Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

M. Weber, Ergodic regularity of some Donsker classes,
Теория вероятн. и ее примен., 2003, том 48, вы-
пуск 4, 766–784

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp255>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 10:20:43

© 2003 г.

WEBER M.*

RÉGULARITÉ ERGODIQUE DE QUELQUES CLASSES DE DONSKE

Мы используем декаплинг-неравенство в эргодической теории для максимальных операторов. Это неравенство мы применяем для изучения свойства множества функций быть классом Донскера. Рассматриваемые множества строятся на основе последовательности L^2 -операторов и естественным образом возникают при исследовании свойств регулярности почти всюду таких операторов. В статье получены новые индивидуальные (для заданной $f \in L^2(\mu)$) необходимые условия и новые глобальные необходимые условия. Эти последние имеют равномерный характер и естественным образом переносятся на свойства регулярности канонического гауссовского процесса Z , заданного на $L^2(\mu)$.

Ключевые слова и фразы: эргодический максимальный оператор, сходимость почти наверное, гауссовские процессы, декаплинг-неравенство, энтропийные числа.

1. Introduction. Ce travail est relatif à l'étude des propriétés de convergence presque sûre de suites d'opérateurs en théorie ergodique. Nous étudions leurs maximums partiels, et obtenons des inégalités de découplage pour ceux-ci. Ce travail s'inscrit à la suite de travaux antérieurs sur le même sujet (voir [8], [9]). Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé. Soit aussi une suite $\mathbf{S}$ d'opérateurs continus $S_n: L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$, $n = 1, 2, \dots$, vérifiant l'hypothèse suivante:

($\mathcal{H}$) *il existe une famille $\mathcal{E} = \{T_j, j \geq 1\}$ de transformations ponctuelles de X , préservant μ , commutant avec les S_n ($S_n T_j(f) = T_j S_n(f)$) et faiblement mélangeante:*

$$\forall f, g \in L^2(\mu), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\langle T_k f, g \rangle - \mu(f)\mu(g)| = 0. \quad (\star)$$

Soit par ailleurs $g_1, g_2, \dots$ une suite isonormale définie sur un espace d'épreuves différent de $(X, \mathcal{A}, \mu)$, que nous noterons $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$. Soit aussi

* Mathématique (IRMA), Université Louis-Pasteur et CNRS, 7, Rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France; e-mail: weber@math.u-strasbg.fr

$f \in L^2(\mu)$, et considérons la suite gaussienne associée suivante: $\forall x \in X$, $\forall \omega \in \Omega$, $\forall E \subset \mathbf{N}$, $\sharp(E) < \infty$,

$$F_{E,f}(\omega, x) = \frac{1}{\sqrt{\sharp(E)}} \sum_{j \in E} g_j(\omega) T_j(f)(x). \quad (1.1)$$

Les propriétés des oscillations de ces moyennes, ainsi que celles concernant la compacité relative de leurs lois, ont été étudiées dans [3] et [4] respectivement.

Dans un travail récent relatif aux propriétés des opérateurs maximaux en théorie ergodique, nous avons établi l'inégalité suivante.

Inégalités de découplage ergodique A ([8, lemme 6]). *Sous l'hypothèse $(\mathcal{H})$, pour tout $\Delta \subset \mathbf{N}$, $\sharp(\Delta) < \infty$, tout $E \subset \mathbf{N}$, $\sharp(E) = q < \infty$, et tout $M > 0$,*

$$\begin{aligned} & \mu \left\{ \sup_{j \in E} \sup_{n \in \Delta} |T_j S_n f| > M \right\} \\ & \leq 4\mu \times \mathbf{P} \left\{ \sup_{n \in \Delta} \left| S_n \left(\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{j \in E} g_j T_j f \right) \right| > \frac{M\lambda_0}{\sqrt{q}} \right\}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

où λ_0 est une constante numérique vérifiant $\mathbf{P}\{|g_1| \geq \lambda_0\} \geq \frac{3}{4}$. En outre,

$$\frac{\lambda_0}{\sqrt{q}} \int_X \sup_{j \in E} \sup_{n \in \Delta} |T_j S_n f| d\mu \leq 4\mathbf{E} \int \sup_{n \in \Delta} \left| S_n \left(\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{j \in E} g_j T_j f \right) \right| d\mu. \quad (1.3)$$

Notons qu'en vertu de l'hypothèse de commutation $(\mathcal{H})$,

$$\sup_{n \in \Delta} \left| S_n \left(\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{j \in E} g_j T_j f \right) \right| = \sup_{n \in \Delta} \left| \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{j \in E} g_j T_j S_n f \right|.$$

On se propose dans ce qui suit d'en établir une version plus maniable pour notre propos.

Inégalités de découplage ergodique B. *Soit $f \in L^2(\mu)$. Pour toute partie finie Δ de $\mathbf{N}$, tout entier positif q et tout réel positif M_1 , on a*

$$\begin{aligned} & 1 - \left(1 - \mu \left\{ \sup_{n \in \Delta} |S_n f| > M_1 \sqrt{q} \right\} \right)^q \\ & \leq 4\mu \times \mathbf{P} \left\{ \sup_{n \in \Delta} \left| \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{1 \leq l \leq q} g_l U^l(n) \right| > M_1 \lambda_0 \right\}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

où les vecteurs U^l , $1 \leq l \leq q$, sont des copies indépendantes du vecteur $U = (U(n), n \in \Delta)$ défini par $U(n) = S_n(f)$, $n \in \Delta$, et $\lambda_0 > 0$ est la constante apparue en (1.2). En outre,

$$\frac{\lambda_0}{\sqrt{q}} \int_X \sup_{1 \leq l \leq q} \sup_{n \in \Delta} |U^l(n)| d\mu \leq 4\mathbf{E} \int_X \sup_{n \in \Delta} \left| \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{1 \leq l \leq q} g_l U^l(n) \right| d\mu. \quad (1.5)$$

Dans cet énoncé, nous nous sommes affranchis de l'hypothèse $(\mathcal{H})$. Le membre gauche des inégalités (1.4) et (1.5) est une version découplée des membres gauches des inégalités (1.2) et (1.3) respectives, puisque les maximums partiels $\sup_{n \in \Delta} |T_j S_n f|$, $j \in E$, sont remplacés par des copies indépendantes de $\sup_{n \in \Delta} |S_n f|$. Quant aux membres de droite, nous avons remplacé $\sup_{n \in \Delta} |(\sqrt{q})^{-1} \sum_{j \in E} g_j T_j S_n f|$ par $\sup_{n \in \Delta} |(\sqrt{q})^{-1} \sum_{1 \leq l \leq q} g_l U^l(n)|$. Ils ne sont cependant plus de même nature, compte tenu de la remarque faite plus haut concernant l'hypothèse de commutation. Nous démontrons ces inégalités dans la section suivante. Nous établissons aussi un lemme de découplage relatif à l'action du mélange (Lemme 2.3) qui a son intérêt propre.

Nous appliquons ensuite cette inégalité à l'étude de la propriété pour les ensembles $C_f := \{S_n f, n \geq 1\}$ d'être des classes de Donsker. Ce travail occupe la section 3. Ces ensembles interviennent naturellement dans l'étude des propriétés de convergence presque sûre pour tout $f \in L^2(\mu)$ des suites $\{S_n f, n \geq 1\}$, ainsi que l'a montré Bourgain dans [1] (voir aussi [9]). En effet, modulo des hypothèses idoines de commutation pour ces opérateurs, on sait que si la suite $\{S_n f, n \geq 1\}$ est μ -presque sûrement bornée pour tout $f \in L^2(\mu)$, alors les ensembles C_f sont tous des *GB* ensembles. Par ailleurs l'inégalité de découplage B que nous établissons, lie naturellement les maximums partiels de la suite $\{S_n f, n \geq 1\}$ aux moyennes intervenant dans l'étude des classes de Donsker, à savoir les moyennes du théorème central limite $(\sqrt{q})^{-1} \sum_{1 \leq l \leq q} g_l U^l(n)$. Nous obtenons de la sorte de nouvelles conditions nécessaires pour qu'une famille de fonctions soit une classe de Donsker. Notre étude comprend deux aspects. D'une part nous obtenons des conditions (voir Théorème 3.1, Proposition 3.1 et Théorème 3.4) de type individuel: pour f donnée, si C_f est une classe de Donsker, et une estimation uniforme de la distribution de la d -oscillation de la suite $\{S_n f, n \geq 1\}$ (pour un écart d tel que $(\mathbf{N}, d)$ soit un ensemble totalement borné). D'autre part, si pour tout $f \in L^2(\mu)$, C_f est une classe de Donsker, les estimations que nous obtenons sont uniformes sur $L^2(\mu)$. Ce dernier résultat est obtenu à l'aide du théorème de Baire (voir Théorème 3.2). Enfin, nous obtenons des conditions nécessaires de type gaussien (Théorème 3.3) pour que tous les ensembles C_f soient des classes de Donsker.

2. Démonstration des inégalités B et action du mélange.

Commençons par établir les inégalités B. Posons $R = R(x) = \sup_{1 \leq l \leq q} \sup_{n \in \Delta} |U^l(n)(x)|$. Supposons $R > 0$. Il existe donc $m \in \Delta$ et $1 \leq l_0 \leq q$ tels que $|U^{l_0}(m)(x)| = R$. Si pour tout $l \neq l_0$, $U^l(m)(x) = 0$; alors pour tout $\omega \in \{|g_{l_0}| \geq \lambda_0\}$,

$$\left| \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{1 \leq l \leq q} g_l(\omega) U^l(n)(x) \right| = \frac{|g_{l_0}(\omega)| |U^{l_0}(m)(x)|}{\sqrt{q}} \geq \frac{\lambda_0 R}{\sqrt{q}}.$$

Sinon, posons

$$E_x = \left\{ \omega : \text{sign} \left(\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{\substack{1 \leq l \leq q \\ l \neq l_0}} g_l(\omega) U^l(m)(x) \right) = \text{sign} (g_{l_0}(\omega) U^{l_0}(m)(x)) \right\}.$$

Par symétrie et indépendance des lois des g_l , $\mathbf{P}(E_x) = \frac{1}{2}$. Alors si $F_x = E_x \cap \{|g_{l_0}| \geq \lambda_0\}$, $\mathbf{P}(F_x) \geq \frac{1}{4}$, et sur F_x

$$\left| \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{1 \leq l \leq q} g_l(\omega) U^l(n)(x) \right| \geq \frac{|g_{l_0}(\omega)| |U^{l_0}(m)(x)|}{\sqrt{q}} \geq \frac{\lambda_0 R}{\sqrt{q}}.$$

Cette inégalité est trivialement vraie si $R = 0$. D'où en intégrant par rapport à $\mu \times \mathbf{P}$: pour tout $M > 0$

$$\mu \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} \sup_{n \in \Delta} |U^l(n)| > M \right\} \leq 4\mu \times \mathbf{P} \left\{ \sup_{n \in \Delta} \left| \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{1 \leq l \leq q} g_l U^l(n) \right| > \frac{M \lambda_0}{\sqrt{q}} \right\}.$$

On en déduit donc l'inégalité (1.4). L'inégalité (1.5) s'en déduit par intégration. D'où le résultat.

Les deux lemmes qui suivent sont relatifs à l'action du mélange et servent à établir le lemme 2.3. Nous rappelons le premier pour la commodité du lecteur.

Lemme 2.1 ([9, lemme 7.4.4]). *Soient I et J deux entiers positifs. Soient $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_I\}$, et $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_J\}$ deux sous-ensembles de $L^2(\mu) \cap \mathbf{1}_\mu^\perp$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier $k = k(\varepsilon) \geq 1$ tel que*

$$\sup_{1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J} |\langle T_k f_i, g_j \rangle| \leq \varepsilon. \quad (2.1)$$

Et de plus $k(\varepsilon) \rightarrow \infty$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Par itérations successives du lemme précédent, nous allons en déduire

Lemme 2.2. *Considérons un réel $\varepsilon > 0$ et un entier I positif fixés. Soit $C_1, \dots, C_I$ une partition $\mathcal{A}$ -mesurable de X formée d'ensembles de mesure positive. Alors pour tout entier $q \geq 1$, il existe $T_1, \dots, T_q$ éléments de $\mathcal{E}$ tels que pour tout $l \leq q$ et $(i_1, \dots, i_l) \in \{1, \dots, I\}^l$*

$$\left| \mu \left(\bigcap_{\lambda=1}^l T_\lambda^{-1} C_{i_\lambda} \right) - \prod_{\lambda=1}^l \mu(C_{i_\lambda}) \right| \leq \varepsilon. \quad (2.2)$$

D e m o n s t r a t i o n . En effet, appliquons le lemme précédent avec les choix $\mathcal{F} = \mathcal{G} = \{\mathbf{1}(C_{i_1}) - \mu(C_{i_1}), 1 \leq i_1 \leq I\}$. Il existe alors $T_1 \in \mathcal{E}$ tel que pour tous $1 \leq i_1, i_2 \leq I$

$$\left| \mu[T_1^{-1} C_{i_2} \cap C_{i_1}] - \mu(C_{i_2}) \mu(C_{i_1}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Appliquons ensuite le lemme avec les choix:

$$\mathcal{F} = \{1(C_{i_3}) - \mu(C_{i_3}), 1 \leq i_3 \leq I\},$$

$$\mathcal{G} = \{1(T_1^{-1}C_{i_2} \cap C_{i_1}) - \mu(T_1^{-1}C_{i_2} \cap C_{i_1}), 1 \leq i_1, i_2 \leq I\}.$$

Il existe alors $T_2 \in \mathcal{E}$ tel que: pour tous $1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq I$,

$$\left| \mu [T_2^{-1}C_{i_3} \cap T_1^{-1}C_{i_2} \cap C_{i_1}] - \mu(C_{i_3}) \mu(C_{i_2}) \mu(C_{i_1}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon,$$

etc. On en déduit le lemme 2.2, après q applications du lemme 2.1.

Soit $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_I\}$ une partition $\mathcal{A}$ -mesurable de X . Soit aussi E une partie finie de $\mathbf{N}$ de cardinal q . Notons $\mathcal{C}(E)$ l'algèbre de Boole engendrée par $T_l^{-1}\mathcal{C}$, $l \in E$. Les atomes de $\mathcal{C}(E)$ sont les intersections non vides

$$\bigcap_{l \in E} T_l^{-1}C_{i_l}, \quad 1 \leq i_l \leq I, \quad l \in E.$$

Lorsque l'on considère la mesure $\mu(\bigcap_{l \in E} T_l^{-1}C_{i_l})$ de ces atomes, nous venons de montrer (lemme précédent) que l'on peut déterminer E de façon à ce que celle-ci soit arbitrairement proche de $\prod_{l \in E} \mu(C_{i_l})$. On peut interpréter cette propriété de la manière suivante. Sans restreindre la généralité, nous pouvons tout d'abord supposer que l'espace $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est suffisamment riche pour contenir q copies indépendantes de $\mathcal{C}$. Soit alors $\tilde{\mathcal{C}}$ l'algèbre de Boole engendrée par ces copies. Notons i l'isomorphisme trivial d'algèbre de Boole entre $\mathcal{C}(E)$ et $\tilde{\mathcal{C}}$ défini sur les atomes par

$$i\left(\bigcap_{l \in E} T_l^{-1}C_{i_l}\right) = \bigcap_{l \in E} C_{i_l}^l,$$

les ensembles $(C_{i_l}^l)_{l \in E}$ étant des copies indépendantes de C_i , $1 \leq i \leq I$. Alors, pour tout $\delta > 0$, tout entier $q \geq 1$, on peut déterminer E de façon à ce que pour tout atome $\bigcap_{l \in E} T_l^{-1}C_{i_l}$ de $\mathcal{C}(E)$, l'on ait

$$\left| \mu\left(\bigcap_{l \in E} T_l^{-1}C_{i_l}\right) - \mu\left(i\left(\bigcap_{l \in E} T_l^{-1}C_{i_l}\right)\right) \right| \leq \delta.$$

Soit $\varepsilon > 0$. En choisissant δ correctement en fonction de I , ε et q , on en déduit donc que l'on peut déterminer E de façon à ce que pour **tout** élément de $A \in \mathcal{C}(E)$, $|\mu(A) - \mu(i(A))| \leq \varepsilon$. On a donc établi le lemme suivant.

Lemme 2.3. *Soient $\varepsilon > 0$ et deux entiers I , $q \geq 1$ arbitraires. Soit $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_I\}$ une partition $\mathcal{A}$ -mesurable de X . Soit aussi E une partie finie de $\mathbf{N}$ de cardinal q ; et notons $\mathcal{C}(E)$ l'algèbre de Boole engendrée par $T_l^{-1}\mathcal{C}$, $l \in E$. Supposons l'espace $(X, \mathcal{A})$ suffisamment riche pour contenir q copies indépendantes de $\mathcal{C}$, et soit $\tilde{\mathcal{C}}$ l'algèbre de Boole engendrée*

par ces copies. Notons i l'isomorphisme canonique entre les algèbres de Boole $\mathcal{C}(E)$ et $\tilde{\mathcal{C}}$.

Alors on peut déterminer E , de sorte que pour tout élément de $A \in \mathcal{C}(E)$, l'on ait:

$$|\mu(A) - \mu(i(A))| \leq \varepsilon. \quad (2.3)$$

De plus, la détermination de E ne dépend que de $\mathcal{C}$.

3. Régularité ergodique des classes de Donsker. Soit $f \in L^2(\mu)$ arbitraire. Associons à f l'application $Sf: (X^{\mathbf{N}}, \mathcal{A}^{\mathbf{N}}, \mu^{\mathbf{N}}) \rightarrow (\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \mathcal{B}(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}))$, définie pour tout $\underline{x} = (x_i)_{i \geq 0} \in X^{\mathbf{N}}$ par $Sf(\underline{x}) = (S_n f(x_0))_{n \geq 1}$. Notons $\nu = Sf(\mu^{\mathbf{N}})$. Soit σ le décalage à droite sur $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Nous notons à présent pour simplifier $S = Sf$, puis pour tout entier $l \geq 0$, $S^l(x) = S(\sigma^l x) = (S_n f(x_l))_{n \geq 1}$. Sur $(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \mathcal{B}(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}))$ nous considérons les fonctions coordonnées $f_n(\underline{y}) = y_n$ si $\underline{y} = (y_i)_{i \geq 0}$. Alors $f_n(S^l(\underline{x})) = S_n f(x_l)$. Soit $g_1, g_2, \dots$ une suite isonormale définie sur un autre espace d'épreuves que nous noterons $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$. Suivant par exemple [2] ou [6, paragraphe 5], nous dirons que l'ensemble $C_f := \{S_n f, n \geq 1\}$ est une classe de Donsker par rapport à μ lorsque la famille de fonctions coordonnées $(f_n)_{n \geq 1}$ est une classe de Donsker par rapport à ν ; autrement dit: pour tout $\delta > 0$, il existe un recouvrement fini (Δ_k) de $\mathbf{N}$ tel que pour tout k

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \mathbf{E} \int_{X^{\mathbf{N}}} \sup_{n, m \in \Delta_k} \left| \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{l=1}^q g_l(f_n(S^l) - f_m(S^l)) \right| d\mu < \delta. \quad (3.1)$$

Soit $f \in L^2(\mu)$ et posons $S^*f := \sup_{n \geq 1} |S_n(f)|$. Une condition nécessaire immédiate pour que C_f soit une classe de Donsker est que: $\int_X S^*f d\mu < \infty$.

Théorème 3.1. *Supposons l'hypothèse $(\mathcal{H})$ réalisée, et soit $f \in L^2(\mu)$ telle que l'ensemble $C_f = (S_n f)_{n \geq 1}$ soit une classe de Donsker. Alors*

$$N(S, f) = \sup_{\lambda \geq 0} \lambda^2 \mu\{S^*f > \lambda\} < \infty. \quad (3.2)$$

Si en outre, pour tout $f \in L^2(\mu)$, les ensembles C_f sont des classes de Donsker, alors

$$N(S) = \sup_{f \in L^2(\mu)} \sup_{\lambda \geq 0} \lambda^2 \mu\{S^*f > \lambda \|f\|_2\} < \infty. \quad (3.3)$$

D e m o n s t r a t i o n . Soit $f \in L^2(\mu)$. Puisque C_f est une classe de Donsker pour μ , il en résulte que pour tout $\delta > 0$, il existe un recouvrement fini (Δ_k) de $\mathbf{N}$ tel que

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \mathbf{E} \int_X \sup_{n, m \in \Delta_k} \left| \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{l=1}^q g_l(U^l(n) - U^l(m)) \right| d\mu < \delta. \quad (3.4)$$

Choisissons $\delta = 1$, et dans chaque ensemble Δ_k , un entier n_k arbitraire. Soit Q un entier tel que pour tout $q \geq Q$ et tout entier k , l'on ait

$$\mathbf{E} \int_X \sup_{n, m \in \Delta_k} \left| \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{l=1}^q g_l (U^l(n) - U^l(m)) \right| d\mu \leq 1.$$

Pour toute partie finie Δ de Δ_k , on a alors

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \int_X \sup_{n \in \Delta_k} \left| \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{l=1}^q g_l U^l(n) \right| d\mu &\leq \mathbf{E} \int_X \sup_{n, m \in \Delta_k} \left| \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{l=1}^q g_l (U^l(n) - U^l(m)) \right| d\mu \\ &+ \mathbf{E} \int_X \left| \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{l=1}^q g_l U^l(n_k) \right| d\mu \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_X \left[\frac{1}{q} \sum_{l=1}^q (U^l(n_k))^2 \right]^{1/2} d\mu \\ &\leq 1 + \|S_{n_k}(f)\|_2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

D'où, à l'aide de l'inégalité de Tchebycheff,

$$\mu \times \mathbf{P} \left\{ \sup_{n \in \Delta} \left| \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{1 \leq l \leq q} g_l U^l(n) \right| > \rho \lambda_0 \right\} \leq \frac{1 + \|S_{n_k}(f)\|_2}{\rho \lambda_0}. \quad (3.6)$$

Choisissons ρ tel que $(1 + \sup_{n \geq 1} \|S_n(f)\|_2) / (\rho \lambda_0) \leq \frac{1}{10}$. Alors, en combinant (1.4) (avec $\rho = \sqrt{M_1}$) et (3.6), on a donc établi pour toute partie finie Δ de Δ_k ,

$$\begin{aligned} 1 - \left(1 - \mu \left\{ \sup_{n \in \Delta} |S_n f| > \rho \sqrt{q} \right\} \right)^q \\ \leq 5\mu \times \mathbf{P} \left\{ \sup_{n \in \Delta} \left| \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{1 \leq l \leq q} g_l U^l(n) \right| > \rho \lambda_0 \right\} \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

D'où $(1 - \mu\{\sup_{n \in \Delta} |S_n f| > \rho \sqrt{q}\})^q \geq \frac{1}{2}$, ou encore

$$\ln \left(1 + \frac{\mu\{\sup_{n \in \Delta} |S_n f| > \rho \sqrt{q}\}}{1 - \mu\{\sup_{n \in \Delta} |S_n f| > \rho \sqrt{q}\}} \right) \leq \frac{\ln 2}{q} \leq \frac{1}{2},$$

si $q \geq 2$. Comme $\ln(1+x) \geq \frac{1}{e-1}x$, si $x \geq 0$ et $\ln(1+x) \leq 1$, on en déduit: pour tout $q \geq Q$

$$\mu \left\{ \sup_{n \in \Delta} |S_n f| > \rho \sqrt{q} \right\} \leq \frac{2(e-1) \ln 2}{q}. \quad (3.7)$$

Mais ceci est vrai pour toute partie finie Δ de Δ_k , et pour tout k . Par conséquent, en considérant pour tout entier k des parties croissantes de Δ_k , de réunion égale à Δ_k , on déduit de (3.7): pour tout $q \geq Q$, pour tout entier k

$$\mu \left\{ \sup_{n \in \Delta_k} |S_n f| > \rho \sqrt{q} \right\} \leq \frac{2(e-1) \ln 2}{q}, \quad (3.8)$$

et finalement, pour tout $q \geq Q$

$$\mu \{S^* f > \rho \sqrt{q}\} \leq K \frac{2(e-1) \ln 2}{q}. \quad (3.9)$$

Par un raisonnement standard que nous omettons, il en découle que

$$N(f) = \sup_{\lambda \geq 0} \lambda^2 \mu \{S^* f > \lambda\} < \infty. \quad (3.10)$$

Ce qui est le résultat annoncé. Enfin, l'inégalité (3.3) est une conséquence immédiate du principe de continuité, ainsi que de (3.4) et des hypothèses faites.

Les deux énoncés qui suivent sont relatifs à une définition légèrement différente de la notion de classe de Donsker. Nous référerons à [2, Théorème 1.3]. Nous dirons que l'ensemble $C_f := \{S_n f, n \geq 1\}$ est une classe de Donsker par rapport à μ lorsqu'il existe un écart d sur $\mathbf{N}$ tel que

(a) $(\mathbf{N}, d)$ est totalement borné,

(b) $\forall C > 0$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{q \rightarrow \infty} \mathbf{P} \times \mu^{\mathbf{N}} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} \sup_{d(n,m) \leq \delta} \left| \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{l=1}^q g_l(f_n(S^l) - f_m(S^l)) \right| > C \right\} = 0. \quad (3.11)$$

Remarquons que si

(b')

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{q \rightarrow \infty} \mathbf{E} \int_{X^{\mathbf{N}}} \sup_{1 \leq l \leq q} \sup_{d(n,m) \leq \delta} \left| \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{l=1}^q g_l(f_n(S^l) - f_m(S^l)) \right| d\mu^{\mathbf{N}} = 0,$$

alors (b') $\Rightarrow$ (b). Il s'avèrera cependant que (b) est nettement plus adaptée au problème considéré lorsqu'il s'agira d'étudier la propriété: C_f est une classe de Donsker pour tout $f \in L^2(\mu)$. Introduisons une notation commode: posons pour tout réel $\delta > 0$, tout $f \in L^2(\mu)$, tout $l \in \mathbf{N}$, $x \in X$ et $\underline{x} \in X^{\mathbf{N}}$

$$\begin{aligned} O_\delta f(x) &= \sup_{d(n,m) \leq \delta} |S_n f(x) - S_m f(x)|, \\ O_\delta^l f(\underline{x}) &= \sup_{d(n,m) \leq \delta} |f_n(S^l f(\underline{x})) - f_m(S^l f(\underline{x}))|. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Comme $f_n(S^l f(\underline{x})) = S_n f(x_l)$, les variables $O_\delta^l f$ forment une suite de copies indépendantes de $O_\delta f$. Posons aussi pour tout entier $t \geq 0$,

$$O_{\delta,t}^l f(\underline{x}) = \sup_{d(n,m) \leq \delta, n \vee m \leq t} |f_n(S^l f(\underline{x})) - f_m(S^l f(\underline{x}))|. \quad (3.13)$$

Par (1.4), pour tous entiers $t \geq 0$ et $q \geq 1$, tout réel $M > 0$,

$$\begin{aligned} & \mu^N \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_{\delta, t}^l f > M \sqrt{q} \right\} \\ & \leq 4P \times \mu^N \left\{ \sup_{d(n, m) \leq \delta} \left| \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{l=1}^q g_l(f_n(S^l) - f_m(S^l)) \right| > M \lambda_0 \right\}. \end{aligned}$$

En faisant tendre successivement t vers l'infini, puis q vers l'infini, et enfin M vers 0, on en déduit immédiatement que si C_f est une classe de Donsker alors

$$\forall C > 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{q \rightarrow \infty} \mu^N \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_{\delta}^l f > C \sqrt{q} \right\} = 0.$$

D'où la proposition suivante.

Proposition 3.1. *L'implication suivante est valable pour tout $f \in L^2(\mu)$:*

C_f est une classe de Donsker

$$\implies \forall C > 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{q \rightarrow \infty} \mu^N \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_{\delta}^l f > C \sqrt{q} \right\} = 0. \quad (3.14)$$

Remarques. (i) Avec la définition un peu plus forte (b'), on montrerait de même, en se servant de (1.5) cette fois, que

$$C_f \text{ est une classe de Donsker} \implies \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{q \rightarrow \infty} \int_{X^N} \sup_{1 \leq l \leq q} O_{\delta}^l f d\mu^N = 0. \quad (3.14')$$

(ii) On peut préciser davantage la propriété (3.14). En effet, on remarque sans peine, en invoquant l'inégalité de Paley-Zygmund, que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \min \left(1, q\mu \{ O_{\delta} f > C \sqrt{q} \} \right) & \leq \mu^N \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_{\delta}^l f > C \sqrt{q} \right\} \\ & \leq \min \left(1, q\mu \{ O_{\delta} f > C \sqrt{q} \} \right). \end{aligned}$$

De sorte que (3.14) peut être reformulée de façon équivalente comme suit:

C_f est une classe de Donsker

$$\implies \forall C > 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{q \rightarrow \infty} q\mu \{ O_{\delta} f > C \sqrt{q} \} = 0. \quad (3.14'')$$

Néanmoins, c'est sous la forme (3.14) que cette propriété sera commode à utiliser dans ce qui suit.

(iii) Remarquons enfin que pour toute suite $(a_{n, m})_{n, m}$ de réels positifs $\limsup_{n, m \rightarrow \infty} a_{n, m} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \limsup_{m \rightarrow \infty} a_{n, m}$ avec égalité si pour

tout m , la suite $(a_{n,m})_n$ est décroissante. On peut donc dans les formulations précédentes, remplacer $\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{q \rightarrow \infty}$ par $\limsup_{\delta \rightarrow 0, q \rightarrow \infty}$.

Etudions maintenant la situation où pour tout $f \in L^2(\mu)$, C_f est une classe de Donsker. Nous allons établir le résultat suivant qui fournit une version uniforme de la proposition 3.1 dans ce cas.

Théorème 3.2. *Supposons que pour tout $f \in L^2(\mu)$, les ensembles C_f soient des classes de Donsker. Alors,*

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{q \rightarrow \infty} \sup_{f \in L^2(\mu)} \mu^{\mathbf{N}} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_{\delta}^l(f) > C \|f\| \sqrt{q} \right\} = 0. \quad (3.15)$$

En particulier,

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{q \rightarrow \infty} \sup_{f \in L^2(\mu)} q \mu \{ O_{\delta}^l(f) > C \|f\| \sqrt{q} \} = 0. \quad (3.16)$$

D e m o n s t r a t i o n. Soit un réel $\alpha > 0$ fixé. Posons pour tout réel $\delta > 0$, tous entiers q, Q et t positifs

$$\begin{aligned} B_{\delta, q, t} &= \left\{ f \in L^2(\mu) \mid \mu^{\mathbf{N}} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_{\delta, t}^l f > \sqrt{q} \right\} \leq \frac{\alpha}{2} \right\}, \\ B_{\delta, Q} &= \left\{ f \in L^2(\mu) \mid \forall q \geq Q, \mu^{\mathbf{N}} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_{\delta}^l f > \sqrt{q} \right\} \leq \frac{\alpha}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Alors $B_{\delta, Q} = \bigcap_{t \in \mathbf{N}} \bigcap_{q \geq Q} B_{\delta, q, t}$. Montrons que les ensembles $B_{\delta, q, t}$ sont fermés. Soient $(f_k)_k \subset B_{\delta, q, t}$ et $f \in L^2(\mu)$ tels que $f_k \rightarrow f$ dans $L^2(\mu)$. Soit $h > 0$. Alors en écrivant que $f = f - f_k + f_k$, on a pour tout entier k

$$\begin{aligned} &\mu^{\mathbf{N}} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_{\delta, t}^l(f) > \sqrt{q} + h \right\} \\ &\leq \mu^{\mathbf{N}} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_{\delta, t}^l(f_k) > \sqrt{q} \right\} + \mu^{\mathbf{N}} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_{\delta, t}^l(f - f_k) > h \right\} \\ &\leq \frac{\alpha}{2} + \sum_{l=1}^q \sum_{d(n, m) \leq \delta, n \vee m \leq t} \mu^{\mathbf{N}} \{ |[f_n - f_m](S^l(f - f_k))| > h \} \\ &= \frac{\alpha}{2} + \sum_{l=1}^q \sum_{d(n, m) \leq \delta, n \vee m \leq t} \mu \{ |[S_n - S_m](f - f_k)| > h \} \\ &\leq \frac{\alpha}{2} + 2 \sum_{n \leq t} \mu \{ |S_n(f - f_k)| > h \} \longrightarrow \frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

quand k tend vers l'infini par continuité en mesure des opérateurs S_n . Par suite, en prenant le minimum pour tout k dans chacune des expressions de l'inégalité précédente, $\mu^{\mathbf{N}} \{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_{\delta, t}^l(f) > \sqrt{q} + h \} \leq \alpha/2$. Comme en outre

$$\left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_{\delta, t}^l(f) > \sqrt{q} + h \right\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_{\delta, t}^l(f) > \sqrt{q} + \frac{1}{j} \right\},$$

on en déduit donc

$$\mu^{\mathbf{N}} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_{\delta,t}^l(f) > \sqrt{q} \right\} = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu^{\mathbf{N}} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_{\delta,t}^l(f) > \sqrt{q} + \frac{1}{j} \right\} \leq \frac{\alpha}{2}.$$

D'où $f \in B_{\delta,q,t}$; les ensembles $B_{\delta,q,t}$ sont donc bien fermés, et par suite les ensembles $B_{\delta,Q}$ le sont aussi à leur tour. Mais par hypothèse, et compte tenu de la dernière remarque faite à la suite de la proposition 3.1,

$$L^2(\mu) = \bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{Q \geq 1} B_{1/n,Q}.$$

En vertu du théorème de Baire, l'un au moins de ces ensembles est d'intérieur non vide, notons-le pour simplifier encore $B = B_{\delta,Q}$ avec $\delta = 1/n$. Il existe donc $f_0 \in B$ et $r > 0$ tels que la boule $B(f_0, r) = \{f \in L^2(\mu): \|f - f_0\| \leq r\}$ soit contenue dans B . Soit $z \in L^2(\mu)$ tel que $\|z\| = 1$, et $f = f_0 + rz$. Alors $f \in B$, et à l'aide de l'inégalité du triangle

$$\begin{aligned} \mu^{\mathbf{N}} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_{\delta}^l(rz) > 2\sqrt{q} \right\} &\leq \mu^{\mathbf{N}} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_{\delta}^l(f) > \sqrt{q} \right\} \\ &\quad + \mu^{\mathbf{N}} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_{\delta}^l(f_0) > \sqrt{q} \right\} \leq \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha. \end{aligned}$$

Posons $C(\alpha) = 2/r$. On vient de montrer que pour tout $z \in L^2(\mu)$, tel que $\|z\| = 1$, tout entier $q \geq Q$, $\mu^{\mathbf{N}} \{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_{\delta}^l(z) > C(\alpha) \sqrt{q} \} \leq \alpha$. Par suite,

$$\sup_{q \geq Q} \sup_{f \in L^2(\mu)} \mu^{\mathbf{N}} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_{\delta}^l(f) > C(\alpha) \|f\| \sqrt{q} \right\} \leq \alpha.$$

Par monotonie de l'application $\delta \mapsto O_{\delta}^l(f)$, on en déduit

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{q \rightarrow \infty} \sup_{f \in L^2(\mu)} \mu^{\mathbf{N}} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_{\delta}^l(f) > C(\alpha) \|f\| \sqrt{q} \right\} \leq \alpha.$$

Ce qui établit le (3.15) puisque $\alpha > 0$ est arbitraire. Enfin (3.16) n'est qu'une reformulation de (3.15) obtenue à l'aide de l'inégalité de Paley-Zygmund (voir remarque consécutive à la proposition 3.1).

Le théorème précédent nous a fourni une condition nécessaire pour que toutes les classes C_f soient de Donsker. Cette condition indique que les distributions des δ -oscillations associées à f et S ont un comportement asymptotique uniforme. L'introduction de la fonction $C(\alpha)$ en cours de démonstration, laquelle a fourni la troisième limite (quand C tend vers l'infini) dans (3.16) est justifiée par l'existence du principe de Banach en théorie ergodique. Les travaux de Bourgain [1] relatifs au principe de continuité et ceux que nous avons menés dans [9] amènent naturellement la question suivante: soit $Z^{\mathbf{N}}$ le processus gaussien canonique sur $L^2(X^{\mathbf{N}}, \mu^{\mathbf{N}})$,

si (3.15) est réalisée, par quelle propriété de régularité de $Z^{\mathbf{N}}$ sur les ensembles C_f se traduit-elle?

Nous allons répondre à cette question dans le cas restreint mais fondamental en théorie ergodique où les opérateurs S_n commutent avec une rotation du tore. C'est l'objet de notre prochain énoncé. Nous supposons donc que l'espace probabilisé est le tore usuel $\Pi = \mathbf{R}/\mathbf{Z} = [0, 1[$ et que μ est la mesure de Lebesgue normalisée. Soit θ un nombre irrationnel et considérons la rotation $\tau = \tau_\theta$ d'angle θ définie par $\theta x = x + \theta \bmod (1)$. Notons T l'opérateur associé à τ et défini par $Tf = f \circ \tau$, $f \in L^0(\mu)$. Notons aussi $e(x) = \exp(2i\pi x)$, et enfin $e_l(x) = e(lx)$, $l \in \mathbf{Z}$. Nous supposons donc que:

($\mathcal{H}_T$) les opérateurs S_n commutent avec les opérateurs T^j :

$$S_n T^j = T^j S_n \text{ sur } L^2(\mu).$$

Posons pour tout $f \in L^2(\mu)$, tout entier positif l , tous $x \in X$, et tout réel positif δ :

$$\begin{aligned} O_\delta(Z, f) &= \sup_{d(n, m) \leq \delta} |Z(S_n f) - Z(S_m f)|, \\ O_\delta^l(Z^{\mathbf{N}}, f) &= \sup_{d(n, m) \leq \delta} \left| Z^{\mathbf{N}}[f_n(S^l f)] - Z^{\mathbf{N}}[f_m(S^l f)] \right|. \end{aligned} \quad (3.18)$$

L'énoncé en vue est le suivant.

Théorème 3.3. *Supposons l'hypothèse ($\mathcal{H}_T$) réalisée, et qu'en outre la condition suivante soit réalisée:*

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{q \rightarrow \infty} \sup_{f \in L^2(\mu)} \mu^{\mathbf{N}} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_\delta^l(f) > C \|f\| \sqrt{q} \right\} = 0. \quad (3.19)$$

Alors

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{q \rightarrow \infty} \sup_{f \in L^2(\mu)} \mathbf{P} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_\delta^l(Z^{\mathbf{N}}, f) > C \|f\| \sqrt{q} \right\} = 0, \quad (3.20a)$$

et

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{q \rightarrow \infty} \sup_{f \in L^2(\mu)} q \mathbf{P} \{ O_\delta(Z, f) > C \|f\| \sqrt{q} \} = 0. \quad (3.20b)$$

En particulier, si pour tout $f \in L^2(\mu)$ les ensembles C_f sont des classes de Donsker, alors nécessairement (3.20a), et donc (3.20b) sont vérifiées.

Démonstration. Soit $f \in L^2(\mu)$, $f \sim \sum_{l \in \mathbf{Z}} a_l e_l$, $a = (a_l)_{l \in \mathbf{Z}} \in \ell^2$. Associons-lui la série de Fourier aléatoire gaussienne $X_f = \sum_{l \in \mathbf{Z}} a_l \operatorname{Re}(\gamma_l \bar{e}_l)$, où $\gamma_l = g_l + i g'_l$, et $(g_l)_{l \in \mathbf{Z}}$ et $(g'_l)_{l \in \mathbf{Z}}$ sont deux suites indépendantes des variables aléatoires réelles *i.i.d.* de loi commune $\mathcal{N}(0, 1)$ et d'espace d'épreuves commun $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$. Les lois des éléments de Stein $F_{j,f}$

(voir (1.1)) sont, pour tout $f \in L^2(\mu)$, relativement compactes dans $L^2(\mu)$ ([7, Exemple 2.2]); et on peut extraire une sous-suite convergent au sens de la topologie de la convergence étroite sur $L^2(\mu)$ vers celle de X_f . Soit $\alpha > 0$ et $C = C(\alpha)$ tel que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{q \rightarrow \infty} \sup_{f \in L^2(\mu)} \mu^{\mathbf{N}} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_\delta^l(f) > C \|f\| \sqrt{q} \right\} < \alpha.$$

Soient $\delta > 0$ et $Q < \infty$ entier tels que

$$\sup_{q \geq Q} \sup_{f \in L^2(\mu)} \mu^{\mathbf{N}} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_\delta^l(f) > C \|f\| \sqrt{q} \right\} < \alpha.$$

En particulier

$$\sup_{q \geq Q} \mu^{\mathbf{N}} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_\delta^l(X_f) > C \|X_f\| \sqrt{q} \right\} < \alpha.$$

Soit $L < \infty$ tel que si $\Lambda = \{\|X_f\| \leq L \|f\|\}$, alors $\mathbf{P}(\Lambda^c) \leq \alpha$. Notons que L ne dépend pas de f . Alors

$$\begin{aligned} \alpha &\geq \mathbf{E} \mu^{\mathbf{N}} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_\delta^l(X_f) > C \|X_f\| \sqrt{q} \right\} \\ &\geq \int_{\Lambda} \mu^{\mathbf{N}} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_\delta^l(X_f) > C \|X_f\| \sqrt{q} \right\} d\mathbf{P} \\ &\geq \int_{\Lambda} \mu^{\mathbf{N}} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_\delta^l(X_f) > CL \|f\| \sqrt{q} \right\} d\mathbf{P} \\ &= \int_{X^{\mathbf{N}}} \mathbf{P} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_\delta^l(X_f) > CL \|f\| \sqrt{q} \right\} d\mu^{\mathbf{N}} \\ &\quad - \int_{\Lambda^c} \mu^{\mathbf{N}} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_\delta^l(X_f) > CL \|f\| \sqrt{q} \right\} d\mathbf{P} \\ &\geq \int_{X^{\mathbf{N}}} \mathbf{P} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_\delta^l(X_f) > CL \|f\| \sqrt{q} \right\} d\mu^{\mathbf{N}} - \mathbf{P}(\Lambda^c) \\ &\geq \int_{X^{\mathbf{N}}} \mathbf{P} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_\delta^l(X_f) > CL \|f\| \sqrt{q} \right\} d\mu^{\mathbf{N}} - \alpha. \end{aligned}$$

D'où, si $C(\alpha) = CL$,

$$\sup_{q \geq Q} \sup_{f \in L^2(\mu)} \int_X \mathbf{P} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_\delta^l(X_f) > C(\alpha) \|f\| \sqrt{q} \right\} d\mu^{\mathbf{N}} \leq 2\alpha.$$

Mais puisque les S_n commutent avec les T^j , la loi de $(S_n(X_f(t)))_{n \geq 1}$ ne dépend pas de t ; on a

$$\mathbf{E} S_n(X_f(t)) S_m(X_f(t)) = \langle S_n f, S_m f \rangle \quad (n, m \in \mathbf{N}).$$

De sorte que, pour tout $f \in L^2(\mu)$, $q \geq Q$ et $t \in \Pi$,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_\delta^l(X_f) > C(\alpha) \|f\| \sqrt{q} \right\} \\ &= \mathbf{P} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_\delta^l(Z^{\mathbf{N}}, f)(\underline{x}) > C(\alpha) \|f\| \sqrt{q} \right\}. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{q \rightarrow \infty} \sup_{f \in L^2(\mu)} \mathbf{P} \left\{ \sup_{1 \leq l \leq q} O_\delta^l(Z^{\mathbf{N}}, f)(\underline{x}) > C \|f\| \sqrt{q} \right\} = 0.$$

Ce qui établit le théorème 3.3.

Le théorème que nous allons à présent établir fournit une condition suffisante pour qu'une classe de fonctions soit une classe de Donsker. La condition que nous obtenons est de type entropique. Introduisons au préalable la famille de fonctionnelles suivante. Soit Y une variable aléatoire réelle de carré intégrable, et soit $Y_1, Y_2, \dots$ une suite de copies indépendantes de Y . Posons pour tout entier positif q et tout réel x :

$$\Upsilon_{q,Y}(x) = \mathbf{E} \exp \left\{ - \frac{qx^2}{Y_1^2 + \dots + Y_q^2} \right\}. \quad (3.21)$$

Alors $\lim_{q \rightarrow \infty} \Upsilon_{q,Y}(x) = \exp\{-x^2/\|Y\|_2^2\}$. Soit $\Psi = \{\psi_n, n \in \mathbf{N}\} \subset L^2(\mu)$. Notons $\underline{\Psi} = (\psi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et soit $\underline{\Psi}^1, \underline{\Psi}^2, \dots, \underline{\Psi}^l = (\psi_n^l)_{n \in \mathbf{N}}, \dots$ une suite de copies indépendantes du vecteur $\underline{\Psi}$, à valeurs dans $(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \mathcal{B}(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}))$. Posons alors

$$\Upsilon_{q,\Psi}(x) = \sup_{Y \in \mathcal{S}(\Psi)} \Upsilon_{q,Y}(x), \quad (3.22)$$

où

$$\mathcal{S}(\Psi) = \left\{ \frac{[\psi_n - \psi_m]^2}{\|\psi_n - \psi_m\|_2^2}, n, m \in \mathbf{N}, \|\psi_n - \psi_m\|_2 \neq 0 \right\}.$$

Posons aussi

$$\mathcal{I}_q(\Delta, \Psi) = \int_0^\delta \Upsilon_{q,\Psi}^{-1} \left(\frac{1}{N(\Delta, u)} \right) du,$$

où $N(\Delta, u)$ est le cardinal minimal d'un recouvrement de Δ (pour l'écart d induit sur $\mathbf{N}$ par la relation $d(n, m) := \|\psi_n - \psi_m\|_2$) par des boules ouvertes de rayon δ centrées dans Δ ; et notons enfin pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $\delta > 0$: $\Psi(n, \delta) = \{m: \|\psi_n - \psi_m\|_2 < \delta\}$.

Théorème 3.4. *Supposons que Ψ soit un ensemble totalement borné dans $L^2(\mu)$, et que la condition suivante soit vérifiée:*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{q \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbf{N}} \int_0^\delta \Upsilon_{q,f}^{-1} \left(\frac{1}{N(\Psi(n, \delta), u)} \right) du = 0. \quad (3.23)$$

Alors Ψ est une classe de Donsker.

En outre, pour tout $\delta > 0$, il existe un recouvrement fini (Δ_k) de $\mathbf{N}$ tel que pour tout k :

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{q}} \int \sup_{n, m \in \Delta_k} \sup_{1 \leq l \leq q} |\psi_n^l - \psi_m^l| d\mu < \delta. \quad (3.23a)$$

D e m o n s t r a t i o n. Soit $\Delta \subset \mathbf{N}$ de diamètre δ . Soit $(\varepsilon_m)_{m \geq 0}$ une suite décroissante de réels positifs avec $\varepsilon_0 = \delta$. Soit pour tout entier k , Δ_k une suite dans Δ de cardinal $N(\Delta, \varepsilon_k)$ telle que $\bigcup_{n \in \Delta_k} \Psi(n, \varepsilon_k) = \Delta$. On suppose que $\Delta_0 := \{n_0\}$. Posons $\Delta^N = \bigcup_{n=0}^N \Delta_n$. Notons formellement $n \mapsto \underline{n}$, une application de Δ_k dans Δ_{k-1} définie par $d(n, \underline{n}) < \varepsilon_{k-1}$. Posons

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \Delta_0, \\ \sum_{m=1}^k \varepsilon_m x_m & \text{si } x \in \Delta_k, \quad k \geq 1. \end{cases}$$

Alors

$$\mu(\underline{n}) - \mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in \Delta_k \cap \Delta_{k-1}, \quad k \geq 1, \\ -\varepsilon_k x_k & \text{si } n \in \Delta_k \cap \Delta_{k-1}^c, \quad k \geq 1. \end{cases}$$

Considérons les suites de maximums suivantes:

$$\begin{aligned} \phi_m &= \sup_{n \in \Delta_m} \sup_{1 \leq l \leq q} \left(|\psi_n^l - \psi_{n_0}^l| - \frac{\mu(n)}{\lambda_0} \right)^+, \\ \Phi_N &= \sup_{0 \leq m \leq N} \phi_m = \sup_{n \in \Delta^N} \sup_{1 \leq l \leq q} \left(|\psi_n^l - \psi_{n_0}^l| - \frac{\mu(n)}{\lambda_0} \right)^+, \\ \tilde{\phi}_m &= \sup_{n \in \Delta_m} \left(\left| \sum_{l=1}^q g_l(\omega) (\psi_n^l(x) - \psi_{n_0}^l(x)) \right| - \mu(n) \right)^+, \\ \tilde{\Phi}_N &= \sup_{0 \leq m \leq N} \tilde{\phi}_m = \sup_{n \in \Delta^N} \left(\left| \sum_{l=1}^q g_l(\omega) (\psi_n^l(x) - \psi_{n_0}^l(x)) \right| - \mu(n) \right)^+. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Nous allons tout d'abord établir

$$\Phi_N(x) \leq \frac{4}{\lambda_0} \mathbf{E} \tilde{\Phi}_N(x) \quad (\forall x \in X). \quad (3.25)$$

Ceci résulte du même type d'argumentation utilisé pour montrer les inégalités B (Section 2). En effet, soit x tel que $\Phi_N(x) > 0$, soient alors $n \in \Delta^N$, et $l_0 \in [1, q]$ tels que

$$\Phi_N(x) = |\psi_n^{l_0}(x) - \psi_{n_0}^{l_0}(x)| - \frac{\mu(n)}{\lambda_0} > 0.$$

On peut trouver un ensemble mesurable F_x de probabilité au moins égale à $\frac{1}{4}$, tel que si $\omega \in F_x$, alors:

$$\left| \sum_{l=1}^q g_l(\omega) (\psi_n^l(x) - \psi_{n_0}^l(x)) \right| \geq |g_{l_0}(\omega)| |\psi_n^{l_0}(x) - \psi_{n_0}^{l_0}(x)| \geq \lambda_0 |\psi_n^{l_0}(x) - \psi_{n_0}^{l_0}(x)|.$$

D'où,

$$\begin{aligned}\Phi_N(x) &= |\psi_n^{l_0}(x) - \psi_{n_0}^{l_0}(x)| - \frac{\mu(n)}{\lambda_0} \\ &\leq \frac{1}{\lambda_0} \left\{ \left| \sum_{l=1}^q g_l(\omega) (\psi_n^l(x) - \psi_{n_0}^l(x)) \right| - \mu(n) \right\} \\ &\leq \frac{1}{\lambda_0} \sup_{n \in \Delta^N} \left\{ \left| \sum_{l=1}^q g_l(\omega) (\psi_n^l(x) - \psi_{n_0}^l(x)) \right| - \mu(n) \right\}^+ = \frac{1}{\lambda_0} \tilde{\Phi}_N.\end{aligned}$$

Si maintenant $\Phi_N(x) = 0$, l'inégalité précédente est encore vraie. En intégrant par rapport à $\mathbf{P}$ cette inégalité sur l'ensemble F_x , on en déduit l'inégalité annoncée. Evaluons le membre de droite. Si $\tilde{\Phi}_m > \tilde{\Phi}_{m-1}$, alors $\tilde{\Phi}_m = \tilde{\phi}_m$ et donc $\tilde{\Phi}_m - \tilde{\Phi}_{m-1} = \tilde{\phi}_m - \tilde{\Phi}_{m-1}$. Soit $n \in \Delta_m$ telle que: $\tilde{\phi}_m = |\sum_{l=1}^q g_l(\omega)(\psi_n^l(x) - \psi_{n_0}^l(x))| - \mu(n)$. Alors

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_m - \tilde{\Phi}_{m-1} &= \left| \sum_{l=1}^q g_l(\omega) (\psi_n^l(x) - \psi_{n_0}^l(x)) \right| - \mu(n) - \tilde{\Phi}_{m-1} \\ &\leq \left| \sum_{l=1}^q g_l(\omega) (\psi_n^l(x) - \psi_{n_0}^l(x)) \right| - \mu(n) \\ &\quad - \left| \sum_{l=1}^q g_l(\omega) (\psi_{\underline{n}}^l(x) - \psi_{n_0}^l(x)) \right| + \mu(\underline{n}) \\ &\leq \left| \sum_{l=1}^q g_l(\omega) (\psi_n^l(x) - \psi_{\underline{n}}^l(x)) \right| - \varepsilon_m x_m \\ &\leq \sup_{n \in \Delta_m} \left(\left| \sum_{l=1}^q g_l(\omega) (\psi_n^l(x) - \psi_{\underline{n}}^l(x)) \right| - \varepsilon_m x_m \right)^+.\end{aligned}$$

Comme cette inégalité reste vraie si $\tilde{\Phi}_m = \tilde{\Phi}_{m-1}$ trivialement, on a donc

$$\tilde{\Phi}_m - \tilde{\Phi}_{m-1} \leq \sup_{n \in \Delta_m} \left(\left| \sum_{l=1}^q g_l(\omega) (\psi_n^l(x) - \psi_{\underline{n}}^l(x)) \right| - \varepsilon_m x_m \right)^+. \quad (3.26)$$

Par suite, en observant que $\tilde{\Phi}_0 = 0$ et donc $\tilde{\Phi}_N = \sum_{m=1}^N \tilde{\Phi}_m - \tilde{\Phi}_{m-1}$, on obtient

$$\begin{aligned}\Phi_N(x) &\leq \frac{4}{\lambda_0} \mathbf{E} \tilde{\Phi}_N(x) \leq \frac{4}{\lambda_0} \sum_{m=1}^N \mathbf{E} \sup_{n \in \Delta_m} \left(\left| \sum_{l=1}^q g_l(\omega) (\psi_n^l(x) - \psi_{\underline{n}}^l(x)) \right| - \varepsilon_m x_m \right)^+ \\ &\leq \frac{4}{\lambda_0} \sum_{m=1}^N \sum_{n \in \Delta_m} \mathbf{E} \left(\left| \sum_{l=1}^q g_l(\omega) (\psi_n^l(x) - \psi_{\underline{n}}^l(x)) \right| - \varepsilon_m x_m \right)^+.\end{aligned} \quad (3.27)$$

Mais comme

$$\mathbf{E}(\mathcal{N}(0, 1) - y)^+ \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-y^2/2} \quad (y \geq 0),$$

on a aussi,

$$\mathbf{E} \left(\left| \sum_{l=1}^q g_l(\psi_n^l(x) - \psi_{\underline{n}}^l(x)) \right| - \varepsilon_m x_m \right)^+ \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\sum_{l=1}^q (\psi_n^l(x) - \psi_{\underline{n}}^l(x))^2 \right]^{1/2} \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(\varepsilon_m x_m)^2}{[\sum_{l=1}^q (\psi_n^l(x) - \psi_{\underline{n}}^l(x))^2]} \right\}. \quad (3.28)$$

D'où en intégrant par rapport à μ , et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int \mathbf{E} \left(\left| \sum_{l=1}^q g_l(\psi_n^l - \psi_{\underline{n}}^l) \right| - \varepsilon_m x_m \right)^+ d\mu \\ \leq \sqrt{\frac{2q}{\pi}} \|\psi_n^l - \psi_{\underline{n}}^l\|_2 \left[\int \exp \left\{ -\frac{(\varepsilon_m x_m)^2}{[\sum_{l=1}^q (\psi_n - \psi_{\underline{n}})^2]} \right\} d\mu \right]^{1/2}. \quad (3.29)$$

On a donc établi

$$\int \Phi_N d\mu = \int \sup_{n \in \Delta^N} \sup_{1 \leq l \leq q} \left(|\psi_n^l - \psi_{n_0}^l| - \frac{\mu(n)}{\lambda_0} \right)^+ d\mu \leq \frac{4}{\lambda_0} \mathbf{E} \int \tilde{\Phi}_N d\mu \\ = \frac{4}{\lambda_0} \mathbf{E} \int \sup_{n \in \Delta^N} \left(\left| \sum_{l=1}^q g_l(\psi_n^l - \psi_{n_0}^l) \right| - \mu(n) \right)^+ d\mu \leq \frac{4}{\lambda_0} \left(\frac{2q}{\pi} \right)^{1/2} \\ \times \sum_{m=1}^N \sum_{n \in \Delta_m} \|\psi_n^l - \psi_{\underline{n}}^l\|_2 \left[\int \exp \left\{ -\frac{(\varepsilon_m x_m)^2}{[\sum_{l=1}^q (\psi_n - \psi_{\underline{n}})^2]} \right\} d\mu \right]^{1/2}. \quad (3.30)$$

En remplaçant ψ_n^l par $\psi_n^l/\sqrt{q}$ dans les inégalités précédentes, on en déduit aussi

$$\int \sup_{n \in \Delta^N} \sup_{1 \leq l \leq q} \left(\frac{|\psi_n^l - \psi_{n_0}^l|}{\sqrt{q}} - \frac{\mu(n)}{\lambda_0} \right)^+ d\mu \\ \leq \frac{4}{\lambda_0} \mathbf{E} \int \sup_{n \in \Delta^N} \left(\left| \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{l=1}^q g_l(\psi_n^l - \psi_{n_0}^l) \right| - \mu(n) \right)^+ d\mu \leq \frac{4}{\lambda_0} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \\ \times \sum_{m=1}^N \sum_{n \in \Delta_m} \|\psi_n^l - \psi_{\underline{n}}^l\|_2 \left[\int \exp \left\{ -\frac{(\varepsilon_m x_m)^2}{q^{-1} \sum_{l=1}^q (\psi_n^l - \psi_{\underline{n}}^l)^2} \right\} d\mu \right]^{1/2}. \quad (3.31)$$

Choisissons

$$\varepsilon_m = \delta 2^{-m}, \quad x_m = \Upsilon_{q, \Psi}^{-1} \left(\frac{1}{N(\Delta, \varepsilon_m)} \right). \quad (3.32)$$

Alors,

$$\mu(N) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m x_m \leq 2\mathcal{J}(\Delta, \Psi),$$

et on peut continuer nos estimations de la façon suivante

$$\begin{aligned}
 & \int \sup_{n \in \Delta^N} \sup_{1 \leq l \leq q} \left(\frac{|\psi_n^l - \psi_{n_0}^l|}{\sqrt{q}} - \frac{\mu(n)}{\lambda_0} \right)^+ d\mu \\
 & \leq \frac{4}{\lambda_0} \mathbf{E} \int \sup_{n \in \Delta^N} \left(\left| \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{l=1}^q g_l(\omega) (\psi_n^l(x) - \psi_{n_0}^l(x)) \right| - \mu(n) \right)^+ d\mu \\
 & \leq \frac{4}{\lambda_0} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \sum_{m=1}^N \delta 2^{-m} \sum_{n \in \Delta_m} \mathbf{r}_{q, \Psi}(x_m) \\
 & \leq \frac{4\delta}{\lambda_0} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \sum_{m=1}^N 2^{-m} \leq \frac{4\delta}{\lambda_0} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2}
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

D'où, en faisant tendre N vers l'infini

$$\begin{aligned}
 & \int \sup_{n \in \Delta} \sup_{1 \leq l \leq q} \left(\frac{|\psi_n^l - \psi_{n_0}^l|}{\sqrt{q}} - \frac{\mu(n)}{\lambda_0} \right)^+ d\mu \\
 & \leq \frac{4}{\lambda_0} \mathbf{E} \int \sup_{n \in \Delta} \left(\left| \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{l=1}^q g_l(\psi_n^l - \psi_{n_0}^l) \right| - \mu(n) \right)^+ d\mu \leq \frac{4\delta}{\lambda_0} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Il en résulte que

$$\mathbf{E} \int \sup_{n, m \in \Delta} \left| \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{l=1}^q g_l(\psi_n^l - \psi_m^l) \right| d\mu \leq 2\delta \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} + 4\mathcal{J}(\Delta, \Psi). \tag{3.35}$$

Soit $(\Delta_k)_{k \in \kappa}$ un recouvrement fini de $\mathbf{N}$ par des ensembles de diamètre inférieur à δ , ce qui est possible par hypothèse. On a donc à l'aide de l'estimation précédente, pour tout $k \in \kappa$:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{E} \int \sup_{n, m \in \Delta_k} \left| \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{l=1}^q g_l(\psi_n^l - \psi_m^l) \right| d\mu \leq 2\delta \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} + 4\mathcal{J}(\Delta_k, \Psi) \\
 & \leq K \sup_{n \in \mathbf{N}} \int_0^\delta \mathbf{r}_{q, \Psi}^{-1} \left(\frac{1}{N(\{m: \|\psi_n^l - \psi_m^l\| < \delta\}, u)} \right) du,
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

en notant K une constante numérique. En faisant tendre q vers l'infini, on obtient pour tout $k \in \kappa$:

$$\begin{aligned}
 & \limsup_{q \rightarrow \infty} \mathbf{E} \int \sup_{n, m \in \Delta_k} \left| \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{l=1}^q g_l(\psi_n^l - \psi_m^l) \right| d\mu \\
 & \leq K \limsup_{q \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbf{N}} \int_0^\delta \mathbf{r}_{q, \Psi}^{-1} \left(\frac{1}{N(\{m: \|\psi_n^l - \psi_m^l\| < \delta\}, u)} \right) du.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Etant donné maintenant $\delta' > 0$ arbitraire, on peut donc, compte tenu des hypothèses faites, choisir δ en fonction de δ' , de sorte que le membre de droite de l'inégalité (3.37) soit, pour tout entier $k \in \kappa$, majoré par δ' . Ceci montre donc que Ψ est une classe de Donsker. La deuxième partie du théorème 3.4 résulte quant à elle de (3.33) et de l'hypothèse (3.23).

RÉFÉRENCES

1. *Bourgain J.* Almost sure convergence and bounded entropy. — *Israel J. Math.*, 1988, v. 63, № 1, p. 79–97.
2. *Giné E., Zinn J.* Some limit theorems for empirical processes. — *Ann. Probab.*, 1984, v. 12, № 4, p. 929–989.
3. *Lifshits M., Weber M.* Tightness of stochastic families arising from randomization procedure. — *Asymptotic Methods in Probability and Statistics with Applications* (St. Peterburg, 1998). Boston: Birkhäuser, 2001, p. 143–159.
4. *Lifshits M., Weber M.* Oscillations of Gaussian Stein's elements. — *Progr. Probab.*, 1998, v. 43, p. 249–261.
5. *Pisier G.* Le théorème de la limite centrale et la loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach. I, II. — *Séminaire Maurey–Schwarz 1975–76*, exp. № 3, 4. Palaiseau: Ecole Polytechnique, 1976.
6. *Talagrand M.* Applying a theorem of Fernique. — *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 1996, v. 32, № 6, p. 779–799.
7. *Weber M.* The Stein randomization procedure. — *Rend. Mat. Appl. (7)*, 1994, v. 16, № 4, p. 569–605.
8. *Weber M.* Sur le caractère gaussien de la convergence presque partout. — *Fund. Math.*, 2001, v. 167, № 1, p. 23–54.
9. *Weber M.* Entropie métrique et convergence presque partout. Paris: Hermann, 1998, 151 p.

Поступила в редакцию
15.X.2002