Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Балтрунас, А. Л. Якимив, Асимптотика второго порядка субэкспоненциальных безгранично делимых распределений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 4, 793–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp257>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 18:34:57

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2003 г.

БАЛТРУНАС А.*, ЯКЫМИВ А. Л.**

АСИМПТОТИКА ВТОРОГО ПОРЯДКА СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ
БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ¹⁾

В работе предложен новый метод, с помощью которого получена асимптотика второго порядка субэкспоненциальных безгранично делимых распределений.

А именно, для субэкспоненциальной безгранично делимой функции распределения $H(x)$ со спектральной мерой Леви μ при $x \rightarrow \infty$ найдены оценки разности

$$1 - H(x) - \mu((x, \infty)).$$

Ключевые слова и фразы: безгранично делимые распределения, спектральная мера Леви, субэкспоненциальные распределения, мажорируемо меняющиеся функции, RO -меняющиеся функции.

Введение. Допустим, что функция распределения (ф.р.) H , сосредоточенная на положительной полуоси, является безгранично делимой со спектральной мерой Леви μ . Положим $\alpha = \mu([1, \infty))$ и определим ф.р. $F(x) = \mu([1, x])/\alpha$, $x \geq 1$. Через V обозначим сложное пуассоновское распределение такое, что

$$V(x) = e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} F^{*n}(x), \quad (1)$$

где $*$, как обычно, означает свертку по Стильтесу. Известно (см. [1, гл. XVII, § 4]), что в таком случае H можно записать как $H(x) = U * V(x)$, где U — ф.р. такая, что $1 - U(x) = o(1)e^{-\varepsilon x}$ при $x \rightarrow \infty$ для любого фиксированного $\varepsilon > 0$.

Будем говорить, что ф.р. F принадлежит классу S субэкспоненциальных распределений, если ее хвост $\bar{F} := 1 - F$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F} * \bar{F}(x)}{\bar{F}(x)} = 2. \quad (2)$$

Известно (см. теорему 2 работы [2]), что если выполнено (2), то тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} = 1, \quad y \geq 0. \quad (3)$$

Через $\mathfrak{L}$ обозначим класс всех функций, удовлетворяющих соотношению (3).

* Институт математики и информатики, ул. Академийос, 4, Вильнюс, Литва; e-mail: baltrunas@takas.lt

** Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: arsen@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-01080) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ-1758-2002.1

Асимптотика безгранично делимых функций распределения изучена достаточно подробно (см., например, работы [3]–[7]). Этого нельзя сказать об асимптотике второго порядка безгранично делимых функций распределения. Специально этой теме посвящена одна работа [8]. Частный случай получен в теореме 4.3 работы [9]. Цель настоящей заметки — заполнить этот пробел. А именно, в этой работе мы разработали новый метод, с помощью которого для достаточно широкого класса субэкспоненциальных распределений мы дадим асимптотическое представление субэкспоненциальной безгранично делимой функции распределения H .

Вспомогательные леммы. Через $\mathfrak{F}$ обозначим множество всех положительных измеримых функций, определенных на $[0, \infty)$. Для функций $h, g \in \mathfrak{F}$ определим свертку по Лебегу $h \star g$ соотношением

$$h \star g(x) = \int_0^x h(x-u)g(u)du, \quad x \geq 0.$$

Функция $g(x) \in \mathfrak{F}$ *RO-меняется на бесконечности*, если для любого $y > 0$

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{g(yx)}{g(x)} < \infty.$$

Множество всех *RO-меняющихся на бесконечности* функций, определенных на $[0, \infty)$, обозначим $\mathfrak{D}$.

Функция $f(x)$ *мажорируемо меняется на бесконечности*, если она *RO-меняется* на бесконечности и монотонна при достаточно больших x .

Будем говорить, что ф.р. F на $[0, \infty)$ *принадлежит классу S^** , если F имеет первый момент $\eta > 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}^{*2}(x)/\bar{F}(x) = 2\eta$. Известно, что если $F \in S^*$, то $F \in S$.

Интегрируемая функция $g \in \mathfrak{F}$ *принадлежит классу SD* , если $g \in \mathcal{L}$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} g^{*2}(x)/g(x) = 2$.

Будем говорить, что функции $g, h \in \mathfrak{F}$ являются слабо эквивалентными (т.е. $g \asymp h$), если

$$0 < \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{h(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{h(x)} < \infty.$$

Функции g и h , принадлежащие $\mathfrak{F}$, асимптотически эквивалентны (т.е. $g \sim h$), если $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)/h(x) = 1$.

Определим

$$Q(x) = -\ln \bar{F}(x), \quad x \geq 0.$$

Допустим, что существует неотрицательная функция q такая, что $Q(x) = \int_0^x q(u)du$, $x \geq 0$. В этом случае ф.р. F имеет плотность $f = q\bar{F}$. Обозначим $\mu(x) = \frac{d}{dx} \mu([1, x])$, $x \geq 1$. Отсюда следует, что $f(x) = \mu(x)/\alpha$.

Тогда ф.р. V также имеет плотность v , которая определяется соотношением

$$v(x) = e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} f^{*n}(x),$$

Через $P(z)$ обозначим производящую функцию последовательности $\{e^{-\alpha} \alpha^n / n!, n \geq 0\}$. Нетрудно видеть, что $P(z) = \exp(\alpha(z-1))$.

Верна следующая лемма.

Лемма 1 (см. [10]). *Допустим, что функция $P(z)$ является аналитической в точке $z = 1$.*

i) *Если $F \in S$, то тогда $V \in S$ и $\bar{V}(x) \sim P'(1)\bar{F}(x)$.*

ii) *Если $f \in SD$, то тогда $v \in SD$ и $v(x) \sim P'(1)f(x)$.*

В нашем случае $P(z)$ является аналитической и $P'(1) = \alpha$.

Определим индекс функции Q следующим соотношением:

$$r := \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{xq(x)}{Q(x)}.$$

Определим $r_\varepsilon = r + \varepsilon$, где $\varepsilon \in (0, 1-r)$ — достаточно малое.

Обозначим

$$R(x, r_\varepsilon) = \int_0^x \bar{F}^{1-r_\varepsilon}(u) du, \quad R(x) = \int_0^x \bar{F}(u) du, \quad x \geq 0.$$

В случае $r < 1$, имеем $R(x) \leq R(x, r_\varepsilon)$.

Следующая лемма представляет особый интерес в нашем исследовании.

Лемма 2. Допустим, что $r < 1$. Тогда

i) для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $C > 0$ такая, что $\bar{F}^{*2}(x) \leq C\bar{F}(x)R(x, r_\varepsilon)$;

ii) если ф.р. F имеет момент порядка κ такой, что $\kappa(1-r) > 1$, то $F \in S^*$.

Доказательство. i) Имеем

$$\frac{\bar{F}^{*2}(x)}{\bar{F}(x)} = 2 \int_0^{x/2} \exp(-Q(u) - Q(x-u) + Q(x)) du.$$

Поскольку $r < 1$, для достаточно больших u получаем

$$\left(\frac{Q(u)}{u}\right)' = \frac{uq(u) - Q(u)}{u^2} < -\frac{(1-r_\varepsilon)Q(u)}{u^2} \leq 0,$$

т.е. функция $s(x) = Q(x)/x$ является невозрастающей при $x \geq x_0$.

Отсюда для любого u : $x_0 \leq u \leq x/2$

$$Q(x) - Q(x-u) \leq r_\varepsilon s(x-u)u \leq r_\varepsilon s(u)u = r_\varepsilon Q(u).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\bar{F}^{*2}(x)}{\bar{F}(x)} &\leq C \int_0^{x/2} \exp(-Q(u) + r_\varepsilon Q(u)) du \\ &= C \int_0^{x/2} \exp(-Q(u)(1-r_\varepsilon)) du = CR\left(\frac{x}{2}, r_\varepsilon\right), \end{aligned}$$

где $C = 2 \exp(r_\varepsilon Q(x_0))$.

ii) Принимая во внимание условие $\kappa(1-r) > 1$, получаем, что $\exp(-Q(u)(1-r_\varepsilon)) \leq c_0 u^{-\kappa(1-r_\varepsilon)} \leq c_0 u^{-1-\delta}$, где $\delta > 0$.

Тогда $R(\infty) < \infty$. Отсюда $F \in S^*$.

Лемма доказана.

Лемма 3. Если $r < 1$, то функция $s(x) = Q(x)/x$, $x > 0$, меняется мажорируемо на бесконечности.

Доказательство. Для всех $x > 0$

$$1 \leq \frac{s(x/2)}{s(x)} = 2 \frac{Q(x/2)}{Q(x)} \leq 2,$$

т.е. $s \in \mathfrak{D}$. Лемма доказана.

Лемма 4. Если $r < 1$ и $s(x)R(x, r_\varepsilon) = o(1)$, то $F \in S$.

Доказательство. $F \in S$ тогда и только тогда, когда $\bar{F} \star f(x)/\bar{F}(x) \rightarrow 1$. Обозначим $I = \int_0^{x/2} f(x-u)\bar{F}(u) du$. Интегрируя по частям, получаем $\bar{F} \star f(x) = 2I + \bar{F}(x) - \bar{F}^2(x/2)$. Тогда $\bar{F}(x)F(x) \leq \bar{F} \star f(x) \leq 2I + \bar{F}(x)$. Поскольку $r < 1$, имеем $I = O(1)s(x)\bar{F}(x)R(x, r_\varepsilon) = o(1)\bar{F}(x)$. А это означает, что $F \in S$.

Следующая лемма дает простое достаточное условие принадлежности плотности классу SD (см. лемму 3.5 (ii) работы [9]).

Лемма 5. Допустим, что $F \in S$. Если $q \in \mathfrak{D} \cap \mathfrak{L}$, то $f \in SD$.

Суммируя полученные результаты, получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Допустим, что $r < 1$ и $s(x)R(x, r_\varepsilon) = o(1)$. Тогда

i) $V \in S$ и $\bar{V}(x) \sim \alpha \bar{F}(x)$;

ii) если $q \in \mathfrak{D} \cap \mathfrak{L}$, то $v \in SD$ и $v(x) \sim \alpha f(x)$.

В частном случае, когда хвост ф.р. F меняется мажорируемо на бесконечности, получаем следующий результат.

Лемма 6. Допустим, что $q \in \mathcal{L}$ и $0 < \liminf_{x \rightarrow \infty} x q(x) \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} x q(x) < \infty$. Тогда

- i) $\bar{F}^{*2}(x) = O(1) \bar{F}(x) R(x)$;
- ii) $f \in SD$.

Основные результаты. Нашим исходным пунктом исследования является следующее равенство

$$\bar{H}(x) = U(x) V(x) - H(x) + \bar{V}(x) + V(x) \bar{U}(x) := I + II + III. \quad (4)$$

Имеем $III = o(1)e^{-\varepsilon x}$. Заметим, что $I = I_0 + I_1 + I_2$, где

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{x/2} (U(x) - U(x-y)) dV(y), \quad I_1 = \int_0^{x/2} (V(x) - V(x-y)) dU(y), \\ I_2 &= \left(V(x) - V\left(\frac{x}{2}\right) \right) \left(U(x) - U\left(\frac{x}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что $I_0 + I_2 = o(1)e^{-\varepsilon x/2}$. Если $F \in S$, то

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{x/2} (V(x) - V(x-y)) dU(y) \leq \int_0^{x/2} \bar{V}(x-y) dU(y) \\ &= O(1) \int_0^{x/2} \bar{F}(x-y) dU(y) = o(1) \bar{F}\left(\frac{x}{2}\right) e^{-\varepsilon x/2} + O(1) \int_{x/2}^x \bar{U}(x-y) dF(y). \end{aligned}$$

Верна следующая лемма.

Лемма 7. Допустим, что $r < 1$ и $s(x)R(x, r_\varepsilon) = o(1)$. Тогда

- i) $I_1 = O(1) s(x) \bar{F}(x) R(x, r_\varepsilon)$;
- ii) если $q \in \mathfrak{D}$, то $I_1 = O(1) f(x) R(x, r_\varepsilon)$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{x/2}^x \bar{U}(x-y) dF(y) &= O(1) \int_{x/2}^x \bar{U}(x-y) f(y) dy \\ &= O(1) \int_0^{x/2} q(x-y) \bar{F}(x-y) \bar{F}(y) dy = O(1) s(x) \bar{F}(x) R(x, r_\varepsilon). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Мы видим, что задача определения асимптотики второго порядка субэкспоненциального безгранично делимого распределения сводится к задаче определения асимптотики второго порядка субэкспоненциального обобщенного пуассоновского распределения.

Обозначим

$$D(x) = \bar{V}(x) - \alpha \bar{F}(x), \quad D_0(x) = \bar{F} \star f(x) - \bar{F}(x).$$

Имеем (см. [10, гл. 2])

$$D(x) = (\alpha - 1) D_0(x) + D_0 \star g(x),$$

где $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) f^{*n}$ и последовательность $a(n)$, $n \geq 0$, определена следующим образом: $a(n) = e^{-\alpha} \sum_{k=n+2}^{\infty} (k-1-n) \alpha^k / k!$.

Нетрудно видеть, что производящая функция последовательности $a(n)$, $n \geq 0$, — аналитическая в точке $z = 1$. Если $f \in SD$, то $g(x) \sim \alpha^3 f(x)$.

Следующая лемма является ключевой в нашем исследовании.

Лемма 8. i) Если $q \in \mathfrak{D}$ и $r < 1$, то

$$D_0(x) = O(1) \max(f(x) R(x, r_\varepsilon), \bar{F}^2(x));$$

если, кроме того, $\liminf_{x \rightarrow \infty} x q(x) > 0$, то $D_0(x) = O(1) f(x) R(x, r_\varepsilon)$.

ii) Если ф.р. F имеет момент $\kappa > 1/(1-r)$, где $r < 1$, и $q \in \mathfrak{D} \cap \mathfrak{L}$, то

$$D_0(x) + \bar{F}^2\left(\frac{x}{2}\right) \sim 2f(x) R(\infty).$$

Доказательство. i) Поскольку $q \in \mathfrak{D}$ и $r < 1$, из (5) вытекает, что

$$\begin{aligned} D_0(x) + \bar{F}^2\left(\frac{x}{2}\right) &\asymp \int_{x/2}^x \bar{F}(x-y) \bar{F}(y) q(y) dy \\ &\asymp q(x) \int_{x/2}^x \bar{F}(x-y) \bar{F}(y) dy \leq q(x) \bar{F}(x) R\left(\frac{x}{2}, r_\varepsilon\right). \end{aligned}$$

С другой стороны, мы получаем, что

$$D_0(x) = \bar{F} \star f(x) - \bar{F}(x) \geq \bar{F}(x) \int_0^x f(y) dy - \bar{F}(x) = -\bar{F}^2(x).$$

Имеем $x\bar{F}^{1-r_\varepsilon}(x) \leq R(x, r_\varepsilon)$. Если $\liminf_{x \rightarrow \infty} xq(x) > 0$, то

$$\frac{\bar{F}^2(x)}{f(x)R(x, r_\varepsilon)} \leq \frac{\bar{F}^2(x)}{x f(x) \bar{F}^{1-r_\varepsilon}(x)} = \frac{\bar{F}^{r_\varepsilon}(x)}{xq(x)} = o(1).$$

Отсюда $D_0(x) = O(1) f(x) R(x, r_\varepsilon)$.

ii) Поскольку $\kappa > 1/(1-r)$ и $r < 1$, то $F \in S^*$. Отсюда $R(\infty) < \infty$. Из (5) получаем, что для любого $a > 0$

$$\int_{x/2}^x \bar{F}(x-y) \bar{F}(y) q(y) dy = \left(\int_{x/2}^{x-a} + \int_{x-a}^x \right) \bar{F}(x-y) \bar{F}(y) q(y) dy := I' + I''.$$

Поскольку $q \in \mathfrak{L}$, получаем, что $\lim_{x \rightarrow \infty} (I''/f(x)) = \int_0^a \bar{F}(y) dy$.

Из $q \in \mathfrak{D}$ вытекает, что

$$I' \asymp q(x) \int_a^{x/2} \bar{F}(x-y) \bar{F}(y) dy = q(x) \left(\int_0^{x/2} - \int_0^a \right) \bar{F}(x-y) \bar{F}(y) dy.$$

А тогда $I' = O(1) q(x) \bar{F}(x) \int_a^{x/2} \bar{F}(y) dy$.

Искомый результат получим при $a \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

Лемма 9. i) Допустим, что $\liminf_{x \rightarrow \infty} xq(x) > 0$ и $f \in SD$. Тогда

$$\bar{F}^2 \star f(x) = O(1) f(x) R(x).$$

ii) Если $r < \frac{1}{2}$, то

$$\int_0^{x/2} \bar{F}^2(x-y) f(y) dy = O(1) \bar{F}^2(x).$$

iii) Если $r < 1$, то существует такая константа $C > 0$, что

$$\int_0^{x/2} \frac{\bar{F}^2(y)}{\bar{F}(x)} \bar{F}(x-y) dy \leq CR\left(\frac{x}{2}\right).$$

Доказательство. i) Имеем $x\bar{F}(x) \leq R(x)$. Если $\liminf_{x \rightarrow \infty} xq(x) > 0$, то

$$\frac{\bar{F}^2(x)}{f(x)R(x)} \leq \frac{\bar{F}^2(x)}{x f(x) \bar{F}(x)} = \frac{1}{xq(x)} = O(1),$$

т.е. $\bar{F}^2(x) = O(1) f(x) R(x)$.

Учитывая этот факт, получаем:

$$\begin{aligned} \bar{F}^2 \star f(x) &= \int_0^x \bar{F}^2(x-y) f(y) dy = O(1) \int_0^x f(x-y) R(x-y, 0) f(y) dy \\ &= O(1) R(x) f \star f(x) = O(1) f(x) R(x). \end{aligned}$$

ii) Поскольку $r < \frac{1}{2}$, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{x/2} \frac{\bar{F}^2(x-y)}{\bar{F}^2(x)} f(y) dy &= \int_0^{x/2} \exp(2Q(x) - 2Q(x-y)) f(y) dy \\ &\leq \int_0^{x/2} \exp\left(s\left(\frac{x}{2}\right)y\right) dF(y) \\ &= \left(\int_0^{1/s(x/2)} + \int_{1/s(x/2)}^{x/2}\right) \exp\left(s\left(\frac{x}{2}\right)y\right) dF(y) := A + B. \end{aligned}$$

Очевидно, что $A < \infty$. Имеем

$$B = O(1) s(x) \int_{1/s(x/2)}^{x/2} \exp\left(s\left(\frac{x}{2}\right)y - Q(y)\right) dy.$$

Поскольку $r < 1$, для достаточно больших y получаем $(Q(y)/y)' = (yq(y) - Q(y))/y^2 < -(1-r_\epsilon)Q(y)/y^2$. Тогда

$$\begin{aligned} s\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{Q(y)}{y} &= \int_y^{x/2} \left(\frac{Q(y)}{y}\right)' dy \leq -4(1-r_\epsilon) \frac{Q(x/2)}{x^2} y \left(\frac{x}{2} - y\right) \\ &\leq -(1-r_\epsilon) \frac{Q(x/2)}{x} y. \end{aligned}$$

Отсюда получаем $B = O(1)$.

iii) Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{x/2} \frac{\bar{F}^2(y)}{\bar{F}(x)} \bar{F}(x-y) dy &= \int_0^{x/2} \exp(-2Q(y) - Q(x-y) + Q(x)) dy \\ &\leq C \int_0^{x/2} \exp(-2Q(y) + r_\epsilon s(y)y) dy \\ &= C \int_0^{x/2} \exp(-Q(y)(2-r_\epsilon)) dy \leq CR\left(\frac{x}{2}\right), \end{aligned}$$

где $C = 2 \exp(r_\epsilon Q(x_0))$.

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1. Виллекенс в работе [11] ввел подклассы S_i , $i \geq 0$, субэкспоненциальных распределений. Функция распределения F принадлежит S_i тогда и только тогда, когда

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{x/2} \bar{F}^{i+1}(x-u) dF(u) / \bar{F}^{i+1}(x) = 1$;
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}^{i+2}(x/2) / \bar{F}^{i+1}(x) = 0$.

Как следует из доказательства леммы 9, условие $r < \frac{1}{2}$ определяет класс распределений, для которых

$$\int_0^{x/2} \frac{\bar{F}^2(x-y)}{\bar{F}^2(x)} f(y) dy = O(1).$$

Наш основной результат представляет следующая теорема.

Теорема 1. Допустим, что $F \in S$ и $q \in \mathfrak{D} \cap \mathfrak{L}$.

- i) Если $D_0(x) = O(1) f(x) R(x, r_\epsilon)$, то $D(x) = O(1) f(x) R(x, r_\epsilon)$;
- ii) Если $\bar{F}^2 * f(x) = O(1) \max(\bar{F}^2(x), f(x) R(x, r_\epsilon))$, то

$$D(x) = O(1) \max(\bar{F}^2(x), f(x) R(x, r_\epsilon)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. i) Из предположений $F \in S$ и $q \in \mathfrak{D} \cap \mathfrak{L}$ вытекает, что $f \in SD$. Тогда $g(x) \sim \alpha^3 f(x)$.

Тогда существуют положительные константы a и A такие, что $|D_0(x)| \leq Af(x)R(x, r_\epsilon)$ при $x \geq a$. Отсюда

$$D_0 \star g(x) = \left(\int_0^{x-a} + \int_{x-a}^x \right) D_0(x-y)g(y)dy := D_1 + D_2.$$

Заметим, что

$$|D_1| \leq A \int_0^{x-a} f(x-y)R(x-y, r_\epsilon)g(y)dy \leq AR(x, r_\epsilon)f \star g(x).$$

Поскольку $g \asymp f \in SD$, получаем $D_1 = O(1)f(x)R(x, r_\epsilon)$.

Аналогично, учитывая то, что функция $D_0(x)$ ограничена некоторой константой b , имеем $|D_2| \leq b \int_{x-a}^x g(y)dy = O(1)f(x)$.

Следовательно,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{D_0 \star g(x)}{f(x)R(x, r_\epsilon)} < \infty.$$

Часть ii) теоремы доказывается аналогично. Теорема доказана.

В качестве следствия получаем такой результат.

Теорема 2. Допустим, что $F \in S$ и $q \in \mathfrak{D} \cap \mathfrak{L}$.

i) Если $D_0(x) = O(1)f(x)R(x, r_\epsilon)$, то

$$\overline{H}(x) - \mu((x, \infty)) = O(1)f(x)R(x, r_\epsilon).$$

ii) Если $\overline{F}^2 \star f(x) = O(1)\max(\overline{F}^2(x), f(x)R(x, r_\epsilon))$, то

$$\overline{H}(x) - \mu((x, \infty)) = O(1)\max(\overline{F}^2(x), f(x)R(x, r_\epsilon)).$$

Учитывая леммы 8 и 9, получаем следующее следствие.

Следствие 2. Допустим, что $r < 1$ и $q \in \mathfrak{G} \cap \mathcal{L}$.

i) Если $\liminf_{x \rightarrow \infty} xq(x) > 0$, то

$$\overline{H}(x) - \mu((x, \infty)) = O(f(x)R(x, r_\epsilon)).$$

ii) Если $\overline{F}^2(x) = O(f(x)R(x, r_\epsilon))$, то

$$\overline{H}(x) - \mu((x, \infty)) = O(f(x)R(x, r_\epsilon)).$$

iii) Если $r < \frac{1}{2}$, то

$$\overline{H}(x) - \mu((x, \infty)) = O\left(\max(\overline{F}^2(x), f(x)R(x, r_\epsilon))\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
2. Чистяков В. П. Теорема о суммах независимых положительных случайных величин и ее приложения к ветвящимся случайным процессам. — Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. 9, в. 4, с. 710–718.
3. Круглов В. М., Антонов С. Н. Об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений в банаховом пространстве. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. 27, в. 4, с. 625–642.
4. Золотарев В. М. Об асимптотическом поведении одного класса безгранично делимых законов распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 1961, т. 6, в. 3, с. 330–334.
5. Сгибнев М. С. Асимптотика безгранично делимых распределений в $\mathbf{R}$. — Сиб. матем. журн., 1990, т. 31, № 1, с. 135–140.
6. Embrechts P., Goldie C. M., Veraverbeke N. Subexponentiality and infinite divisibility. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb., 1979, v. 49, p. 335–347.

7. Sato K.-I. Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999, 486 p.
8. Якимив А. Л. Явные неравенства для асимптотики субэкспоненциальных безгранично делимых распределений. — Матем. заметки, 2000, т. 67, № 2, с. 295–301.
9. Baltrūnas A., Omey E. The rate of convergence for subexponential distributions. — Liet. Mat. Rink., 1998, v. 38, № 1, p. 1–18.
10. Omey E., Willekens E. Second-order behaviour of distributions subordinate to a distribution with finite mean. — Comm. Statist. Stochastic Models, 1987, v. 3, № 3, p. 311–342.
11. Willekens E. The structure of the class of subexponential distributions. — Probab. Theory Related Fields, 1988, v. 77, № 4, p. 567–581.

Поступила в редакцию
30.I.2002

© 2003 г.

МАСЛОВ В. П.*

АКСИОМЫ НЕЛИНЕЙНОГО ОСРЕДНЕНИЯ В ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ И ДИНАМИКА КУРСА АКЦИЙ¹⁾

К 80-летию Б. А. Севастьянова

При наличии фактора неопределенности, заключающегося в том, что некоторая величина X принимает не одно значение, а множество значений $x_1, \dots, x_n$, по ним обычно проводится осреднение с некоторыми коэффициентами α_i (мерами), такими, что $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$: $y = \sum \alpha_i x_i$. Когда речь идет о рынке ценных бумаг, возникает нелинейное осреднение величины y . В работе рассматривается осреднение вида $f(y) = \sum \alpha_i f_i(x_i)$. Исходя из четырех естественных аксиом доказывается, что либо выполняется вышеупомянутое линейное осреднение, либо $y = \ln \sum_{i=1}^n e^{x_i}$. Приводится пример пробоя курса акций при таком суммировании.

Ключевые слова и фразы: математическое ожидание, фактор неопределенности, значение случайной величины, доход, банки, акции, финансовая динамика, пробой курса акций.

Для того чтобы уловить усредненные колебания курса акций, который может меняться очень быстро, например, за одну ночь или даже в течение одного часа, приходится осреднять их цены и определять индексы, которые меняются достаточно плавно. Например, индексы одной отрасли, к тому же осредненные по достаточно большому интервалу времени, могут меняться достаточно плавно в течение на порядок большего времени.

Естественно осреднять доходы, просто взяв арифметическое среднее. Более гибкое осреднение применяется, когда берутся взвешенные суммы. Пусть x_i , $i = 1, \dots, n$, — доходы, α_i — «веса», $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, тогда

$$y = \sum \alpha_i x_i \quad (1)$$

осредненный доход (см., например, [1, с. 109], [2, с. 28], [3, с. 119], [4, с. 31]).

Однако всем известно, что суммирование доходов нелинейно. Например, если сумма купленных акций предприятия превышает 50% всех акций, то владелец этих

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: victor@maslov.msk.su