Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ю. Осмоловский, Об оценке точности аппроксимации для асимптотических разложений в многомерном случае, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 1, 154–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2551>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 11:33:57

© 2009 г.

ОСМОЛОВСКИЙ И. Ю.*

**ОБ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ
АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ
В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ**

Получена явная оценка остаточной части для одного асимптотического разложения в центральной предельной теореме для случайных величин, принимающих значения в многомерных пространствах.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, асимптотические разложения, точность аппроксимации.

В [2] было получено асимптотическое разложение для плотностей распределений нормированных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения в многомерном евклидовом пространстве, при условии, что момент нормы порядка $m+2$, где $m \geq 2$ — натуральные, конечен. Оценка остаточной части этого разложения содержит слагаемые $O(n^{-(m+1)/2})$, $n \rightarrow \infty$. Цель настоящей работы — получить явную оценку остаточной части разложения.

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные величины с нулевым средним и единичным ковариационным оператором, принимающие значения в d -мерном евклидовом пространстве E^d , и P — распределение X_1 . Пусть для характеристической функции $f(t)$ распределения P выполнено условие

$$\int_{E^d} |f(t)|^\nu dt < \infty \quad (1)$$

при некотором $\nu > 0$, и пусть для некоторой пары (μ, T) , где $e^{-|t|^2/2} \leq \mu(t) \leq 1$ и $T > 0$, при всех $|t| \leq T$ выполняется неравенство $|f(t)| \leq \mu(t)$.

Нам понадобятся величины

$$B_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{E^d} |t|^k e^{-|t|^2/2} dt, \quad B_{k,n} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|t| \leq T\sqrt{n}} |t|^k \mu^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) dt.$$

Величина B_k асимптотически (при $d \rightarrow \infty$) равна $\frac{1}{2} \pi^{-d/2} d^{k/2}$. Для распределения с конечным четвертым моментом пару (μ, T) можно подобрать так, чтобы $B_{k,n} \rightarrow B_k$ при $n \rightarrow \infty$ для любого фиксированного $k > 0$.

Обозначим P_n распределение нормированной суммы $(X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$. При выполнении условия (1) для всех $n \geq \nu$ существует плотность $p_n(x)$, $x \in E^d$, распределения P_n .

Пусть $\Phi(x)$ — нормальный закон с нулевым средним и единичным ковариационным оператором в E^d , а $\varphi(x)$ — его плотность. Для $e \in E^d$, $|e| = 1$, и натуральных k обозначим

$$\beta_k(e) = \beta_k(e, P) := \int_{E^d} |(e, u)|^k P(du), \quad \beta_k = \sup_{|e|=1} \beta_k(e).$$

Здесь $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное произведение, а $|\cdot|$ — норму вектора в E^d . Введем также обозначение

$$\bar{\beta}_k = \int_{E^d} |(e, u)|^k \Phi(du).$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы 1, 119992 Москва, Россия; e-mail: igosm@mail.ru

Последний интеграл не зависит от направления вектора $e \in E^d$, $|e| = 1$, величина $\bar{\beta}_k$ совпадает с k -м моментом одномерного стандартного нормального закона. Положим

$$\Delta_k(e) = \int_{E^d} (e, u)^k (P - \Phi)(du), \quad \delta_k = \sup_{|e|=1} |\Delta_k(e)|,$$

$$D_3 = \sum_{s=3}^{m+1} \frac{\delta_s}{s!}, \quad D_{3,T} = \sum_{s=3}^{m+1} \frac{\delta_s}{s!} T^{s-3}.$$

Лемма. В указанных выше обозначениях и предположениях, если величина β_{m+2} конечна, то при $n \geq \max(\nu, 2m)$ существует плотность $p_n(x)$ и для любого $x \in E^d$ справедливо равенство

$$p_n(x) - \varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \times \int_{|t| \leq T\sqrt{n}} e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} \sum_{k=1}^m C_n^k e^{k|t|^2/(2n)} \left(\sum_{s=3}^{m+1} \frac{i^s \Delta_s(e_t)}{s!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^s \right)^k dt + R, \quad (2)$$

где $e_t = t/|t|$ и

$$\begin{aligned} \|R\| &\leq \frac{\beta_{m+2} + \bar{\beta}_{m+2}}{(m+2)!} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{D_{3,T}^{k-1}}{n^{(m+k-1)/2}} \frac{B_{3(k-1)+m+2, n-k}}{k!} + \frac{D_{3,T}^{m+1}}{n^{(m+1)/2}} \frac{B_{3(m+1), n-(m+1)}}{(m+1)!} \\ &+ \frac{n^{d/2}}{(2\pi)^d} \alpha^{n-\nu}(T) \int_{|t| \geq T} |f(t)|^\nu dt + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|t| \geq T\sqrt{n}} e^{-|t|^2/2} dt, \\ \alpha(T) &= \max\{f(t): |t| \geq T\} < 1. \end{aligned}$$

Доказательство этой леммы фактически повторяет доказательство соответствующей леммы из [2] и доказательство теорем из [3, §14], поэтому мы его опускаем.

Из утверждения леммы следует, что с точностью до величины R , указанной в ее формулировке, разность $p_n(x) - \varphi(x)$ есть

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^m \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|t| \leq T\sqrt{n}} e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} C_n^k e^{k|t|^2/(2n)} \left(\sum_{s=3}^{m+1} \frac{i^s \Delta_s(e_t)}{s!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^s \right)^k dt \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{k_3, \dots, k_{m+1}} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|t| \leq T\sqrt{n}} e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} C_n^k e^{k|t|^2/(2n)} \frac{k!}{k_3! \dots k_{m+1}!} \\ &\quad \times \left(\frac{i^3 \Delta_3(e_t)}{3!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^3 \right)^{k_3} \dots \left(\frac{i^{m+1} \Delta_{m+1}(e_t)}{(m+1)!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{m+1} \right)^{k_{m+1}} dt, \end{aligned} \quad (3)$$

где внутреннее суммирование ведется по всем наборам неотрицательных целых чисел $k_3, \dots, k_{m+1}$ таким, что $k_3 + \dots + k_{m+1} = k$. Зависимость наборов $k_3, \dots, k_{m+1}$ от k мы не указываем, это не должно вызывать недоразумений. Для данного k число этих наборов $k_3, \dots, k_{m+1}$ равно C_{k+m-2}^{m-2} .

Правую часть (3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^m \sum_{k_3, \dots, k_{m+1}} \frac{i^l}{(2\pi)^d} \int_{|t| \leq T\sqrt{n}} e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} e^{k|t|^2/(2n)} \frac{n!}{(n-k)! k_3! \dots k_{m+1}!} \\ &\quad \times \left(\frac{\Delta_3(e_t)}{3!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^3 \right)^{k_3} \dots \left(\frac{\Delta_{m+1}(e_t)}{(m+1)!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{m+1} \right)^{k_{m+1}} dt, \end{aligned} \quad (4)$$

где $l = 3k_3 + \dots + (m+1)k_{m+1}$.

Слагаемые в (4), которые соответствуют наборам $k_3, \dots, k_{m+1}$ таким, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{n!}{(n-k)! n^{l/2}} = O\left(\frac{1}{n^{(m+1)/2}}\right),$$

мы включим в остаточную часть разложения p_n . Эти слагаемые при росте n убывают как $1/n^{(m+1)/2}$ или быстрее.

Таким образом, главная часть разложения p_n будет формироваться только суммой (назовем ее основной) по $k = 1, \dots, m$ и по таким наборам $k_3, \dots, k_{m+1}$, для которых $k_3 + \dots + k_{m+1} = k$ и $l/2 - k \leq m/2$, последнее условие равносильно неравенству

$$3k_3 + \dots + (m+1)k_{m+1} \leq m + 2k. \quad (5)$$

Отметим, что в основную сумму войдут все слагаемые из (4), связанные с $k = 1$, и войдет лишь одно слагаемое, связанное с $k = m$ (оно соответствует набору $k_3, \dots, k_{m+1}$, для которого $k_3 = m, k_4 = \dots = k_{m+1} = 0, m \geq 3$).

Обозначим через $R^{(m/2)}$ сумму слагаемых из (4) по наборам $k_3, \dots, k_{m+1}$, для которых не выполнено условие (5); для таких наборов

$$k_3 + \dots + k_{m+1} = k, \quad 3k_3 + \dots + (m+1)k_{m+1} \geq m + 2k + 1, \quad (6)$$

и

$$R^{(m/2)} = \sum_{k=2}^m \sum' \frac{i^l}{(2\pi)^d} \int_{|t| \leq T\sqrt{n}} e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} e^{k|t|^2/(2n)} \frac{n!}{(n-k)! k_3! \dots k_{m+1}!} \times \left(\frac{\Delta_3(e_t)}{3!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^3 \right)^{k_3} \dots \left(\frac{\Delta_{m+1}(e_t)}{(m+1)!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{m+1} \right)^{k_{m+1}} dt,$$

где сумма $\sum'$ берется по наборам $k_3, \dots, k_{m+1}$, удовлетворяющим условиям (6). Здесь суммирование начинается с $k = 2$ по причине, указанной выше. Справедлива цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |R^{(m/2)}| &\leq \sum_{k=2}^m C_n^k \sum' \frac{k!}{k_3! \dots k_{m+1}!} \frac{1}{(2\pi)^d} \\ &\times \int_{|t| \leq T\sqrt{n}} e^{-|t|^2/2} e^{k|t|^2/(2n)} \left(\frac{\delta_3}{3!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^3 \right)^{k_3} \dots \left(\frac{\delta_{m+1}}{(m+1)!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{m+1} \right)^{k_{m+1}} dt \\ &= \sum_{k=2}^m C_n^k \sum' \frac{k!}{k_3! \dots k_{m+1}!} \frac{1}{(2\pi)^d} \\ &\times \int_{|t| \leq T\sqrt{n}} e^{-|t|^2/2} e^{k|t|^2/(2n)} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{m+2k+1} \left(\frac{\delta_3}{3!} \right)^{k_3} \dots \left(\frac{\delta_{m+1}}{(m+1)!} \right)^{k_{m+1}} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^\eta dt, \end{aligned}$$

где $\eta = \eta(k_1, \dots, k_{m+1}) \geq 0$. Так как $|t/\sqrt{n}| \leq T < 1$, то правая часть последнего равенства не превосходит

$$\begin{aligned} &\sum_{k=2}^m C_n^k \sum' \frac{k!}{k_3! \dots k_{m+1}!} \frac{1}{(2\pi)^d} \\ &\times \int_{|t| \leq T\sqrt{n}} e^{-|t|^2/2} e^{k|t|^2/(2n)} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{m+2k+1} \left(\frac{\delta_3}{3!} \right)^{k_3} \dots \left(\frac{\delta_{m+1}}{(m+1)!} \right)^{k_{m+1}} dt \\ &\leq \sum_{k=2}^m \frac{n^k}{k! n^{(m+1)/2+k}} \left(\sum_{s=3}^{m+1} \frac{\delta_s}{s!} \right)^k \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{E^d} e^{-(1-k/n)|t|^2/2} |t|^{m+2k+1} dt. \quad (7) \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных $t'_q = t_q \sqrt{1 - k/n}$, $q = 1, \dots, d$. Тогда выражение (7) не превосходит

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n^{(m+1)/2}} \sum_{k=2}^m \frac{D_3^k}{k!} \left(\frac{n}{n-k} \right)^{(m+2k+1+d)/2} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{E^d} e^{-|t|^2/2} |t|^{m+2k+1} dt \\ &= \frac{1}{n^{(m+1)/2}} \sum_{k=2}^m \frac{D_3^k}{k!} \left(\frac{n}{n-k} \right)^{(m+2k+1+d)/2} B_{m+2k+1}. \end{aligned}$$

Далее, для каждого набора $k_3, \dots, k_{m+1}$, $k_3 + \dots + k_{m+1} = k$, для которого выполняется условие (5), представим $e^{k|t|^2/(2n)}$ в виде

$$\sum_{j=0}^J \frac{(-1)^j}{j! 2^j} \left(\frac{k}{n}\right)^j (i|t|)^{2j} + r^{(J)},$$

где $J = J(k_3, \dots, k_{m+1})$ — максимальное целое число, для которого $l/2 + J \leq m/2 + k$. Нетрудно проверить, что

$$J = \left\lfloor \frac{m}{2} + k - \frac{l}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m}{2} + k - \frac{3k_3 + \dots + (m+1)k_{m+1}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m}{2} - \frac{k_3 + \dots + (m-1)k_{m+1}}{2} \right\rfloor, \quad (8)$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ означает целую часть, и

$$|r^{(J)}| \leq \frac{1}{(J+1)! 2^{J+1}} \left(\frac{k}{n}\right)^{J+1} |t|^{2(J+1)} e^{k|t|^2/(2n)}.$$

Отметим также, что

$$\frac{l}{2} + J = \frac{l}{2} + \left\lfloor \frac{m}{2} + k - \frac{l}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{m}{2} + k, & m-l \text{ чётно,} \\ \frac{m}{2} + k - \frac{1}{2}, & m-l \text{ нечётно,} \end{cases}$$

откуда следует, что

$$\frac{l}{2} + J + 1 \geq \frac{m}{2} + k + \frac{1}{2} \quad (9)$$

и

$$0 \leq J \leq \frac{m-k}{2}. \quad (10)$$

Обозначим через $R^{(J)}$ сумму

$$R^{(J)} = \sum_{k=1}^m \sum'' \frac{i^l}{(2\pi)^d} \int_{|t| \leq T\sqrt{n}} e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} r^{(J)} \frac{n!}{(n-k)! k_3! \dots k_{m+1}!} \times \left(\frac{\Delta_3(e_t)}{3!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^3 \right)^{k_3} \dots \left(\frac{\Delta_{m+1}(e_t)}{(m+1)!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{m+1} \right)^{k_{m+1}} dt,$$

где сумма $\sum''$ берется по наборам $k_3, \dots, k_{m+1}$, для которых выполнено условие (5), и каждое слагаемое убывает не медленнее, чем $1/n^{(m+1)/2}$.

Справедлива цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |R^{(J)}| &\leq \sum_{k=1}^m \sum'' \frac{n!}{(n-k)! k_3! \dots k_{m+1}!} \frac{1}{(2\pi)^d} \\ &\quad \times \int_{|t| \leq T\sqrt{n}} |r^{(J)}| e^{-|t|^2/2} \left(\frac{|\Delta_3(e_t)|}{3!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^3 \right)^{k_3} \dots \left(\frac{|\Delta_{m+1}(e_t)|}{(m+1)!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{m+1} \right)^{k_{m+1}} dt \\ &\leq \sum_{k=1}^m C_n^k \sum'' \frac{k!}{k_3! \dots k_{m+1}!} \frac{1}{(J+1)! 2^{J+1}} \left(\frac{k}{n}\right)^{J+1} \left(\frac{\delta_3}{3!}\right)^{k_3} \dots \left(\frac{\delta_{m+1}}{(m+1)!}\right)^{k_{m+1}} \\ &\quad \times \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|t| \leq T\sqrt{n}} e^{k|t|^2/(2n)} e^{-|t|^2/2} |t|^{2(J+1)} \frac{|t|^{3k_3 + \dots + (m+1)k_{m+1}}}{n^{(3k_3 + \dots + (m+1)k_{m+1})/2}} dt \\ &\leq \sum_{k=1}^m C_n^k \sum'' \frac{k!}{k_3! \dots k_{m+1}!} \left(\frac{\delta_3}{3!}\right)^{k_3} \dots \left(\frac{\delta_{m+1}}{(m+1)!}\right)^{k_{m+1}} \frac{k^{J+1}}{(J+1)! 2^{J+1}} \frac{1}{n^{J+1+l/2}} \\ &\quad \times \left(\frac{n}{n-k}\right)^{J+1+(3k_3 + \dots + (m+1)k_{m+1})/2+d/2} \\ &\quad \times \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{E^d} e^{-|t|^2/2} |t|^{2(J+1)} |t|^{3k_3 + \dots + (m+1)k_{m+1}} dt. \end{aligned}$$

Так как для моментов нормального распределения $B_q \leq B_p$ при $q \leq p$, то ввиду (10) последнее выражение не превосходит

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m C_n^k \sum'' \frac{k!}{k_3! \dots k_{m+1}!} \left(\frac{\delta_3}{3!} \right)^{k_3} \dots \left(\frac{\delta_{m+1}}{(m+1)!} \right)^{k_{m+1}} \frac{k^{J+1}}{(J+1)! 2^{J+1}} \frac{1}{n^{J+1+l/2}} \\ & \quad \times \left(\frac{n}{n-k} \right)^{(m-k)/2+1+(m+2k)/2+d/2} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{E^d} e^{-|t|^2/2} |t|^{m+2k+m-k} dt \\ & \leq \sum_{k=1}^m \frac{n^k D_3^k}{k!} \frac{k^{J+1}}{(J+1)! 2^{J+1}} \frac{1}{n^{J+1+l/2}} \left(\frac{n}{n-k} \right)^{m+1+(k+d)/2} \frac{1}{(2\pi)^d} \\ & \quad \times \int_{E^d} e^{-|t|^2/2} |t|^{2m+k} dt. \end{aligned}$$

В силу (9) правая часть последнего неравенства не превосходит

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m \frac{D_3^k}{k!} \frac{k^{(m-k)/2+1}}{2} \frac{n^k}{n^{(m+1)/2+k}} \left(\frac{n}{n-k} \right)^{m+1+(k+d)/2} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{E^d} e^{-|t|^2/2} |t|^{2m+k} dt \\ & = \frac{1}{n^{(m+1)/2}} \sum_{k=1}^m \frac{D_3^k}{k!} \frac{k^{(m-k)/2+1}}{2} \left(\frac{n}{n-k} \right)^{m+1+(k+d)/2} B_{2m+k}. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо представление

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \varphi(x) + \sum_{k=1}^m \sum''' \frac{n!}{(n-k)! k_3! \dots k_{m+1}!} \sum_{j=0}^J \frac{(-1)^j}{j! 2^j} \left(\frac{k}{n} \right)^j \frac{i^{l+2j}}{(2\pi)^d} \\ & \quad \times \int_{|t| \leq T\sqrt{n}} e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} |t|^{2j} \prod_{\ell=3}^{m+1} \left(\frac{i^\ell \Delta_\ell(e_t)}{\ell!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^\ell \right)^{k_\ell} dt \\ & \quad + R + R^{(m/2)} + R^{(J)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где сумма $\sum'''$ берется по наборам $k_3, \dots, k_{m+1}$, $k_3 + \dots + k_{m+1} = k$, для которых выполнено условие (5), число J определено в (8), оценка величины R приведена в формулировке леммы, оценки величин $R^{(m/2)}$ и $R^{(J)}$ даны выше.

В каждом из слагаемых в (11) заменим область интегрирования на E^d и оценим возникающую при этом погрешность $R^{(T)}$:

$$\begin{aligned} |R^{(T)}| &\leq \sum_{k=1}^m \sum''' \frac{n!}{(n-k)! k_3! \dots k_{m+1}!} \sum_{j=0}^J \frac{1}{j! 2^j} \left(\frac{k}{n} \right)^j \frac{1}{(2\pi)^d} \\ & \quad \times \int_{|t| \geq T\sqrt{n}} e^{-|t|^2/2} |t|^{2j} \prod_{\ell=3}^{m+1} \left(\frac{i^\ell \Delta_\ell(e_t)}{\ell!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^\ell \right)^{k_\ell} dt \\ &\leq \sum_{k=1}^m \frac{n^k}{k!} \sum_{j=0}^J \frac{1}{j! 2^j} \left(\frac{k}{n} \right)^j \frac{D_k}{(2\pi)^d} \int_{|t| \geq T\sqrt{n}} e^{-|t|^2/2} |t|^{2j+2m+k} dt \\ &\leq \sum_{k=1}^m \frac{n^k}{k!} \left(\frac{m-k}{2} + 1 \right) \frac{D_k}{(2\pi)^d} \int_{|t| \geq T\sqrt{n}} e^{-|t|^2/2} |t|^{3m} dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что каждое из слагаемых в (12) при росте n убывает экспоненциально быстро. Итак, плотность можно представить как

$$p_n(x) = \varphi(x) + \sum_{k=1}^m \sum''' \frac{n!}{(n-k)! k_3! \dots k_{m+1}!} \sum_{j=0}^J \frac{(-1)^j}{j! 2^j} \left(\frac{k}{n} \right)^j \frac{i^{l+2j}}{(2\pi)^d}$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{E^d} e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} |t|^{2j} \prod_{\ell=3}^{m+1} \left(\frac{i^\ell \Delta_\ell(e_t)}{\ell!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^\ell \right)^{k_\ell} dt \\ & + R + R^{(m/2)} + R^{(J)} + R^{(T)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Сумма по $k = 1, \dots, m$ в правой части (13), дающая, вместе с функцией $\varphi(x)$, главную часть разложения, рассматривалась в [2]. Здесь мы получим в явном виде оценку остаточной части разложения.

Из результатов работы [2] и из сказанного выше следует справедливость следующего утверждения.

Теорема. В введенных обозначениях и предположениях, если абсолютный момент β_{m+2} конечен, то при всех $n \geq \max(\nu, 2m)$ у распределения P_n нормированной суммы существует плотность $p_n(x)$ и для всех $x \in E^d$

$$\begin{aligned} p_n(x) = & \varphi(x) + \sum_{k=1}^m \sum_{k_3, \dots, k_{m+1}} \frac{n!}{(n-k)! k_3! \dots k_{m+1}!} \frac{1}{(3!)^{k_3} \dots ((m+1)!)^{k_{m+1}}} \\ & \times \frac{\varphi(x)}{n^{(3k_3 + \dots + (m+1)k_{m+1})/2}} \sum_{j=0}^J \frac{(-1)^j}{j! 2^j} \left(\frac{k}{n} \right)^j \int_{E^d} \dots \int_{E^d} H_l^{(2j)} \left(u_1^{(3)}, u_1^{(3)}, u_1^{(3)}, \dots, u_{k_3}^{(3)}, \right. \\ & \left. u_{k_3}^{(3)}, u_{k_3}^{(3)}, \dots, \underbrace{u_1^{(m+1)}, \dots, u_1^{(m+1)}}_{m+1}, \dots, \underbrace{u_{k_{m+1}}^{(m+1)}, \dots, u_{k_{m+1}}^{(m+1)}}_{m+1} \right) \\ & \times Q(du_1^{(3)}) \dots Q(du_{k_3}^{(3)}) \dots Q(du_1^{(m+1)}) \dots Q(du_{k_{m+1}}^{(m+1)}) + R, \end{aligned}$$

где $Q = P - \Phi$, многомерные аналоги многочленов Чебышёва–Эрмита $H_1^{(2j)}(h_1, \dots, h_1)$ введены в работе [2] и сумма $\sum_{k_3, \dots, k_{m+1}}$ берется по всем наборам $k_3, \dots, k_{m+1}$ таким, что $k_3 + \dots + k_{m+1} = k$, $3k_3 + \dots + (m+1)k_{m+1} \leq m + 2k$, $J = [m/2 - (k_3 + \dots + (m-1)k_{m+1})/2]$, и

$$\begin{aligned} |R| \leq & \frac{\beta_{m+2} + \bar{\beta}_{m+2}}{(m+2)!} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{D_{3,T}^{k-1}}{n^{(m+k-1)/2}} \frac{B_{3(k-1)+m+2, n-k}}{k!} + \frac{D_{3,T}^{m+1}}{n^{(m+1)/2}} \frac{B_{3(m+1), n-(m+1)}}{(m+1)!} \\ & + \frac{1}{n^{(m+1)/2}} \sum_{k=2}^m \frac{D_3^k}{k!} \left(\frac{n}{n-k} \right)^{(m+2k+1+d)/2} B_{m+2k+1} \\ & + \frac{1}{n^{(m+1)/2}} \sum_{k=1}^m \frac{D_3^k}{k!} \frac{k^{(m-k)/2+1}}{2} \left(\frac{n}{n-k} \right)^{m+1+(k+d)/2} B_{2m+k} \\ & + \frac{n^{d/2}}{(2\pi)^d} \alpha^{n-\nu}(T) \int_{|t| \geq T} |f(t)|^\nu dt + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{|t| \geq T\sqrt{n}} e^{-|t|^2/2} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \frac{n^k}{k!} \left(\frac{m-k}{2} + 1 \right) \frac{D_k}{(2\pi)^d} \int_{|t| \geq T\sqrt{n}} e^{-|t|^2/2} |t|^{3m} dt. \end{aligned}$$

Отметим, что слагаемые в остаточной части разложения, убывающие степенным образом, связаны только с моментами одномерных распределений, которые являются проекциями распределения P на всевозможные многомерные векторы $e \in E^d$, $|e| = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Осмоловский И. Ю. О некоторых свойствах многомерных аналогов многочленов Чебышёва–Эрмита. — Теория вероятн. и ее примен., 2008, т. 53, в. 2, с. 373–378.
2. Сенатов В. В. О многомерных аналогах многочленов Чебышёва–Эрмита. — Теория вероятн. и ее примен., в печати.

3. *Сенатов В.В.* Центральная предельная теорема: точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Книжный Дом Либроком, 2009, 352 с.

Поступила в редакцию
17.IX.2008