Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Радченко, Выборочные функции случайных мер и пространства Бесова,
Теория вероятн. и ее примен., 2009, том 54, выпуск 1, 161–169

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2552>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 04:37:53

© 2009 г.

РАДЧЕНКО В. Н.*

ВЫБОРОЧНЫЕ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ МЕР И
ПРОСТРАНСТВА БЕСОВА

Рассматриваются случайные меры — сигма-аддитивные по вероятности функции множеств, заданные на борелевской сигма-алгебре в $[0, 1]^d$. Показано, что при некоторых достаточно общих предположениях реализации непрерывных случайных функций, порожденных случайными мерами, принадлежат пространствам Бесова.

Ключевые слова и фразы: случайная мера, пространства Бесова, траектории случайных функций.

1. Введение. Банаховы функциональные пространства Бесова B_{pq}^α были введены в [1], они обобщали пространства Соболева, Слободецкого и нашли многочисленные применения в математической физике, теории функций, функциональном анализе. Связь с другими функциональными пространствами, теоремы вложения, эквивалентные способы записи нормы и другие свойства пространств Бесова рассмотрены в [2]–[4]. Роль этих пространств в теории интерполяции линейных операторов освещена в [5].

Первые утверждения о принадлежности траекторий случайных процессов пространствам Бесова на отрезке были доказаны для броуновского движения и интеграла Ито [6]. В [7] получены достаточные условия для гауссовских процессов и, в частности, показана принадлежность соответствующим пространствам траекторий дробного броуновского движения B^H , интегралов по B^H . Аналогичные результаты имеются для процессов Леви [8], процессов Феллера [9], локального времени диффузионного процесса [10].

Был получен ряд результатов о принадлежности пространствам Бесова траекторий интеграла Скорохода: интеграла по винеровскому процессу [11], по B^H при $H > \frac{1}{2}$ [12], по B^H при $H < \frac{1}{2}$ [13]. В [14] показано, что принадлежность траекторий соответствующим пространствам Бесова позволяет определять интеграл по случайному процессу.

В данной работе устанавливается, что в соответствующих пространствах Бесова на брусках лежат реализации непрерывных случайных функций, приращения которых — это значения некоторой случайной меры (для процессов на $[0, 1]$ — произвольной, на $[0, 1]^d$ — удовлетворяющей некоторому дополнительному условию). Таким образом мы существенно дополняем результаты [15], доказываем указанную регулярность траекторий широкого класса процессов. При этом мы опираемся на полученные в [16] условия принадлежности пространствам Бесова, выраженные в терминах сходимости рядов из приращений функции.

В п. 2. приводятся основные понятия и некоторые предварительные сведения, в п. 3. доказаны необходимые нам вспомогательные леммы о сходимости рядов с интегралами по случайным мерам, в п. 4. установлена указанная регулярность выборочных функций для размерности $d = 1$, в п. 5. — для произвольного $d \geq 1$.

* Киевский национальный университет им. Т. Шевченко, кафедра математического анализа, 01033, Киев, Украина; e-mail: vradchenko@univ.kiev.ua

2. Предварительные сведения. Пусть $\mathbf{X}$ — произвольное множество, $\mathcal{B}$ — σ -алгебра подмножеств $\mathbf{X}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство. Через $L_0 = L_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ обозначим множество всех случайных величин (точнее говоря, их классов $\mathbf{P}$ -эквивалентности). Сходимость в L_0 означает сходимость по вероятности.

О п р е д е л е н и е 2.1. *Случайной мерой* называется σ -аддитивное отображение $\mu: \mathcal{B} \rightarrow L_0$.

Отметим, что мы не накладываем на μ требований неотрицательности или существования моментов. Всюду далее μ будет обозначать случайную меру (или порожденную ее значениями случайную функцию).

Приведем некоторые примеры. Если $X(t)$, $0 \leq t \leq T$, является квадратично интегрируемым мартингалом, то $\mu(A) = \int_0^T I_A(t) dX(t)$ будет случайной мерой на борелевских подмножествах $\mathbf{R}$. Аналогичным образом определяет случайную меру дробное броуновское движение $B^H(t)$ при значении параметра Харста $H > \frac{1}{2}$ (это следует из неравенства (1.5) работы [17]). Другие примеры, а также условия того, что приращения случайного процесса с независимыми приращениями порождают случайную меру, можно найти в [18, гл. 7, 8].

В [19] рассмотрены случайные меры на произвольных σ -алгебрах, построен и изучен интеграл вида $\int_A f d\mu$, где f — измеримая действительная функция, $A \in \mathcal{B}$. Его построение проводится стандартно с использованием приближения простыми функциями. (Аналогичное построение проведено в [18, гл. 7], см. также [20].) При этом используется ограниченность по вероятности значений случайной меры [21, теорема]. В частности, любая ограниченная измеримая f будет интегрируемой по любой μ . Для этого интеграла имеет место аналог теоремы Лебега о мажорируемой сходимости (см. [19, следствие 1.2] или [18, предложение 7.1.1]).

Используя обозначения из [16], мы рассматриваем изотропные пространства Бесова $B_{pq}^\alpha([0, 1]^d)$, $1 \leq p, q < \infty$, $0 < \alpha < 1$. Для функций $f \in L^p([0, 1]^d)$ положим

$$\|f\|_{p,q}^\alpha = \|f\|_{L^p([0,1]^d)} + \left(\int_0^1 (w_p(f, t))^q t^{-\alpha q - 1} dt \right)^{1/q},$$

где $w_p(f, t) = \sup_{\|\mathbf{h}\| \leq t} (\int_{I_{\mathbf{h}}} |f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x})^{1/p}$, $I_{\mathbf{h}} = \{\mathbf{x} \in [0, 1]^d: \mathbf{x} + \mathbf{h} \in [0, 1]^d\}$. Тогда $B_{pq}^\alpha([0, 1]^d) = \{f \in L^p([0, 1]^d): \|f\|_{p,q}^\alpha < +\infty\}$, и $\|\cdot\|_{p,q}^\alpha$ будет нормой в этом пространстве.

Для $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in [0, 1]^d$ и μ , определенной на борелевских подмножествах $[0, 1]^d$, положим $\mu(\mathbf{x}) = \mu(\prod_{i=1}^d [0, x_i])$. Пусть $\mathbf{e}_i$ — это i -й единичный вектор в $\mathbf{R}^d$, также будем использовать обозначения

$$U(n, i) = \left\{ \mathbf{y} = \left(\frac{k_1}{2^n}, \frac{k_2}{2^n}, \dots, \frac{k_d}{2^n} \right) \mid k_j = 0, 1, \dots, 2^n, 1 \leq j \leq d; \mathbf{y} + 2^{-n} \mathbf{e}_i \in [0, 1]^d \right\}.$$

По следствию 3.3 [16], для того, чтобы непрерывная реализация $\mu(\mathbf{x})$ принадлежала пространству Бесова $B_{pp}^\alpha([0, 1]^d)$, достаточно, чтобы при каждом i , $1 \leq i \leq d$, для соответствующего фиксированного $\omega \in \Omega$ выполнялось неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\alpha p - d)} \sum_{\mathbf{y} \in U(n, i)} |\mu(\mathbf{y} + 2^{-n} \mathbf{e}_i) - \mu(\mathbf{y})|^p < +\infty. \quad (2.1)$$

Наша основная задача в дальнейшем — получить условия выполнения (2.1) для реализаций случайных мер.

3. Вспомогательные леммы. Сначала мы получим вспомогательные утверждения об интегралах по случайным мерам. Первое из них несколько обобщает лемму работы [15] и лемму 1 работы [22].

Лемма 3.1. Пусть измеримые функции $f_k: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}$, $k \geq 1$, таковы, что $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ конечна и интегрируема по μ . Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{\mathbf{X}} f_k d\mu \right)^2 < \infty \quad \text{н.н.} \quad (3.1)$$

Доказательство. Обозначим $\xi_k(\omega) = \int_{\mathbf{X}} f_k d\mu$. Если неравенство (3.1) неверно, то для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и любого $c > 0$ найдется $m \geq 1$ такое, что для

$$\Omega_1 = \left\{ \omega \in \Omega: \sum_{k=1}^m \xi_k^2(\omega) \geq c \right\}$$

выполнено неравенство $\mathbf{P}(\Omega_1) \geq \varepsilon_0$.

Далее мы рассмотрим независимые бернуллиевские случайные величины ε_k , $1 \leq k \leq m$, определенные на другом вероятностном пространстве $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$, $\mathbf{P}'\{\varepsilon_k = 1\} = \mathbf{P}'\{\varepsilon_k = -1\} = \frac{1}{2}$. Лемма V.4.3 (а) работы [23] нам дает, что

$$\mathbf{P}' \left\{ \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \varepsilon_k \right)^2 \geq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^m \lambda_k^2 \right\} \geq \frac{1}{8}, \quad \lambda_k \in \mathbf{R}.$$

Поэтому для каждого $\omega \in \Omega_1$ выполняется неравенство

$$\mathbf{P}' \left\{ \omega': \left(\sum_{k=1}^m \varepsilon_k(\omega') \xi_k(\omega) \right)^2 \geq \frac{c}{4} \right\} \geq \frac{1}{8}.$$

Проинтегрировав по множеству Ω_1 , получим, что

$$\mathbf{P} \times \mathbf{P}' \left\{ (\omega, \omega'): \left(\sum_{k=1}^m \varepsilon_k(\omega') \xi_k(\omega) \right)^2 \geq \frac{c}{4} \right\} \geq \frac{\varepsilon_0}{8}. \quad (3.2)$$

Поэтому найдется $\omega'_0 \in \Omega'$, для которого имеем

$$\mathbf{P} \left\{ \omega: \left(\sum_{k=1}^m \varepsilon_k(\omega'_0) \xi_k(\omega) \right)^2 \geq \frac{c}{4} \right\} \geq \frac{\varepsilon_0}{8}.$$

Зафиксируем это ω'_0 . Поскольку $\varepsilon_k(\omega'_0) = \pm 1$, то для измеримой ограниченной функции $h(x) = \sum_{k=1}^m \varepsilon_k(\omega'_0) f_k(x)$ имеем

$$|h(x)| \leq g(x), \quad \mathbf{P} \left\{ \left| \int_{\mathbf{X}} h d\mu \right| \geq \frac{\sqrt{c}}{2} \right\} \geq \frac{\varepsilon_0}{8}.$$

Напомним, что $\varepsilon_0 > 0$ фиксировано, а c выбрано произвольно. Полученное неравенство противоречит теореме 1.3 работы [19] и ограниченности по вероятности множества значений случайной меры $\int_B g d\mu$, $B \in \mathcal{B}$ (то, что это — случайная мера, следует из аналога теоремы Лебега [18, предложение 7.1.1]).

Лемма 3.2. Пусть даны $a_n \in \mathbf{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, и $A_{kn} \in \mathcal{B}$, $n \geq 0$, $1 \leq k \leq l_n$, такие, что $A_{k_1 n} \cap A_{k_2 n} = \emptyset$ для любых n и $k_1 \neq k_2$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \sum_{k=1}^{l_n} \mu^2(A_{kn}) < \infty \quad \text{н.н.} \quad (3.3)$$

Доказательство (см. также [15, лемма]). Утверждение следует из леммы 3.1 для $\{f_k(x), k \geq 1\} = \{a_n I_{A_{kn}}(x), n \geq 0, 1 \leq k \leq l_n\}$ и из интегрируемости по случайной мере любой ограниченной измеримой функции.

Лемма 3.3. Пусть для данной μ существует действительная конечная мера $\mathbf{m}$ на $(\mathbf{X}, \mathcal{B})$ такая, что для любой измеримой функции $h: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}$ из выполнения условия $\int_{\mathbf{X}} h^2 d\mathbf{m} < +\infty$ следует интегрируемость h по μ на $\mathbf{X}$.

Пусть измеримые функции $f_k: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}$, $k \geq 1$, таковы, что для указанной $\mathbf{m}$

$$\int_{\mathbf{X}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \right) d\mathbf{m} < +\infty. \quad (3.4)$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{\mathbf{X}} f_k d\mu \right)^2 < +\infty \quad \text{п.н.} \quad (3.5)$$

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 3.1, мы возьмем независимые бернуллиевские случайные величины $\varepsilon_k(\omega')$, $k \geq 1$, определенные на $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$. Рассмотрим сумму

$$\eta(x, \omega') = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(\omega') f_k(x). \quad (3.6)$$

Из (3.4), в частности, имеем, что $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(x) < +\infty$ для всех $x \in \mathbf{X}$ кроме множества нулевой меры $\mathbf{m}$. Из теоремы Колмогорова о двух рядах следует, что для каждого такого x ряд (3.6) сходится $\mathbf{P}'$ -п.н. на Ω' . Используя теорему Фубини–Тонелли, для математического ожидания по $\mathbf{P}'$ имеем

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}'} \int_{\mathbf{X}} \eta^2(x, \omega') d\mathbf{m}(x) = \int_{\mathbf{X}} \mathbf{E}_{\mathbf{P}'} \eta^2(x, \omega') d\mathbf{m}(x) = \int_{\mathbf{X}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \right) d\mathbf{m} < +\infty.$$

Отсюда $\int_{\mathbf{X}} \eta^2(x, \omega') d\mathbf{m}(x) < +\infty$ $\mathbf{P}'$ -п.н.
Обозначим

$$\zeta_j(x, \omega') = \sup_{1 \leq n \leq j} \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k(\omega') f_k(x) \right|, \quad \zeta(x, \omega') = \sup_{n \geq 1} \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k(\omega') f_k(x) \right|.$$

Из неравенства Леви для симметричных величин ε_k (см., например, неравенство (1.10) в [24]) следует, что

$$\mathbf{P}' \{ \zeta_j(x, \omega') \geq c \} \leq 2\mathbf{P}' \left\{ \left| \sum_{k=1}^j \varepsilon_k(\omega') f_k(x) \right| \geq c \right\}$$

для любых $x \in \mathbf{X}$, $c > 0$, $j \geq 1$. Для произвольного $\delta > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}' \{ \zeta(x, \omega') \geq c + \delta \} &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{P}' \{ \zeta_j(x, \omega') \geq c \} \leq 2 \limsup_{j \rightarrow \infty} \mathbf{P}' \left\{ \left| \sum_{k=1}^j \varepsilon_k(\omega') f_k(x) \right| \geq c \right\} \\ &\leq 2\mathbf{P}' \{ |\eta(x, \omega')| \geq c - \delta \}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Измеримая функция $h: \mathbf{X} \rightarrow [0, +\infty]$ интегрируема по конечной мере $\mathbf{m}$ тогда и только тогда, когда $\sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{m}(\{x: h(x) > r\}) < +\infty$ (см., например, теорему 2.9.1 в [25]). Отсюда, из интегрируемости $\eta^2(x, \omega')$ по $\mathbf{m}$ и из (3.7) (при $\delta \rightarrow 0$) получаем, что $\zeta^2(x, \omega')$ почти для каждого ω' интегрируема по $\mathbf{m}$. Из условия теоремы следует, что тогда $\zeta(x, \omega')$ почти для каждого ω' интегрируема по μ .

Для любого $j \geq 1$ выполняется неравенство $|\sum_{k=1}^j \varepsilon_k(\omega') f_k(x)| \leq \zeta(x, \omega')$. Для каждого ω' (кроме множества нулевой меры $\mathbf{P}'$) мы используем аналог теоремы Лебега для интеграла по μ [18, предложение 7.1.1] и получаем, что

$$\int_{\mathbf{X}} \eta(x, \omega') d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(\omega') \int_{\mathbf{X}} f_k(x) d\mu(x), \quad (3.8)$$

где последний ряд сходится по вероятности $\mathbf{P}$. Отсюда легко получаем, что этот ряд сходится по вероятности $\mathbf{P} \times \mathbf{P}'$ на $\Omega \times \Omega'$, а его частичные суммы ограничены по вероятности $\mathbf{P} \times \mathbf{P}'$.

Как и в доказательстве леммы 3.1, обозначим $\xi_k(\omega) = \int_{\mathbf{X}} f_k d\mu$. Если неравенство (3.5) не выполняется, то для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и любого $c > 0$ найдется $m \geq 1$ такое, что имеет место (3.2) (мы в точности можем повторить вывод (3.2) из доказательства леммы 3.1). Это противоречит ограниченности по вероятности $\mathbf{P} \times \mathbf{P}'$ частичных сумм ряда в (3.8). Лемма 3.3 доказана.

Хорошо известно, что условию, наложенному на μ в лемме 3.3, удовлетворяют, например, случайные меры с ортогональными значениям, для которых соответствующая структурная мера конечна.

4. Выборочные функции случайных мер на $[0, 1]$. В данном пункте мы берем $\mathbf{X} = [0, 1]$, $\mathcal{B}$ — борелевскую и будем использовать обозначения $\Delta_{kn} = ((k-1)2^{-n}, k2^{-n}]$, $n \geq 1$, $1 \leq k \leq 2^n$.

Для $d = 1$ и $\mu(t) = \mu([0, t])$, $t \in [0, 1]$, условие (2.1) переписывается в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\alpha p - 1)} \sum_{k=1}^{2^n} |\mu(\Delta_{kn})|^p < +\infty. \quad (4.1)$$

Теорема 4.1. Пусть процесс $\mu(t) = \mu([0, t])$, $0 \leq t \leq 1$, имеет непрерывные траектории. Тогда для любых $1 \leq p < +\infty$, $0 < \alpha < \min\{1/p, \frac{1}{2}\}$ траектория $\mu(t)$ с вероятностью 1 принадлежит пространству Бесова $B_{pp}^\alpha([0, 1])$.

Доказательство. Данное утверждение для случая $2 \leq p < +\infty$ получено в теореме работы [15] (легко видеть, что в этом случае (4.1) является непосредственным следствием леммы 3.2).

Далее мы проверим (4.1) в случае $1 \leq p < 2$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, для чего покажем конечность п.н. суммы

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\alpha p - 1)} \sum_{k=1}^{2^n} |\mu(\Delta_{kn})|^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\alpha p - 1)} 2^{n(1-p/2)} \left(\sum_{k=1}^{2^n} |\mu(\Delta_{kn})|^2 \right)^{p/2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{np(\alpha - 1/2)} \left(\sum_{k=1}^{2^n} |\mu(\Delta_{kn})|^2 \right)^{p/2}. \end{aligned}$$

Здесь мы для каждой из сумм по k использовали неравенство

$$\frac{1}{j} \sum_{i=1}^j |c_i|^t \leq \left(\frac{1}{j} \sum_{i=1}^j |c_i| \right)^t \quad (4.2)$$

с $t = p/2 < 1$, $j = 2^n$.

Возьмем некоторые числа $\beta_1, \beta_2 < 0$ такие, что

$$\beta_1 \frac{2-p}{2} + \beta_2 \frac{p}{2} = p \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) < 0.$$

Используем неравенство Гёльдера в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{2/(2-p)} \right)^{(2-p)/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{2/p} \right)^{p/2}, \quad (4.3)$$

положим

$$c_n = 2^{n\beta_1(2-p)/2}, \quad d_n = 2^{n\beta_2 p/2} \left(\sum_{k=1}^{2^n} |\mu(\Delta_{kn})|^2 \right)^{p/2}.$$

Таким образом получим, что

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} 2^{np(\alpha-1/2)} \left(\sum_{k=1}^{2^n} |\mu(\Delta_{kn})|^2 \right)^{p/2} \\ & \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n\beta_1} \right)^{(2-p)/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n\beta_2} \sum_{k=1}^{2^n} |\mu(\Delta_{kn})|^2 \right)^{p/2} < +\infty. \end{aligned}$$

Последний ряд является конечным п.н. по лемме 3.2. Теорема 4.1 доказана.

В связи с полученным результатом отметим, что траектории винеровского процесса с вероятностью 1 не принадлежат пространству Бесова $B_{pq}^{\alpha}([0, 1])$ для $\max\{1/p, 1/2\} < \alpha < 1$, $p, q \geq 1$ [6, теорема 1].

Следствие 4.1. Пусть процесс $\mu(t) = \mu([0, t])$, $0 \leq t \leq 1$, имеет непрерывные траектории. Предположим, что функция $h: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ такова, что для некоторых $\gamma > \frac{1}{2}$, $C > 0$ и всех $x, y \in [0, 1]$ выполнено неравенство

$$|h(x) - h(y)| \leq C|x - y|^{\gamma}.$$

Тогда процесс

$$\zeta(t) = \int_{[0, t]} h(x) \mu(dx), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

для любых $1 \leq p < +\infty$ и $0 < \alpha < \min\{1/p, 1/2\}$ имеет модификацию, в которой все траектории принадлежат пространству Бесова $B_{pp}^{\alpha}([0, 1])$.

Доказательство. Существование непрерывной модификации ζ следует из теоремы 2 работы [26]. Случайной мерой будет $\zeta(A) = \int_A h(x) \mu(dx)$, $A \in \mathcal{B}$ (это следует из аналога теоремы Лебега [18, предложение 7.1.1]). Остается использовать теорему 4.1.

Также можно получить указанную регулярность траекторий, зависящих от параметра интегралов по случайной мере. Пусть функция $f(t, x): [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ для каждого фиксированного $t \in [0, 1]$ интегрируема относительно μ по переменной x . Рассмотрим процесс

$$\eta(t) = \int_{[0, 1]} f(t, x) d\mu(x), \quad t \in [0, 1].$$

Следствие 4.2. Пусть выполняются следующие условия:

- 1) для некоторых $\gamma > \frac{1}{2}$, $C > 0$ и всех $t, x, y \in [0, 1]$ выполнено неравенство $|f(t, x) - f(t, y)| \leq C|x - y|^{\gamma}$;
- 2) функция $f(\cdot, x): [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ для каждого $x \in [0, 1]$ абсолютно непрерывна на $[0, 1]$;
- 3) функция $g(x)$, равная вариации $f(\cdot, x)$ на $[0, 1]$, интегрируема по μ .

Тогда для любых $1 \leq p < +\infty$ и $0 < \alpha < \min\{\frac{1}{2}, 1/p\}$ существует модификация η , все траектории которой принадлежат пространству Бесова $B_{pp}^{\alpha}([0, 1])$.

Доказательство. Из условия 1) следует непрерывность и интегрируемость $f(t, \cdot)$, из 2) — непрерывность $f(\cdot, x)$. По теореме 1 [26] η имеет непрерывную модификацию, по теореме 3 [26] ее приращения порождают случайную меру. Остается использовать утверждение теоремы 4.1.

5. Выборочные функции случайных мер на $[0, 1]^d$. В данном пункте мы берем $\mathbf{X} = [0, 1]^d$, $d \geq 1$, и снова борелевскую $\mathcal{B}$.

Теорема 5.1. Пусть случайная функция $\mu(\mathbf{x}) = \mu(\prod_{i=1}^d [0, x_i])$, $\mathbf{x} \in [0, 1]^d$, имеет непрерывные реализации. Предположим, что для случайной меры μ существует действительная конечная мера $\mathbf{m}$ на $\mathcal{B}$ такая, что для любой измеримой функции $h: [0, 1]^d \rightarrow \mathbf{R}$ из выполнения условия $\int_{[0, 1]^d} h^2 d\mathbf{m} < +\infty$ следует интегрируемость h по μ на $[0, 1]^d$.

Тогда для любых $1 \leq p < +\infty$ и $0 < \alpha < \min\{1/p, \frac{1}{2}\}$ реализация $\mu(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in [0, 1]^d$, с вероятностью 1 принадлежит пространству Бесова $B_{pp}^{\alpha}([0, 1]^d)$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $2 \leq p < +\infty$, тогда $0 < \alpha < 1/p$. Поскольку $\mu(\mathbf{x})$ непрерывна, а потому ограничена на $[0, 1]^d$, для выполнения (2.1) при $p \geq 2$ достаточно сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\alpha p - d)} \sum_{\mathbf{y} \in U(n, i)} |\mu(\mathbf{y} + 2^{-n} \mathbf{e}_i) - \mu(\mathbf{y})|^2 \quad (5.1)$$

для каждого i , далее i считаем фиксированным. Легко видеть, что для каждого $\mathbf{y} \in U(n, i)$

$$\mu(\mathbf{y} + 2^{-n} \mathbf{e}_i) - \mu(\mathbf{y}) = \int_{[0, 1]^d} h_{n, \mathbf{y}}(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}),$$

где для $\mathbf{y} = (k_1/2^n, k_2/2^n, \dots, k_d/2^n)$ функция $h_{n, \mathbf{y}}(\mathbf{x})$ имеет вид

$$h_{n, \mathbf{y}}(\mathbf{x}) = I_{\{x_j \leq k_j/2^n, j \neq i, k_i/2^n < x_i \leq (k_i+1)/2^n\}}(\mathbf{x}). \quad (5.2)$$

Для любого n каждый фиксированный вектор $\mathbf{x}$ принадлежит не более чем $2^{n(d-1)}$ множествам из индикаторов в (5.2). Поэтому

$$\sum_{n \geq 1, \mathbf{y} \in U(n, i)} (2^{n(\alpha p - d)/2} h_{n, \mathbf{y}}(\mathbf{x}))^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\alpha p - d)} 2^{n(d-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\alpha p - 1)} < +\infty. \quad (5.3)$$

Сходимость ряда (5.1) эквивалентна тому, что конечной является сумма

$$\sum_{n \geq 1, \mathbf{y} \in U(n, i)} \left(2^{n(\alpha p - d)/2} \int_{[0, 1]^d} h_{n, \mathbf{y}}(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) \right)^2.$$

Эта сходимость следует из (5.3) и леммы 3.3, где в качестве f_k , $k \geq 1$, берем $2^{n(\alpha p - d)/2} h_{n, \mathbf{y}}$, $n \geq 1$, $\mathbf{y} \in U(n, i)$.

Теперь рассмотрим случай $1 \leq p < 2$, тогда $0 < \alpha < 1/2$. Чтобы доказать выполнение (2.1), используем для каждой из сумм по $\mathbf{y} \in U(n, i)$ неравенство (4.2) с $t = p/2 < 1$, $j = 2^n(2^n + 1)^{d-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\alpha p - d)} \sum_{\mathbf{y} \in U(n, i)} |\mu(\mathbf{y} + 2^{-n} \mathbf{e}_i) - \mu(\mathbf{y})|^p \\ & \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(\alpha p - d)} [2^n(2^n + 1)^{d-1}]^{(2-p)/2} \left(\sum_{\mathbf{y} \in U(n, i)} |\mu(\mathbf{y} + 2^{-n} \mathbf{e}_i) - \mu(\mathbf{y})|^2 \right)^{p/2}. \end{aligned}$$

Заменив $2^n + 1$ на 2^n , приходим к эквивалентной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{np(\alpha - d/2)} \left(\sum_{\mathbf{y} \in U(n, i)} |\mu(\mathbf{y} + 2^{-n} \mathbf{e}_i) - \mu(\mathbf{y})|^2 \right)^{p/2}. \quad (5.4)$$

Применяя к сумме по n неравенство Гёльдера в виде (4.3), получаем, что (5.4) не превосходит

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n\beta_1} \right)^{(2-p)/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n\beta_2} \sum_{\mathbf{y} \in U(n, i)} |\mu(\mathbf{y} + 2^{-n} \mathbf{e}_i) - \mu(\mathbf{y})|^2 \right)^{p/2}. \quad (5.5)$$

Здесь β_1, β_2 — некоторые числа такие, что $\beta_1 < 0$, $\beta_2 < 1 - d$ и

$$\beta_1 \frac{2-p}{2} + \beta_2 \frac{p}{2} = p \left(\alpha - \frac{d}{2} \right).$$

Чтобы такие β_1 и β_2 существовали, достаточно, чтобы

$$(1-d)\frac{p}{2} > p\left(\alpha - \frac{d}{2}\right) \iff \alpha < \frac{1}{2}.$$

При $\beta_2 < 1-d$, аналогично (5.1) и (5.3), рассмотрим

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n\beta_2} \sum_{\mathbf{y} \in U(n,i)} |\mu(\mathbf{y} + 2^{-n}\mathbf{e}_i) - \mu(\mathbf{y})|^2 = \sum_{n \geq 1, \mathbf{y} \in U(n,i)} \left(2^{n\beta_2/2} \int_{[0,1]^d} h_{n,\mathbf{y}}(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) \right)^2.$$

Конечность п.н. последней суммы следует из леммы 3.3 и оценки

$$\sum_{n \geq 1, \mathbf{y} \in U(n,i)} (2^{n\beta_2/2} h_{n,\mathbf{y}}(\mathbf{x}))^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n\beta_2} 2^{n(d-1)} < +\infty.$$

Таким образом, (2.1) выполняется. Теорема 5.1 доказана.

Отметим, что условия непрерывности реализаций для случайных полей на $\mathbf{R}^d$ получены в [27, гл. II], для случайных функций при параметрических множествах общего вида — в [28, гл. III].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесов О. В. О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения. — Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 6, с. 1163–1165.
2. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975, 480 с.
3. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977, 455 с.
4. Трибель Х. Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986, 447 с.
5. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980, 664 с.
6. Roynette B. Mouvement brownien et espaces de Besov. — Stochastics Stochastics Rep., 1993, v. 43, № 3–4, p. 221–260.
7. Ciesielski Z., Kerkycharian G., Roynette B. Quelques espaces fonctionnels associés à des processus gaussiens. — Studia Math., 1993, v. 107, № 2, p. 171–204.
8. Herren V. Lévy-type processes and Besov spaces. — Potential Anal., 1997, v. 7, № 3, p. 689–704.
9. Schilling R. L. On Feller processes with sample paths in Besov spaces. — Math. Ann., 1997, v. 309, № 4, p. 663–675.
10. Zhang X. On the quasi-everywhere regularity of the local time of one-dimensional diffusion process in Besov space. — Statist. Probab. Lett., 2001, v. 54, № 2, p. 161–169.
11. Lorang G. Régularité Besov des trajectoires du processus intégral de Skorokhod. — Studia Math., 1996, v. 117, № 3, p. 205–223.
12. Nualart D., Ouknine Y. Besov regularity of stochastic integrals with respect to the fractional Brownian motion with parameter $H > \frac{1}{2}$. — J. Theoret. Probab., 2003, v. 16, № 2, p. 451–470.
13. Lakhel H., Ouknine Y., Tudor C. A. Besov regularity for the indefinite Skorohod integral with respect to the fractional Brownian motion: the singular case. — Stochastics Stochastics Rep., 2002, v. 74, № 3–4, p. 597–615.
14. Zähle M. Forward integrals and stochastic differential equations. — Progr. in Probab., 2002, v. 52, p. 293–302.
15. Radchenko V. M. Besov regularity of stochastic measures. — Statist. Probab. Lett., 2007, v. 77, № 8, p. 822–825.
16. Kamont A. A discrete characterization of Besov spaces. — Approx. Theory Appl. (N.S.), 1997, v. 13, № 2, p. 63–77.

17. *Mémin J., Mishura Yu., Valkeila E.* Inequalities for the moments of Wiener integrals with respect to a fractional Brownian motion. — *Statist. Probab. Lett.*, 2001, v. 51, № 2, p. 197–206.
18. *Kwapień S., Woyczyński W. A.* Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple. Boston: Birkhäuser, 1992, 360 p.
19. *Радченко В. Н.* Интегралы по общим случайным мерам. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999, 196 с. (Труды Института математики НАН Украины, т. 27.)
20. *Радченко В. Н.* Интегралы по случайным мерам и случайные линейные функционалы. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1991, т. 36, в. 3, с. 594–596.
21. *Talagrand M.* Les mesures vectorielles à valeurs dans L_0 sont bornées. — *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 1981, v. 14, № 4, p. 445–452.
22. *Радченко В. М.* Про добуток випадкової та дійсної мір. — *Теор. ймовірност. та матем. статист.*, 2004, в. 70, с. 144–148.
23. *Ваханян Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985, 368 с.
24. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1986, 320 с.
25. *Богачев В. И.* Основы теории меры. Т. 1. М.–Ижевск: РХД, 2006, 584 с.
26. *Радченко В. М.* Залежні від параметра інтеграли за загальними випадковими мірами. — *Теор. ймовірност. та матем. статист.*, 2006, в. 75, с. 140–143.
27. *Ядренко М. И.* Спектральная теория случайных полей. Киев: Выща школа, 1980, 208 с.
28. *Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В.* Метрические характеристики случайных величин и процессов. Киев: ТВиМС, 1998, 289 с.

Поступила в редакцию
14.V.2007