tilde{V}_n} \exp \left\{ -\frac{b_n}{n} \langle x, y^0 \rangle \right\} d\rho_n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right).$$

3.2. Вычисление асимптотики интеграла $K(n)$. Асимптотику интеграла $K(n)$ найдем, используя условия (F4)–(F8). Обозначим $c_n = (n/b_n) a_n - x^0$. Тогда, очевидно,

$$\tilde{V}_n = \{x \in B: Q(x + x^0 + c_n) \geq 0, \|x + c_n\| < \delta\}$$

и в силу леммы 4

$$\|c_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Разлагая по формуле Тейлора [28, с. 160, упражнение 2] функцию Q в окрестности точки x^0 и применяя равенство (2.2), получаем, что для достаточно больших n справедливы включения $U^- \subset \tilde{V}_n \subset U^+$, где

$$U^\pm = \left\{ x \in B: \langle x + c_n, y^0 \rangle + \frac{1}{2} \langle x + c_n, \lambda Q''(x^0)(x + c_n) \rangle \right. \\ \left. \pm r(x + c_n) \geq 0, \|x + c_n\| < \delta \right\},$$

$$r(x) = \lambda Q(x + x^0) - \langle x, y^0 \rangle - \frac{1}{2} \langle x, \lambda Q''(x^0)x \rangle = o(\|x\|^2)$$

при $\|x\| \rightarrow 0$.

Таким образом,

$$K_1^-(n) \leq K(n) \leq K_1^+(n), \quad (3.6)$$

где

$$K_1^\pm(n) := \int_{b_n U^\pm} \exp \left\{ -\frac{b_n}{n} \langle x, y^0 \rangle \right\} d\rho_n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right).$$

Сделав в последнем интеграле замену переменной $y = x/\sqrt{n}$, получим

$$K_1^\pm(n) = \int_{U^\pm(n)} \exp \left\{ -\frac{b_n}{\sqrt{n}} \langle x, y^0 \rangle \right\} d\rho_n(x), \quad (3.7)$$

где $U^\pm(n) = (b_n/\sqrt{n}) U^\pm$.

Дальнейший асимптотический анализ интегралов $K_1^\pm(n)$, по существу, уже проведен в работе [18]. В нашем случае нужно только учесть замену большого параметра $\sqrt{n}$ на $b_n/\sqrt{n}$, а также наличие сноска c_n .

Мы приведем результат.

Лемма 5. *Имеет место соотношение*

$$K_1^\pm(n) = e^{n^{-1} b_n^2 \langle c_n, y_0 \rangle} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi} b_n} |\det R \langle R^{-1} x^0, A^{-1} x^0 \rangle|^{-1/2} (1 + o(1)).$$

Отметим, что техническое условие (F7) введено именно для доказательства леммы 5.

Покажем, как доказывается лемма 5. Ради краткости записи индексы $\pm$ опущены. Обозначим $l_n = (b_n/\sqrt{n}) c_n$. Как легко видеть, $\|l_n\| = \|\sqrt{n} a_n - (b_n/\sqrt{n}) x^0\|$ стремится к нулю в силу условия (1.4), кроме того, лемма 4 позволяет оценить порядок малости $\|l_n\|$, см. замечание 1.

Обуславливая меру ρ_n в интеграле (3.7) относительно события $\langle x, y^0 \rangle = t$, по формуле полной вероятности с учетом условия (F7) имеем для достаточно больших n :

$$K_1(n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(b_n/\sqrt{n})t} \rho_n \left\{ x: \frac{1}{2} \langle x + l_n, \lambda Q''(x^0)(x + l_n) \rangle + \frac{b_n^2}{n} r \left(\frac{\sqrt{n}}{b_n} (x + l_n) \right) \geq -\frac{b_n}{\sqrt{n}} t - \frac{b_n^2}{n} \langle c_n, y^0 \rangle, \right. \\ \left. \|x + l_n\| < \frac{b_n}{\sqrt{n}} \delta \mid \langle x, y^0 \rangle = t \right\} f_n(t) dt.$$

После замены переменной $t = -(\sqrt{n}/b_n)s - \langle l_n, y^0 \rangle$ в вышенаписанном интеграле получаем

$$K_1(n) = \frac{\sqrt{n}}{b_n} e^{(b_n^2/n)\langle c_n, y^0 \rangle} K_2(n), \quad (3.8)$$

где

$$K_2(n) := \int_{-\infty}^{\infty} e^t \rho_n \left\{ x: \frac{1}{2} \langle x + l_n, \lambda Q''(x^0)(x + l_n) \rangle + \frac{b_n^2}{n} r \left(\frac{\sqrt{n}}{b_n} (x + l_n) \right) \geq t, \right. \\ \left. \|x + l_n\| < \frac{b_n}{\sqrt{n}} \delta \mid \langle x + l_n, y^0 \rangle = -\frac{\sqrt{n}}{b_n} t \right\} \\ \times f_n \left(-\frac{\sqrt{n}}{b_n} t - \langle l_n, y^0 \rangle \right) dt. \quad (3.9)$$

Для описания асимптотики интеграла $K_2(n)$ при $n \rightarrow \infty$ введем, как и в работе [18], условную гауссову меру $\gamma^0(\cdot) := \gamma(\cdot \mid \langle x, y^0 \rangle = 0)$. Для характеристики этой меры введем оператор $\Pi: B \rightarrow B$, где Πx определяется равенством

$$\langle \Pi x, y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x, y^0 \rangle \frac{\langle Ay, y^0 \rangle}{\langle Ay^0, y^0 \rangle} \quad \text{для всех } y \in B^*. \quad (3.10)$$

Из этого определения следует, что $\Pi x \in B^0$ для любого $x \in B$ (см. обозначение из условия (F5)) и $\Pi y = y$ для всех $y \in B^0$, т.е. отображение Π является проектором из B на B^0 .

Лемма 6. Вероятностная мера $\gamma^0(\cdot)$ является гауссовой мерой, сосредоточенной на подпространстве B^0 , со средним нуль и ковариационным оператором A^0 вида

$$\langle A^0 x, y \rangle := \langle Ax, y \rangle - \frac{\langle Ax, y^0 \rangle \langle Ay, y^0 \rangle}{\langle Ay^0, y^0 \rangle}, \quad x, y \in (B^0)^*. \quad (3.11)$$

Доказательство леммы легко получается из равенства $A^0 = \Pi A \Pi^*$ и формулы (3.10), см. также [5, II, с. 188].

В конечномерном пространстве формула (3.11) для ковариационного оператора A^0 приведена также в [1, с. 60, лемма 10].

Нам понадобится также экспоненциальная оценка типа оценки Э. Больтхаузена [5, II], восходящая к известной оценке В. В. Юринского. Для подмножества G пространства B определим величину $\Lambda_0(G) := \frac{1}{2} \inf_{x \in G \cap B^0} \|x\|_A^2$, где полагаем $\|x\|_A = \infty$, если $x \notin H_A$, гильбертово пространство $(H_A, \|\cdot\|_A)$ определено перед леммой 1.

Положим также для борелевского C

$$\bar{\rho}_n^t(C) := \frac{\rho_n(C \cap \{x: |\langle x + l_n, y^0 \rangle + (\sqrt{n}/b_n)t| \leq 2^{-n}\})}{\rho_n\{x: |\langle x + l_n, y^0 \rangle| + (\sqrt{n}/b_n)t \leq 2^{-n}\}}.$$

Лемма 7 (экспоненциальная оценка для «условных» мер, Э. Больтхаузена, [5, II]). Пусть G — замкнутое множество в B , $r \in (0, \Lambda_0(G))$. Тогда найдется $k_1 > 0$, такое, что $\bar{\rho}_n^t(tG - l_n) \leq \exp(-rt)$ для всех n и t , удовлетворяющих неравенству $k_1 \leq t \leq b_n^2/(k_1 n)$.

Доказательство леммы проводится по схеме доказательства предложения (3.12) из работы [5, II, с. 193], где в сходной ситуации обуславливание проводилось по подпространству B^0 . Покажем, как эта схема работает в нашем случае. Обозначим

$$B_n^t = \{x: \langle x, y^0 \rangle = \sqrt{n}b_n^{-1}t\}, \quad D_n^t = B_n^t - l_n = \{x: \langle x + l_n, y^0 \rangle = \sqrt{n}b_n^{-1}t\},$$

$$B^{0,\varepsilon} = \{x \in B: d(x, B^0) \leq \varepsilon\}, \text{ где } d(x, B^0) = \inf\{\|x - y\|: y \in B^0\} \text{ и } \varepsilon > 0.$$

Как легко видеть, $B_n^t = \sqrt{t}B_n^{\sqrt{t}}$, поэтому $(\sqrt{t}G - l_n) \cap D_n^t = \sqrt{t}(G \cap B_n^{\sqrt{t}}) - l_n$. Поскольку мы рассматриваем те значения n и t , для которых $0 < nt/b_n^2 \leq \delta$ при достаточно малом δ , то, учитывая определение мер $\bar{\rho}_n^t$ и соотношение $l_n \rightarrow 0$, из последнего равенства для любого малого $\varepsilon > 0$ получаем: $\bar{\rho}_n^t(\sqrt{t}G - l_n) = \bar{\rho}_n^t(\sqrt{t}(G \cap B^{0,\varepsilon}))$. Таким образом, при выводе доказываемой оценки основную роль играет часть множества G , сосредоточенная в сколь угодно малой «окрестности» подпространства B^0 . Выяснив этот факт, мы можем продолжить (почти дословно) наше доказательство по схеме, использованной в работе [12, II, с. 193].

Лемма 8. При $n \rightarrow \infty$ имеет место слабая сходимость условной меры $\bar{\rho}_n^t$ к гауссовой мере γ^0 равномерно относительно t из области $|t| \leq k_0$ при любом $k_0 > 0$.

Эта лемма следует из условия (F6) и плотности семейства мер $\bar{\rho}_n^t$, доказательство здесь аналогично доказательству предложения (3.16) из [5, II, с. 194]. Отметим, что слагаемые $Y_{nj} - a_n$, $j = 1, \dots, n$, из условия (F6) имеют среднее нуль и ковариационный оператор A_n следующего вида: $A_n = (\ln M(y))''|_{y=(b_n/n)y^0}$, причем $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Лемма 9 (основная). Имеет место точная асимптотика

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_2(n) = \Theta,$$

где

$$\Theta = f(0) \int_{B^0} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left\langle x, \lambda Q''(x^0) x \right\rangle \right\} \gamma^0(dx). \quad (3.12)$$

Доказательство леммы проводится аналогично доказательству теоремы 1 из [5, I, с. 314–317], теоремы (1.11) из [5, II, с. 195–197] и леммы 11 из [18]. Укажем на основные моменты.

Прежде всего покажем, что пределы интегрирования в (3.9) можно сузить. Сразу же отметим, что, вследствие свойств экспоненты, часть суженной области, соответствующая положительным t будет значительно шире части, соответствующей отрицательным t . Эти области далека не равноценны, основная сложность состоит в получении требуемых оценок в области положительных t .

Пусть $\varepsilon = 2\delta\|y^0\|_*$ и τ_n — последовательность положительных чисел такая, что при $n \rightarrow \infty$

$$\tau_n \downarrow 0, \quad \frac{b_n}{\sqrt{n}} \tau_n \rightarrow \infty.$$

Тогда несложно видеть, что для интеграла (3.9) выполнено соотношение $K_2(n) = [K_3(n) + K_4(n)](1 + o(1))$, $n \rightarrow \infty$, где

$$\begin{aligned} K_3(n) &= K_3(n, c) \\ &= 2^{n-1} \int_{-\tau_n b_n / \sqrt{n}}^{\varepsilon b_n^2 / n} e^t \rho_n \left\{ x: \frac{1}{2} \left\langle x + l_n, \lambda Q''(x^0)(x + l_n) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{b_n^2}{n} r \left(\frac{\sqrt{n}}{b_n} (x + l_n) \right) \geq t, \|x + l_n\| < c, \right. \\ &\quad \left. \left| \langle x + l_n, y^0 \rangle + \frac{\sqrt{n}}{b_n} t \right| \leq \frac{1}{2^n} \right\} dt, \\ K_4(n) &= K_4(n, c) \\ &= 2^{n-1} \int_{-\tau_n b_n / \sqrt{n}}^{\varepsilon b_n^2 / n} e^t \rho_n \left\{ x: \frac{1}{2} \left\langle x + l_n, \lambda Q''(x^0)(x + l_n) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{b_n^2}{n} r \left(\frac{\sqrt{n}}{b_n} (x + l_n) \right) \geq t, c < \|x + l_n\| < \frac{b_n}{\sqrt{n}} \delta, \right. \\ &\quad \left. \left| \langle x + l_n, y^0 \rangle + \frac{\sqrt{n}}{b_n} t \right| \leq 2^{-n} \right\} dt. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Покажем, что основной вклад в асимптотику дает интеграл $K_3(n)$, именно, докажем при помощи леммы 7, что для достаточно малых δ

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_n K_4(n) = 0. \quad (3.14)$$

Разобьем в интеграле $K_4(n)$ область интегрирования на две части: $[0, \varepsilon b_n^2 / n]$ и $[-\tau_n b_n / \sqrt{n}, 0]$ и обозначим соответствующие интегралы через $K_4^i(n)$, $i = 1, 2$, так что

$$K_4(n) = K_4^1(n) + K_4^2(n). \quad (3.15)$$

Пусть $d > k_1$ — произвольное число (k_1 из леммы 7). Часть интеграла $K_4^1(n)$ по области $[0, d]$ на основании леммы 8 оценивается сверху

при достаточно больших n величиной

$$\int_0^d e^t \rho_n \left\{ x: \|x\| > c \mid \langle x + l_n, y^0 \rangle = -\frac{\sqrt{n}}{b_n} t \right\} dt \leq 2\gamma^0 \{x: \|x\| > c\} \int_0^d e^t dt \rightarrow 0,$$

$c \rightarrow \infty$. Для оценки оставшейся части интеграла $K_4^1(n)$ по области $[d, \varepsilon b_n^2/n]$ (обозначим эту часть через I_1) применим лемму 7. Положим для малых $\varepsilon_1 > 0$: $G = G(\varepsilon_1) := \{x: \frac{1}{2} \langle x, \lambda Q''(x^0) x \rangle + \varepsilon_1 \|x\|^2 \geq 1\}$. Используя условие невырожденности из (F5) и рассуждая так же, как в [5, I, с. 315], убеждаемся, что для достаточно малых $\varepsilon_1 > 0$ выполнено неравенство $\Lambda_0(G) = \frac{1}{2} \inf_{x \in G \cap B^0} \|x\|_A^2 > 1$. Поэтому в силу леммы 7 имеем для всех достаточно больших n и $t \in [k_1, \varepsilon b_n^2/n]$:

$$\begin{aligned} & \rho_n \left\{ x: \frac{1}{2} \langle x + l_n, \lambda Q''(x^0)(x + l_n) \rangle + \frac{b_n^2}{n} r \left(\frac{\sqrt{n}}{b_n} (x + l_n) \right) \geq t, \right. \\ & \quad \left. c < \|x + l_n\| < \frac{b_n}{\sqrt{n}} \delta, \left| \langle x + l_n, y^0 \rangle + \frac{\sqrt{n}}{b_n} t \right| \leq \frac{1}{2^n} \right\} \\ & \leq \rho_n \left\{ \sqrt{t}G - l_n, \left| \langle x + l_n, y^0 \rangle + \frac{\sqrt{n}}{b_n} t \right| \leq \frac{1}{2^n} \right\} \\ & = \bar{\rho}_n^t(\sqrt{t}G - l_n) \rho_n \left\{ x: \left| \langle x + l_n, y^0 \rangle + \frac{\sqrt{n}}{b_n} t \right| \leq \frac{1}{2^n} \right\} \\ & \leq e^{-rt} \rho_n \left\{ x: \left| \langle x + l_n, y^0 \rangle + \frac{\sqrt{n}}{b_n} t \right| \leq \frac{1}{2^n} \right\} \end{aligned}$$

для некоторого $r > 1$. Отсюда следует, что для достаточно больших n $I_1 \leq 2f(0) \int_d^{\varepsilon b_n^2/n} e^t e^{-rt} dt \leq 2f(0) \int_d^\infty e^{-(r-1)t} dt \rightarrow 0$, $d \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_n K_4^1(n) = 0. \quad (3.16)$$

Пусть $D > 0$ — произвольное число. Часть интеграла $K_4^2(n)$ по области $(-D, 0]$, как и ранее, на основании леммы 8 оценивается сверху при достаточно больших n величиной

$$\begin{aligned} & \int_{-D}^0 e^t \rho_n \left\{ x: \|x\| > c \mid \langle x + l_n, y^0 \rangle = -\frac{\sqrt{n}}{b_n} t \right\} dt \\ & \leq 2\gamma^0 \{x: \|x\| > c\} \int_{-D}^0 e^t dt \rightarrow 0, \quad c \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Оставшаяся часть интеграла $K_4^2(n)$ по области $[-\tau_n b_n/\sqrt{n}, -D]$ легко оценивается сверху величиной $\int_{-\infty}^{-D} e^t dt \rightarrow 0$, $D \rightarrow \infty$. Поэтому $\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_n K_4^2(n) = 0$. Отсюда и из (3.15), (3.16) получаем соотношение (3.14).

Вернемся к интегралу $K_3(n)$. Здесь для элементов x из множества под знаком ρ_n имеем: $t \leq k_2 \|x\|^2 \leq k_2 c^2$, где $k_2 = \lambda \|Q''(x^0)\| > 0$. Таким

образом, для интеграла (3.13) имеем:

$$K_3(n, c) = 2^{n-1} \int_{-\tau_n b_n / \sqrt{n}}^{k_2 c^2} e^t \rho_n \left\{ x: \frac{1}{2} \langle x + l_n, \lambda Q''(x^0)(x + l_n) \rangle + \frac{b_n^2}{n} r \left(\frac{\sqrt{n}}{b_n} (x + l_n) \right) \geq t, \|x + l_n\| < c, \right. \\ \left. \left| \langle x + l_n, y^0 \rangle + \frac{\sqrt{n}}{b_n} t \right| \leq \frac{1}{2^n} \right\} dt, \quad (3.17)$$

Используя лемму 8, равномерную локальную предельную теорему (F7), принадлежность функции Q классу $\text{Hol}_\alpha^2(U_0)$ и соотношение $l_n \rightarrow 0$, убеждаемся, что при $n \rightarrow \infty$ имеют место сходимости равномерно относительно $|t| \leq k_2 c^2$:

$$\bar{\rho}_n^t \left\{ x: \frac{1}{2} \langle x + l_n, \lambda Q''(x^0)(x + l_n) \rangle + \frac{b_n^2}{n} r \left(\frac{\sqrt{n}}{b_n} (x + l_n) \right) \geq t, \|x + l_n\| < c \right\} \\ \longrightarrow \gamma^0 \left\{ x: \frac{1}{2} \langle x, \lambda Q''(x^0) x \rangle \geq t, \|x\| < c \right\}, \\ 2^{n-1} \rho_n \left\{ x: \left| \langle x + l_n, y^0 \rangle + \frac{\sqrt{n}}{b_n} t \right| \leq \frac{1}{2^n} \right\} \longrightarrow f(0).$$

Легко убедиться, что отсюда и из (3.17) следует соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} K_3(n) = f(0) \int_{-\infty}^{k_2 c^2} e^t \gamma^0 \{x: \frac{1}{2} \langle x, \lambda Q''(x^0) x \rangle \geq t, \|x\| < c\} dt$. Устремляя здесь $c \rightarrow \infty$, получаем выражение

$$f(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^t \gamma^0 \left\{ x: \frac{1}{2} \langle x, \lambda Q''(x^0) x \rangle \geq t \right\} dt.$$

Последний интеграл после интегрирования по частям и перехода к интегралу Лебега–Стилтьеса принимает вид, приведенный в правой части формулы (3.12). Таким образом, с учетом соотношения (3.14) лемма 9 доказана.

Итак, для окончания доказательства теоремы 1 осталось преобразовать гауссовый интеграл в правой части (3.12).

Обозначим $\sigma^2 := \int_B \langle x, y^0 \rangle^2 \gamma(dx) = \langle A y^0, y^0 \rangle$. Тогда в силу определения гауссовой плотности $f(t)$ в условии (F7) имеем $f(0) = 1/(\sqrt{2\pi}\sigma)$.

Лемма 10. *Имеет место равенство*

$$\Theta = (2\pi)^{-1/2} \left| \det R \langle R^{-1} A y^0, y^0 \rangle \right|^{-1/2}. \quad (3.18)$$

Доказательство леммы 10 основано на следующем предложении, представляющем и самостоятельный интерес.

Лемма 11 (об интегралах по гауссовским мерам). Пусть $\gamma(\cdot)$ — гауссова мера на сепарабельном банаховом пространстве B со средним нуль и инъективным ковариационным оператором A . Пусть $C: B \rightarrow B^*$ — инъективный непрерывный симметричный линейный

оператор такой, что оператор $A^{-1} - C$ строго положителен (т.е. $\langle x, [A^{-1} - C]x \rangle > 0$ для всех $x \neq 0$ из области определения оператора A^{-1}). Тогда

$$(i) \Lambda := \int_B \exp\{\frac{1}{2}\langle x, Cx \rangle\} \gamma(dx) < \infty;$$

(ii) $\Lambda = [\det(\mathcal{J} - AC)]^{-1/2}$ при условии, что последний детерминант конечен и ненулевой.

Доказательство леммы повторяет доказательство уже известных аналогичных утверждений. В случае гильбертова пространства пп. (i) и (ii) доказаны в работе [3, I, леммы 4.2, 4.4], см. также [35, с. 31]. В банаховом пространстве проходят те же самые рассуждения, если использовать гильбертово пространство H_A , одно такое обобщение проведено в работе [5, I, с. 308, лемма 2]. Условие конечности детерминанта в п. (ii) приходится вводить вследствие одного результата А. Пича [36, с. 445] о детерминантах ядерных операторов в банаховом пространстве.

Доказательство леммы 10. Так как в интеграле в (3.12) интегрирование ведется по B^0 , а Π — проектор, то для показателя экспоненты имеем $\langle x, \lambda Q''(x^0)x \rangle = \langle x, \lambda \Pi^* Q''(x^0) \Pi x \rangle$, $x \in B^0$. Тогда в силу условия (F6) и леммы 11(ii) имеем:

$$\Theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} [\det(\mathcal{J}^0 - \lambda A^0 \Pi^* Q''(x^0) \Pi)]^{-1/2}, \quad (3.19)$$

где $\mathcal{J}^0 = \Pi$ — тождественный оператор в B^0 . Отсюда с учетом формулы $A^0 = \Pi \Pi^*$ следует, что равенство (3.14) будет установлено, если мы докажем, что

$$\sigma^2 \det [\Pi(\mathcal{J} - \lambda A^0 Q''(x^0)) \Pi] = |\det R \langle R^{-1} A y^0, y^0 \rangle|. \quad (3.20)$$

Равенство (3.20) подробно доказано в работе [18].

Используя лемму 4, соотношения (3.3) и тейлоровское разложение функции $\tilde{l}(t)$, мы получаем утверждение теоремы 1 на основе лемм 3, 5, 9, 10, соотношений (3.1), (3.3), (3.6) и теоремы 1 из [14] об асимптотике больших отклонений гауссовских мер в банаховом пространстве.

4. Точные асимптотики вероятностей умеренных отклонений статистик типа ω_n^p

Доказательство теорем типа теоремы 2 основано на следующем хорошо известном представлении эмпирического процесса: $\xi_n(t) := \sqrt{n}(F_n(t) - t) \equiv S_n/\sqrt{n}$, где, по-прежнему, $F_n(t)$ есть эмпирическая функция распределения, построенная по равномерной на $[0, 1]$ выборке $x_1, \dots, x_n$, а $S_n = S_n(t) := \sum_{i=1}^n X_i$, $X_i = X_i(t) := I_{\{x_i \leq t\}} - t$, $t \in [0, 1]$, суть случайные процессы — элементы пространства $L^p = L^p[0, 1]$, $p > 1$.

Таким образом, распределение статистики типа $\omega_n^p = \int_0^1 |\xi_n(t)|^p dt$ допускает представление

$$\mathbf{P}\{\omega_n^p > u\} = \mathbf{P}\left\{Q\left(\frac{S_n}{u^{1/p}\sqrt{n}}\right) > 0\right\},$$

где

$$Q(x) := \|x\|_{L^p}^p - 1, \quad \|x\|_{L^p} := \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{1/p}, \quad (4.1)$$

— при $p > 1$ дважды дифференцируемая по Фреше функция на L^p , принадлежащая классу $\text{Hol}^2_\alpha(L^p)$ для некоторого $\alpha > 0$, [29]. Поскольку условия (F1) и (F2) выполнены, то при $p > 1$ теорема 1 позволяет вычислить точную асимптотику вероятности

$$\mathbf{P}\{\omega_n^p > r^p\}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.2)$$

где r удовлетворяет условиям

$$r \rightarrow \infty, \quad \frac{r}{n^{1/3}} \rightarrow 0. \quad (4.3)$$

Сразу отметим, что в данном примере мера

$$\mu(C) := \mathbf{P}\{X_1(t) \in C\}, \quad C \in \mathcal{B}(L^p), \quad (4.4)$$

симметрична, поэтому $d_3 = 0$ и условие (4.3) позволяет для получения точной асимптотики ограничиться только вычислением коэффициента d_4 , см. замечание 1.

4.1. Решение экстремальной задачи. Пусть $p > 1$. Напомним, что двойственность между пространством L^p и его сопряженным L^q задается формулой $\langle x, y \rangle := \int_0^1 x(t)y(t) dt$, здесь и далее $q^{-1} + p^{-1} = 1$.

Итак, мера μ , определенная в (4.4), имеет среднее нуль и ковариационный оператор $A: L^q \rightarrow L^p$, действующий по правилу:

$$Ax(t) = \int_0^1 R(t, s) x(s) ds, \quad x(s) \in L^q, \quad (4.5)$$

где $R(t, s) = \mathbf{E}X_1(t)X_1(s) = \min(t, s) - ts$ — ковариационная функция процесса X_1 и броуновского моста $w^0(t)$.

В работе [14] в нескольких словах указан путь решения экстремальной задачи из условия (F4) для множества $D = \{x \in B: Q(x) \geq 0\}$ с функцией Q из (4.1). Ниже мы дадим подробный вывод.

Как легко видеть, обратный оператор A^{-1} определен на множестве дважды дифференцируемых функций и имеет вид $A^{-1} = -d^2/dt^2$. Если x не входит в область определения оператора A^{-1} , то будем полагать $\langle x, A^{-1}x \rangle = \infty$. При $p > 1$ функция Q дважды дифференцируема по Фреше для $x \in L^p \setminus \{0\}$ с производными (см. [29, с. 887])

$$Q'(x) = p|x(t)|^{p-1} \text{sign } x(t) \in L^q,$$

$$Q''(x)[y] = p(p-1)|x(t)|^{p-2}y(t) \in L^q, \quad y \in L^p;$$

кроме того, при $p > 2$ $Q \in \text{Hol}^2_\alpha(L^p)$ для всех $0 < \alpha < 1$, см. [29].

Нахождение функции $x(t) \in \partial D$, минимизирующей квадратическую форму $\langle x, A^{-1}x \rangle$, проводится на основе равенств (2.2) и (2.3) леммы 1.

В силу этой леммы уравнение для экстремальной функции $x(t)$ имеет вид (индекс 0 опущен):

$$x(t) = \lambda p \int_0^1 (\min(t, s) - ts) |x(s)|^{p-1} \operatorname{sign} x(s) ds, \quad \|x(t)\|_p = 1. \quad (4.6)$$

Поскольку $x \in \operatorname{Dom}(A^{-1})$, то экстремальная функция дважды дифференцируема и интегральное уравнение (Хаммерштейна) (4.6) легко сводится к следующей граничной задаче:

$$\begin{cases} x''(t) = -\lambda p |x(t)|^{p-1} \operatorname{sign} x(t), \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Записывая первое уравнение в виде $d(x'(t))^2 = -2\lambda d|x(t)|^p$, получаем

$$(x'(t))^2 = 2\lambda(C - |x(t)|^p), \quad (4.8)$$

где $C = (x'(0))^2/(2\lambda) = (x'(1))^2/(2\lambda)$. Так как $x(0) = x(1) = 0$, то из (4.8) следует, что найдутся точки $0 < t_0 < t_1 \leq 1$ такие, что $x'(t_0) = 0$ и либо

$$x'(t) = \begin{cases} \sqrt{2\lambda}(C - |x(t)|^p)^{1/2}, & \text{если } t \in [0, t_0], \\ -\sqrt{2\lambda}(C - |x(t)|^p)^{1/2}, & \text{если } t \in [t_0, t_1], \end{cases} \quad (4.9)$$

либо

$$x'(t) = \begin{cases} -\sqrt{2\lambda}(C - |x(t)|^p)^{1/2}, & \text{если } t \in [0, t_0], \\ \sqrt{2\lambda}(C - |x(t)|^p)^{1/2}, & \text{если } t \in [t_0, t_1]. \end{cases} \quad (4.10)$$

Рассмотрим первый случай, отраженный в формуле (4.9). В этом случае экстремальная функция $x(t)$ положительна, строго монотонно возрастает на отрезке $[0, t_0]$, имеет максимум в точке t_0 ,

$$x(t_0) = C^{1/p}, \quad x'(t_0) = 0, \quad (4.11)$$

и строго монотонно убывает на отрезке $[t_0, t_1]$. Легко видеть, что $t_1 = 1$. В самом деле, если предположить, что точка $t_1 < 1$ — точка локального минимума функции $x(t)$, то $x'(t_1) = 0$ и из (4.8) и (4.11) следует, что $x(t_1) = x(t_0) = C^{1/p}$ — противоречие с монотонным убыванием $x(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$. Итак, $t_1 = 1$. Имеем граничную задачу на отрезке $[0, t_0]$:

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{2\lambda}\sqrt{C - x^p(t)}, & t \in [0, t_0], \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Из (4.12) получаем для $t \in [0, t_0]$: $\int_0^{x(t)} (1/\sqrt{C - x^p}) dx = \sqrt{2\lambda}t$. Отсюда, используя определение неполной бета-функции и ее связь с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a, b; c; z)$, см. [30, с. 98] (или формулу 3

из [31, с. 30]), приходим к следующему функциональному уравнению для экстремальной функции $x(t)$ на отрезке $[0, t_0]$:

$$x(t) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; \frac{x^p(t)}{C}\right) = \sqrt{2\lambda C}t, \quad t \in [0, t_0]. \quad (4.13)$$

Рассмотрим теперь граничную задачу на отрезке $[t_0, 1]$:

$$\begin{cases} x'(t) = -\sqrt{2\lambda}\sqrt{C - x^p(t)}, & t \in [t_0, 1], \\ x(1) = 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Из (4.14) получаем для $t \in [t_0, 1]$: $\int_0^{x(t)} (1/\sqrt{C - x^p}) dx = \sqrt{2\lambda}(1 - t)$. Отсюда, действуя аналогично предыдущему, получаем функциональное уравнение для экстремальной функции $x(t)$ на отрезке $[t_0, 1]$:

$$x(t) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; \frac{x^p(t)}{C}\right) = \sqrt{2\lambda C}(1 - t), \quad t \in [t_0, 1]. \quad (4.15)$$

Положив в уравнениях (4.13) и (4.15) $t = t_0$, имеем $t_0 = \frac{1}{2}$.

В ы в о д. Итак, в случае уравнения (4.9) из уравнений (4.13) и (4.15) следует, что экстремальная функция $x^0(t)$ симметрична относительно точки $t = \frac{1}{2}$: $x^0(t) = x^0(1 - t)$ для $t \in [0, \frac{1}{2}]$, и удовлетворяет уравнению

$$x(t) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; \frac{x^p(t)}{C}\right) = \sqrt{2\lambda C}t, \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \quad (4.16)$$

Исследуя случай уравнения (4.10), убеждаемся, что вторая экстремаль — решение задачи (4.7) — имеет вид $-x^0(t)$.

4.2. Вычисление констант. Несложно убедиться, что константы из теоремы 1 для экстремалей $x^0(t)$ и $-x^0(t)$ вычисляются одинаковым образом. Проведем вычисления для экстремали $x^0(t)$ — найдем значения величин C , λ и $\sigma^{-2} = \langle x^0, A^{-1}x^0 \rangle$. Ниже ради краткости индекс 0 опущен. Из (4.12) имеем $C = 1 + (2\lambda)^{-1} \int_0^1 (x'(t))^2 dt$, но в силу (4.7) и второго равенства в (4.6)

$$\int_0^1 (x'(t))^2 dt = - \int_0^1 x(t) x''(t) dt = \lambda p.$$

Следовательно,

$$C = 1 + \frac{p}{2}. \quad (4.17)$$

Положив в (4.16) $t = \frac{1}{2}$ и учитывая, что $x(\frac{1}{2}) = C^{1/p}$, имеем:

$$C^{1/p - \frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{p}; 1 + \frac{1}{p}; 1\right) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}. \quad (4.18)$$

Отсюда, используя формулы для частных значений гипергеометрической функции Гаусса из справочника [32, гл. 15] и учитывая (4.17), получаем

$$\lambda = 2\pi C^{2/p-1} \left[\frac{\Gamma(1+1/p)}{\Gamma(1/p + \frac{1}{2})} \right]^2 = \frac{4\pi}{p^2} \left(1 + \frac{p}{2} \right)^{2/p-1} \left[\frac{\Gamma(1/p)}{\Gamma(1/p + \frac{1}{2})} \right]^2. \quad (4.19)$$

Далее, с учетом равенства (2.3), вида производной $Q'(x)$ и второго из соотношений (4.6) имеем $\sigma^{-2} = \lambda \langle x, Q'(x) \rangle = \lambda p$. Теперь равенство (4.19) позволяет найти выражение для σ , фигурирующее в формулировке теоремы 2:

$$\sigma^{-2} = \frac{2\pi}{p} \left(1 + \frac{p}{2} \right)^{2/p-1} \left(\frac{\Gamma(1/p)}{\Gamma(\frac{1}{2} + 1/p)} \right)^2. \quad (4.20)$$

Вычисление определителя $\det(\mathcal{J} - \lambda A Q''(x^0))$. Найдем собственные числа β_k оператора $A Q''(x)$, соответствующие собственным функциям z_k . С этой целью рассмотрим уравнение (относительно β и z)

$$A Q''(x) z = \beta z, \quad z \in L^p.$$

Это уравнение равносильно следующей граничной задаче на отрезке $[0, 1]$:

$$\begin{cases} p(p-1)(x(t))^{p-2} z(t) = -\beta z''(t), \\ z(0) = z(1) = 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

Легко видеть, что уравнение (4.21) имеет частное решение $z_1(t) = x(t)$ с собственным числом $\beta_1 = (p-1)/\lambda$. Рассмотрим наряду с (4.21) граничную задачу на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$, где функция $x(t)$ монотонна:

$$\begin{cases} p(p-1)(x(t))^{p-2} z(t) = -\beta z''(t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ z(0) = 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

Замена $s = (x(t)/x(\frac{1}{2}))^p$, $t \in [0, \frac{1}{2}]$, приводит уравнение (4.22) к гипергеометрическому уравнению для функции $y(s) = z(t)$, $s \in [0, 1]$:

$$\begin{cases} s(1-s)y''(s) + \left(1 - \frac{1}{p} - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{p}\right)s\right)y'(s) + \frac{p-1}{2\lambda p\beta}y(s) = 0, \\ y(s) = 0. \end{cases} \quad (4.23)$$

Последнее уравнение хорошо изучено, см., например, [30, § 2.1], [32, § 15.5], [33, п. 2.260, с. 480–486]. Зная одно частное решение $y_1(s) = x(t)$ уравнения (4.23), несложно убедиться, что решения уравнения (4.23) описываются случаем В из [32, с. 377]. Следовательно, собственные числа

$$\beta_k = \frac{p-1}{2\lambda p(k - \frac{1}{2})(k-1 + 1/p)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

а соответствующие собственные функции выражаются через полиномы Якоби (см. также таблицу на с. 83 в [30], случай 4). Граничная задача на отрезке $[\frac{1}{2}, 1]$, соответствующая (4.22), приводит к тем же самым собственным числам.

Теперь, используя № 11 из [31, с. 754], находим

$$\det(\mathcal{J} - \lambda A Q''(x)) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda \beta_k) = \sqrt{\pi} \left(\frac{p}{2} - 1 \right) \frac{\Gamma(1/p + 1)}{\Gamma(1/p + \frac{1}{2})}.$$

Далее, поскольку $A Q''(x) x = \beta_1 x$, для оператора $R = \mathcal{J} - \lambda A Q''(x)$ имеем $R^{-1} x = (2 - p)^{-1} x$. Следовательно, $\langle R^{-1} x, A^{-1} x \rangle = 1/(\sigma^2(2 - p))$.

Вычисления для второй экстремальной функции $-x^0(t)$ совершенно аналогичны.

Вычисление коэффициента d_4 . Итак, осталось определить величину

$$d_4 = \frac{1}{24} \left[\int \langle z, A^{-1} x^0 \rangle^4 \mu(dz) - 3 \langle x^0, A^{-1} x^0 \rangle^2 \right]. \quad (4.24)$$

Второй член здесь имеет вид

$$3 \langle x^0, A^{-1} x^0 \rangle^2 = 3 \sigma^{-4}, \quad (4.25)$$

где σ^{-2} найдено в (4.20).

Как было отмечено выше, $A^{-1} = -d^2/dt^2$, поэтому в силу (4.4) и определения $X_1(t)$ имеем:

$$\int \langle z, A^{-1} x^0 \rangle^4 \mu(dz) = \int \langle z, (x^0)'' \rangle^4 \mu(dz) = \mathbf{E} \langle I_{\{x_1 \leq t\}} - t, (x^0(t))'' \rangle^4. \quad (4.26)$$

Интегрируя по частям, имеем: $\langle t, (x^0(t))'' \rangle = \int_0^1 t (x^0(t))'' dt = (x^0)'(1)$,

$$\begin{aligned} \langle I_{\{x_1 \leq t\}}, (x^0(t))'' \rangle &= \int_0^1 I_{\{x_1 \leq t\}} (x^0(t))'' dt \\ &= \int_{x_1}^1 (x^0(t))'' dt = (x^0)'(1) - (x^0)'(x_1). \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая равномерную распределенность случайной величины x_1 на $[0, 1]$, получаем

$$\mathbf{E} \langle I_{\{x_1 \leq t\}} - t, (x^0(t))'' \rangle^4 = \mathbf{E} [(x^0)'(x_1)]^4 = \int_0^1 [(x^0)'(t)]^4 dt. \quad (4.27)$$

Далее, используя симметричность $(x^0)'(t)$ относительно точки $t = \frac{1}{2}$ и равенство (4.8), имеем:

$$\int_0^1 [(x^0)'(t)]^4 dt = 2 \int_0^{1/2} [(x^0)'(t)]^4 dt = 2(2\lambda)^{3/2} \int_0^{1/2} [C - (x^0(t))^p]^{3/2} dx^0(t).$$

Сделав в последнем интеграле замену переменной $s = (x^0(t))^p/C$ и используя интегральное представление бета-функции (см. № 853.21

на с. 181 в [34]), получим

$$\int_0^1 [(x^0)'(t)]^4 dt = 2(2\lambda)^{3/2} \frac{C^{3/2+1/p}}{p} \frac{\Gamma(1/p)\Gamma(5/2)}{\Gamma(1/p+5/2)}.$$

С помощью формулы понижения для гамма-функции, учитывая (4.24)–(4.27) и значения величин C , λ , σ^{-2} , найденные выше, окончательно получим

$$d_4 = -\frac{\pi^2}{p(3p+2)} \left(\frac{p+2}{2}\right)^{4/p-2} \left(\frac{\Gamma(1/p)}{\Gamma(\frac{1}{2}+1/p)}\right)^4$$

— выражение, фигурирующее в формуле (1.8). Теорема 2 доказана.

Устремляя в правых частях формул (1.8) и (1.9) p к двум, получаем из теоремы 2 результат Осипова, [20].

Автор выражает благодарность рецензенту, замечания которого способствовали улучшению вида работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А., Могульский А. А. О вероятностях больших уклонений в топологических пространствах. I, II. Сиб. матем. журн., 1978, т. 19, №5, с. 988–1004; 1980, т. 21, №5, с. 12–26.
2. Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979, 424 с.
3. Ellis R. S., Rosen J. S. Asymptotic analysis of Gaussian integrals. I: Isolated minimum points; II: Manifold of minimum points. — Trans. Amer. Math. Soc., 1982, v. 273, №2, p. 447–481; Comm. Math. Phys., 1981, v. 82, p. 153–181.
4. Azencott R. Formule de Taylor stochastique et développement asymptotique d'intégrales de Feynman. — Lecture Notes in Math., 1982, v. 921, p. 237–285.
5. Bolthausen E. Laplace approximations for sums of independent random vectors. I, II: Degenerate maxima and manifolds of maxima. — Probab. Theory Relat. Fields, 1986, v. 72, №2, p. 305–318; 1987, v. 76, №2, p. 167–206.
6. Вентцель А. Д. Предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов. М.: Наука, 1986, 175 с.
7. Ben Arous G. Méthodes de Laplace et de la phase stationnaire sur l'espace de Wiener. — Stochastics, 1988, v. 25, №3, p. 125–153.
8. Kusuoka S., Tamura Y. Precise estimate for large deviation of Donsker–Varadhan type. — J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. IA, Math., 1991, v. 38, №3, p. 533–565.
9. Боровков А. А., Могульский А. А. Большие уклонения и проверка статистических гипотез. — Труды Ин-та математики СО РАН, 1992, т. 19, с. 1–220.
10. Фаталов В. Р. Точные асимптотики больших уклонений для гауссовских мер в гильбертовом пространстве. — Изв. АН Армении, сер. матем., 1992, т. 27, №5, с. 43–57.
11. de Acosta A. Moderate deviations and associated Laplace approximations for sums of independent random vectors. — Trans. Amer. Math. Soc., 1992, v. 329, №1, p. 357–375.
12. Chiyonobu T. On a precise Laplace-type asymptotic formula for sums of independent random vectors. — Asymptotic Problems in Probability Theory: Wiener Functionals and Asymptotics. Ed. by K. D. Edworthy et al. Harlow: Longman, 1993, p. 122–135. (Pitman Res. Notes Math. Ser. v. 284.)
13. Питербарг В. И., Фаталов В. Р. Метод Лапласа для вероятностных мер в банаховых пространствах. — Успехи матем. наук, 1995, т. 50, №6, с. 57–150.

14. Фаталов В. Р. Большие отклонения гауссовских мер в пространствах l^p и L^p , $p \geq 2$. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 3, с. 682–689.
15. Фаталов В. Р. Решение одной проблемы Э. Больтхаузена из теории суммирования независимых случайных банаховозначных элементов. — Третья Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам: Тезисы докладов. Под ред. Ю. В. Прохорова и др. М.: «ТВП», 1996, с. 158–160.
16. Einmahl U., Kuelbs J. Dominating points and large deviations for random vectors. — Probab. Theory Relat. Fields, 1996, v. 105, № 4, p. 529–543.
17. Фаталов В. Р. Большие отклонения L^p -нормы винеровского процесса со сносом. — Матем. заметки, 1999, т. 65, № 3, с. 429–436.
18. Fatalov V. R. The Laplace method for computing exact asymptotics of distributions of integral statistics. — Math. Methods Statist., 1999, v. 8, № 4, p. 510–535.
19. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
20. Осипов Л. В. О вероятностях больших отклонений для сумм независимых случайных векторов. — Теория вероятн. и ее примен., 1978, т. 23, № 3, с. 510–526.
21. Юринский В. В. Об асимптотике больших отклонений в гильбертовом пространстве. I, II, III. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 1, с. 78–92; т. 36, в. 3, с. 535–541; 1992, т. 37, в. 2, с. 268–275.
22. Вазания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985, 368 с.
23. Inglot T., Kallenberg W. C. M., Ledwina T. Strong moderate deviation theorems. — Ann. Probab., 1992, v. 20, № 2, p. 987–1003.
24. Bentkus V., Rackauskas A. On probabilities of large deviations in Banach spaces. — Probab. Theory Relat. Fields, 1990, v. 86, № 2, p. 131–154.
25. Kuelbs J., Li W. V. Some large deviation results for Gaussian measures. — Progr. Probab., 1994, v. 35, p. 251–270.
26. Yurinsky V. V. Sums and Gaussian vectors. Berlin: Springer-Verlag, 1995, 305 p. (Lecture Notes in Math., v. 1617.)
27. Yurinsky V. V. Some asymptotic formulae for Gaussian distributions. — J. Multivariate Anal., 1996, v. 56, № 2, p. 303–332.
28. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979, 432 с.
29. Bonic R., Frampton J. Smooth functions on Banach manifolds. — J. Math. Mech., 1966, v. 15, № 5, p. 877–898.
30. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1: Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. М.: Наука, 1973, 294 с.
31. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981, 798 с.
32. Абрамовиц М., Стиган И. (ред.). Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979, 830 с.
33. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965, 703 с.
34. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1977, 228 с.
35. Simon B. Functional Integration and Quantum Physics. New York: Academic Press, 1979, 296 p.
36. Пич А. Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.
37. Fatalov V. R. Laplace approximations for probabilities of moderate deviations for ω_n^p statistics, $p \geq 2$. XX International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models: Abstracts. Lublin, 1999, p. 50–51.
38. Фаталов В. Р. Асимптотики больших отклонений винеровских полей в L^p -норме, нелинейные уравнения Хаммерштейна и гиперболические краевые задачи высокого порядка. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 4, с. 710–726.

Поступила в редакцию
30.VI.1999

Исправленный вариант
10.V.2001