Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Нагаев, Новое доказательство абсолютной сходимости ряда Спицера, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 1, 149–153

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2550>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 10:58:57

© 2009 г.

НАГАЕВ С. В.*

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ
РЯДА СПИЦЕРА¹⁾

Дается новое доказательство абсолютной сходимости ряда Спицера, основанное на неравенстве Берри–Эссеена. При этом оценивается сверху сумма ряда, составленного из абсолютных величин членов ряда Спицера.

Ключевые слова и фразы: ряд Спицера, оценка Берри–Эссеена, нормальный закон, абсолютная постоянная, постоянная Эйлера.

Пусть $X, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним и конечной дисперсией $\sigma^2 = \mathbf{E} X^2$.

Положим $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $F(x) = \mathbf{P}(X < x)$. Б. Розен [1] доказал, что ряд Спицера

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \left(\mathbf{P}(S_n > 0) - \frac{1}{2} \right)$$

абсолютно сходится.

Мы получим этот результат другим методом, используя единственно оценку Берри–Эссеена в центральной предельной теореме. Попутно мы оценим сверху сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \left| \mathbf{P}(S_n < 0) - \frac{1}{2} \right|.$$

Пусть $n_1 = \min[n: \mathbf{E}\{X^2; |X| < \sigma\sqrt{n}\} > \frac{3}{4}\sigma^2]$, $n_0 = \max[8, n_1]$.

Теорема. *Справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \left| \mathbf{P}(S_n < 0) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \ln n_0 + 11c_0 + 3.45, \quad (1)$$

где c_0 — абсолютная постоянная в оценке Берри–Эссеена.

Как показывает пример в конце настоящей заметки, от $\ln n_0$ в правой части неравенства (1) избавиться нельзя.

Если воспользоваться оценкой $c_0 < 0.7051$ из [2], то мы приходим к неравенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \left| \mathbf{P}(S_n < 0) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \ln n_0 + 12.$$

Доказательство. Положим

$$X_j(y) = \begin{cases} X_j, & |X_j| \leq y, \\ 0, & |X_j| > y. \end{cases}$$

* Институт математики им. С. Л. Соболева, пр. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: nagaev@math.nsc.ru, nagaevs@hotmail.com, nagaevs@academ.org

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-01-00069).

Аналогично определяется $X(y)$. Пусть $S_n(y) = \sum_{k=1}^n X_k(y)$. Обозначим

$$a(y) = \int_{|x|>y} x dF(x), \quad b^2(y) = \mathbf{E} X^2(y), \quad \sigma^2(y) = b^2(y) - a^2(y),$$

$$B_n^2(y) = n\sigma^2(y), \quad \beta_3(y) = \mathbf{E} |X(y)|^3, \quad \gamma_3(y) = \mathbf{E} |X(y) + a(y)|^3.$$

Согласно оценке Берри–Эссеена,

$$\left| \mathbf{P}(S_n(y) < 0) - \Phi\left(\frac{na(y)}{B_n(y)}\right) \right| < c_0 \frac{\gamma_3(y)}{\sigma^3(y)} n^{-1/2},$$

где Φ — стандартный нормальный закон, c_0 — абсолютная постоянная.

Поскольку $|\mathbf{P}(S_n(y) < 0) - \mathbf{P}(S_n < 0)| < n\mathbf{P}(|X| > y)$ и

$$\left| \Phi\left(\frac{na(y)}{B_n(y)}\right) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{n|a(y)|}{B_n(y)},$$

имеем

$$\left| \mathbf{P}(S_n < 0) - \frac{1}{2} \right| < c_0 \frac{\gamma_3(y)}{\sigma^3(y)} n^{-1/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{n|a(y)|}{B_n(y)} + n\mathbf{P}(|X| > y). \quad (2)$$

Заметим, что при $y > \sigma\sqrt{n_1}$ выполнено неравенство $|a(y)| < \sigma^2/(4y)$ и, следовательно $\sigma^2(y) > \sigma^2/2$. Не нарушая общности, мы можем считать, что $\sigma^2 = 1$.

Полагая в (2) $y = \sqrt{n}$ и производя суммирование, получаем оценку

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} n^{-1} \left| \mathbf{P}(S_n < 0) - \frac{1}{2} \right| < 2\sqrt{2}c_0 \sum_{n=n_0+1}^{\infty} n^{-3/2} \gamma_3(\sqrt{n})$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \mathbf{P}(|X| > \sqrt{n}). \quad (3)$$

Лемма. Если $\sigma^2 = 1$, то для любых $y \geq 2$

$$\gamma_3(y) \leq \beta_3(y) + \frac{19}{8}. \quad (4)$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\gamma_3(y) \leq \beta_3(y) + 3\sigma^2(y)|a(y)| + 3|a(y)|^2 \mathbf{E} |X(y)| + |a(y)|^3. \quad (5)$$

Далее $|a(y)| < \frac{1}{2}$, $\mathbf{E} |X(y)| < 1$. Подставляя эти оценки в правую часть (5), мы получаем желаемый результат.

Продолжим доказательство теоремы.

Вследствие (4)

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} n^{-3/2} \gamma_3(\sqrt{n}) < \sum_{n=n_0+1}^{\infty} n^{-3/2} \beta_3(\sqrt{n}) + \frac{19}{8} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} n^{-3/2}. \quad (6)$$

Заметим, что при $k \geq n_0$

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} n^{-3/2} < 2k^{-1/2}. \quad (7)$$

Используя это неравенство, получаем

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} n^{-3/2} \beta_3(\sqrt{n}) = \sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} n^{-3/2} \int_{\sqrt{k} < |x| \leq \sqrt{k+1}} |x|^3 dF(x) + \beta_3(\sqrt{n_0}) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} n^{-3/2}$$

$$< 2 \left(\sum_{k=n_0}^{\infty} k^{-1/2} \sqrt{k+1} \int_{\sqrt{k} < |x| \leq \sqrt{k+1}} x^2 dF(x) + \int_{|x| \leq \sqrt{n_0}} x^2 dF(x) \right)$$

$$< 3/\sqrt{2} < 2.13.$$

Из (6), (7) и последнего неравенства следует

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} n^{-3/2} \gamma_3(\sqrt{n}) < 3.81. \quad (8)$$

Оценим теперь $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a(\sqrt{n})|/\sqrt{n}$. Очевидно, что $|a(y)| \leq v(y)$, где $v(y) = \int_{|x|>y} |x| dF(x)$. Поскольку $n^{-1/2} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{|a(\sqrt{n})|}{\sqrt{n}} &\leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{v(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} < 2 \sum_{n=n_0+1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) v(\sqrt{n}) \\ &< 2 \int_{y>n_0} v(y) dy = 2 \left(\int_{|x|>n_0} x^2 dF(x) - v(n_0)n_0 \right) < 2. \end{aligned} \quad (9)$$

Наконец,

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \mathbf{P}(|X| > \sqrt{n}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} < 2. \quad (10)$$

Комбинируя оценки (3) и (8)–(10), находим, что

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} n^{-1} \left| \mathbf{P}(S_n < 0) - \frac{1}{2} \right| < 11c_0 + 2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right) < 11c_0 + 3.13. \quad (11)$$

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=1}^{n_0} n^{-1} \left| \mathbf{P}(S_n < 0) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \left(\ln n_0 + \mathbf{C} + \frac{1}{2n_0} \right), \quad (12)$$

где $\mathbf{C}$ — постоянная Эйлера (см. [3, формула 0.131]).

Из (11) и (12) следует утверждение теоремы.

П р и м е р. Пусть $0 < p < \frac{1}{2}$. Положим

$$\mathbf{P}(X = p^{-1}) = p, \quad \mathbf{P}(X = (p-1)^{-1}) = 1-p.$$

Тогда $\mathbf{P}(S_n < 0) \geq (1-p)^n$. Поскольку $\ln(1-p) > p/(p-1)$, то $(1-p)^n > e^{-2np}$. Следовательно, $\mathbf{P}(S_n < 0) > e^{-2np}$. Отсюда

$$\sum_{n=1}^{[1/(4p)]} n^{-1} \left| \mathbf{P}(S_n < 0) - \frac{1}{2} \right| > \left(e^{-1/2} - \frac{1}{2} \right) \sum_{n=1}^{[1/(4p)]} n^{-1} > 0.1 \ln \left[\frac{1}{4p} \right].$$

Очевидно, что при $p < \frac{1}{8}$

$$\ln \left[\frac{1}{4p} \right] > \ln \frac{1}{4p} + \ln(1-4p) > \ln \frac{1}{4p} - \ln 2 = \ln \frac{1}{p} - 3 \ln 2.$$

Если $p < 1/8$, то $n_0 < p^{-2} + 1$. Отсюда $\ln n_0 < 2 \ln(1/p) + 1/64$, т.е.

$$\ln \left[\frac{1}{4p} \right] > \frac{1}{2} \ln n_0 - 3 \ln 2 - \frac{1}{128}.$$

Таким образом, при достаточно малых p

$$\sum_{n=1}^{[1/(4p)]} n^{-1} \left| \mathbf{P}(S_n > 0) - \frac{1}{2} \right| > 0.03 \ln n_0.$$

З а м е ч а н и е. На самом деле, как это нетрудно усмотреть из доказательства, справедливо более общее, нежели (1), неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |\mathbf{P}(S_n < x\sigma\sqrt{n}) - \Phi(x)| < \frac{1}{2} \ln n_0 + 11c_0 + 3.45.$$

Таким образом, функция распределения суммы независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией не может сходиться к нормальному закону сколь угодно медленно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rosén B.* On the asymptotic distribution of sums of independent identically distributed random variables. — Ark. Mat., 1962, v. 4, № 4, p. 323–332.
2. *Шевцова И. Г.* Уточнение верхней оценки абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, в. 3, с. 622–626.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963, 1108 с.

Поступила в редакцию
19.IX.2008