Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Питербарг, С. Стаматович, Предельная теорема для a -выходов траекторий χ -процесса за высокий уровень, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 4, 811–818

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp259>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 12:33:15

© 2003 г.

ПИТЕРБАРГ В. И.*, СТАМАТОВИЧ С.**

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ a -ВЫХОДОВ ТРАЕКТОРИЙ χ -ПРОЦЕССА ЗА ВЫСОКИЙ УРОВЕНЬ¹⁾

Доказана пуассоновская предельная теорема для числа высоких выбросов модуля гауссовского векторного процесса с независимыми одинаково распределенными компонентами.

Ключевые слова и фразы: гауссовские процессы, большие выбросы, процесс хи-квадрат.

1. Введение. Основные результаты. Предельные свойства случайных точечных процессов пересечений высокого уровня траекториями гауссовских случайных процессов достаточно хорошо исследованы, см. [2], [5], [6] и ссылки в этих работах. Достаточно полно исследованы также точечные процессы, порожденные высокими выбросами траекторий гауссовских случайных полей. Значительное число результатов в этом направлении содержится в [6], см. также обзор [1]. Что касается гауссовских векторных процессов, то здесь пока еще нет сколько-нибудь полного описания свойств точечных процессов, порожденных большими выбросами траекторий. Имеющиеся результаты относятся в основном к исследованию больших выбросов огибающей гауссовского стационарного процесса. Эти исследования основаны на изучении гауссовского двумерного процесса, одной из компонент которого является преобразование Гильберта исходного процесса, см. [3], [7]. В настоящей работе рассматривается точечный процесс выходов траекторий гауссовского стационарного векторного процесса произвольной размерности за поверхность бесконечно раздувающейся сферы. То есть рассматривается стационарный случайный процесс

$$\chi(t) = (X_1^2(t) + X_2^2(t) + \dots + X_n^2(t))^{1/2} = \|\mathbf{X}(t)\|, \quad t \in \mathbf{R},$$

где $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$ — гауссовский векторный процесс, компоненты которого являются независимыми одинаково распределенными гауссовскими стационарными процессами с нулевыми средними и ковариационной функцией $r(t)$. Предполагается, что

$$r(t) = 1 - |t|^\alpha + o(|t|^\alpha) \quad \text{при } t \rightarrow 0 \text{ для некоторого } 0 < \alpha \leq 2 \quad (1)$$

и

$$r(t) \ln t \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Из (2) следует, что для любого $\delta > 0$

$$\sup_{|t| > \delta} |r(t)| < 1. \quad (3)$$

Целью настоящей работы является доказательство пуассоновской предельной теоремы для случайного точечного процесса a -выходов траекторий процесса $\chi(t)$ за высокий уровень. Говорят, что точка t является a -выходом процесса χ за уровень u , если $\chi(t) = u$ и $\chi(s) < u$ для всех $s \in [t - a, t)$. Обозначим

$$P_X(u, W) = \mathbf{P} \left\{ \max_{t \in W} \chi(t) \leq u \right\} \quad \text{и} \quad \bar{P}_X(u, W) = 1 - P_X(u, W),$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: piter@mech.math.msu.su

** Univerzitet Crne Gore, Prirodno-matematički fakultet, Cetinjski put bb, 81000 Podgorica, Crna Gora, Poštanski 211; e-mail: sins@rc.pmf.cg.ac.yu

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 01-01-00649, 01-01-00644, 00-01-00247).

где $X(t)$, $t \in W$, — случайный процесс или поле. Введем функцию

$$\mu(u) = \frac{2^{(3-n)/2} \sqrt{\pi} H_\alpha}{\Gamma(n/2)} u^{2/\alpha+n-1} \Psi(u),$$

где Γ — гамма-функция и $\Psi(u) = (\sqrt{2\pi}u)^{-1} e^{-u^2/2}$. Константа Пикандса H_α определяется как

$$\lim_{T \rightarrow \infty} H_\alpha(T)/T,$$

$$H_\alpha(T) = \mathbf{E} \exp \left\{ \max_{t \in [0, T]} \sqrt{2} B_{\alpha/2}(t) - |t|^\alpha \right\},$$

где B_h — дробное броуновское движение с показателем Хёрста h . Хорошо известно (см., например, [6]), что $0 < H_\alpha < \infty$. Нам понадобится следующий результат из [6] (следствие 7.3): для любого $T > 0$ имеет место асимптотическое представление

$$\bar{P}_\chi(u, [0, T]) = T\mu(u)(1 + o(1)) \quad \text{при } u \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Пусть $\mathcal{B}$ есть σ -алгебра борелевских подмножеств прямой $\mathbf{R}$ и $\eta_{a,u}(B)$, $B \in \mathcal{B}$, — случайный точечный процесс a -выходов за уровень u траекторий процесса $\chi(t)$. Рассмотрим нормированный точечный процесс

$$\Phi_u(B) := \Phi_{a,u}(B) := \eta_{a,u}(\mu(u)^{-1}B).$$

Пусть $\Phi(\cdot)$ — стандартный пуассоновский процесс на $\mathcal{B}$, т.е., стационарный пуассоновский процесс с единичной интенсивностью. Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 1. Пусть для стационарного процесса $\chi(t)$ выполнены предположения (1) и (2). Тогда для любого $a > 0$ случайный точечный процесс $\Phi_u(B)$, $B \in \mathcal{B}$, слабо сходится при $u \rightarrow \infty$ к стандартному пуассоновскому процессу $\Phi(B)$, $B \in \mathcal{B}$.

Пусть $\mathcal{L}$ — полукольцо конечных полуинтервалов $[t, s)$. Пусть для безгранично делимого точечного процесса $\Phi(B)$ на $\mathcal{B}$ выполнено свойство $\Phi(\partial L) = 0$ с вероятностью единица для всех $L \in \mathcal{L}$. Здесь ∂L — граница L . Теорема Калленберга ([4, теорема 4.7]) гласит, что если для любого $L \in \mathcal{L}$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\Phi_u(L) = 0\} = \mathbf{P}\{\Phi(L) = 0\} \quad \text{и} \quad \limsup_{u \rightarrow \infty} \mathbf{E}\Phi_u(L) \leq \mathbf{E}\Phi(L), \quad (5)$$

то имеет место слабая сходимость

$$\Phi_u(B) \Rightarrow \Phi(B).$$

В следующем пункте мы покажем, что эти соотношения имеют место, если в качестве $\Phi(B)$ выбран пуассоновский процесс; и тем самым искомая слабая сходимость будет доказана.

Рассматривая случайный процесс $\chi(t)$ на бесконечно растущем интервале $t \in [0, T]$, $T \rightarrow \infty$, и выбирая уровень $u = u(T)$ таким образом, чтобы $T\mu(u_T) \rightarrow e^{-x}$, из теоремы 1 можно достаточно легко, пользуясь стандартными рассуждениями, вывести предельную теорему Гнеденко для максимума процесса $\chi(t)$, а именно, справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 имеет место предельное соотношение: для любого x

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \max_{t \in [0, T]} \chi(t) < \frac{x}{a_T} + b_T \right\} = e^{-e^{-x}},$$

где $a_T = \sqrt{2 \ln T}$,

$$b_T = \sqrt{2 \ln T} + \frac{(n/2 - 1 + \alpha) \ln(2 \ln T) + \ln[2^{1-n/2} H_\alpha / \Gamma(n/2)]}{\sqrt{2 \ln T}}.$$

2. Доказательство теоремы 1.

Лемма 1. Интенсивность $\mu_a(u)$ случайного точечного процесса $\eta_{a,u}(B)$ удовлетворяет соотношению $\lim_{u \rightarrow \infty} \mu_a(u)/\mu(u) = 1$.

Доказательство. Поскольку на полуинтервале $I = [0, a/2)$ может находиться не более одного a -выхода, достаточно исследовать асимптотическое поведение вероятности $\mathbf{P}\{\eta_{a,u}(I) > 0\}$ при $u \rightarrow \infty$. Заметим, что $\{\eta_{a,u}(I) > 0\} \subset \{\max_{t \in I} \chi(t) > u\}$. С другой стороны,

$$\{\eta_{a,u}(I) > 0\} \supset \left\{ \max_{t \in (-a, 0)} \chi(t) < u, \max_{t \in I} \chi(t) \geq u \right\}. \quad (6)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \max_{t \in (-a, 0)} \chi(t) < u, \max_{t \in I} \chi(t) \geq u \right\} &= \bar{P}_\chi(u, I) - \mathbf{P} \left(\max_{t \in I} \chi(t) \geq u, \max_{t \in (-a, 0)} \chi(t) \geq u \right) \\ &= \bar{P}_\chi(u, I) - \left[\bar{P}_\chi(u, I) + \bar{P}_\chi(u, (-a, 0)) - \bar{P}_\chi \left(u, \left(-a, \frac{a}{2} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Утверждение леммы следует теперь из того, что выражение в квадратных скобках бесконечно мало при $u \rightarrow \infty$ по сравнению с $\bar{P}_\chi(u, I)$.

Лемма 2. Для любого $L \in \mathcal{L}$ имеет место соотношение

$$\mathbf{P}\{\Phi_u(L) = 0\} = P_\chi(u, h_u L) + o(1) \quad \text{при } u \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Обозначим $L_u = h_u L$, $L \in \mathcal{L}$. Имеем $P_\chi(u, L_u) \leq \mathbf{P}\{\Phi_u(L) = 0\}$. Аналогично соотношению (6) получаем, что

$$\mathbf{P}\{\Phi_u(L) = 0\} \leq P_\chi(u, L_u) + \mathbf{P} \left\{ \max_{t \in L_u} \chi(t) > u, \max_{(L_u \oplus (-a, 0)) \setminus L_u} \chi(t) > u \right\},$$

где $\oplus$ — символ суммирования множеств по Минковскому, т.е. $A \oplus B = \{t + s : t \in A, s \in B\}$. Поскольку множество L состоит из конечного числа интервалов, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \max_{t \in L_u} \chi(t) > u, \max_{(L_u \oplus (-a, 0)) \setminus L_u} \chi(t) > u \right\} &\leq \mathbf{P} \left\{ \max_{(L_u \oplus (-a, 0)) \setminus L_u} \chi(t) > u \right\} \\ &= O \left(u^{n-1+2/\alpha} \Psi(u) \right) = o(1) \end{aligned}$$

при $u \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

Введем гауссовское поле

$$Y(t, \mathbf{v}) = (\mathbf{X}(t), \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n X_j(t) v_j,$$

где $t \in \mathbf{R}$,

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in S_{n-1} := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$

В силу двойственности для любого замкнутого $T \subset \mathbf{R}$

$$\max_{t \in T} \chi(t) = \max_{(t, \mathbf{v}) \in T \times S_{n-1}} Y(t, \mathbf{v}),$$

в частности, $\chi(t) = \max_{\mathbf{v} \in S_{n-1}} Y(t, \mathbf{v})$. Пользуясь неравенством Буняковского, легко показать, что этот максимум достигается в единственной точке сферы S_{n-1} , а именно в точке, являющейся концом отрезка $\mathbf{X}(t)/\|\mathbf{X}(t)\|$.

Лемма 3. Для каждого $L \in \mathcal{L}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $b > 0$, $u_0 > 0$, $K = K(\varepsilon) > 0$ и решетка $\mathcal{R}_{b, u, \varepsilon}$ (конечный набор точек) на цилиндре $L_u \times S_{n-1}$ такие, что для всех $u \geq u_0$, выполнено неравенство

$$P_Y(u, (L_u \times S_{n-1}) \cap \mathcal{R}_b) - P_Y(u, (L_u \times S_{n-1})) \leq K\varepsilon.$$

Доказательство. Покажем, что утверждение леммы справедливо для интервала $L = [0, T]$. Поскольку произвольное L есть объединение конечного числа интервалов, общий случай очевидным образом будет отсюда следовать. Разобьем сферу S_{n-1} на $N(\varepsilon)$ подмножеств $A_1, A_2, \dots, A_{N(\varepsilon)}$ следующим образом. Введем на сфере S_{n-1} полярные координаты,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = S(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}),$$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-2} \in [0, \pi)$, $\varphi_{n-1} \in [0, 2\pi)$, и разделим интервал $[0, \pi]$ на интервалы длины ε (или меньше — для последнего интервала), аналогично поступим с интервалом $[0, 2\pi]$. Эти разбиения порождают разбиение параллелепипеда $[0, \pi]^{n-2} \times [0, 2\pi]$, которое отображается в разбиение $A_1, A_2, \dots, A_{N(\varepsilon)}$ сферы. Теперь займемся построением решетки $\mathcal{R}_{b,u,\varepsilon}$. В каждом из множеств A_j зафиксируем внутреннюю точку и проведем через нее касательную гиперплоскость к цилиндру $[0, T] \times S_{n-1}$. В этой гиперплоскости введем прямоугольные координаты с нулем в точке касания и первым единичным вектором в направлении оси времени t . В построенных таким образом координатных пространствах $\mathbf{R}^n$ рассмотрим решетки

$$\mathcal{R}^j(b) := \mathcal{R}_{b,u,\varepsilon}^{j,P} := (bk_1u^{-2/\alpha}, bk_2u^{-1}, \dots, bk_nu^{-1}), \quad j = 1, 2, \dots, N(\varepsilon),$$

где $(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbf{Z}^n$. Пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что каждая ортогональная проекция множества A_j , $j = 1, 2, \dots, N(\varepsilon)$, на соответствующую касательную гиперплоскость является взаимно однозначной. Обозначим через $\mathcal{R}_{b,u,\varepsilon}^j$ прообраз решетки $\mathcal{R}_{b,u,\varepsilon}^{j,P}$ при таком проектировании. Покажем, что полученная решетка

$$\mathcal{R}_b := \mathcal{R}_{b,u,\varepsilon} := \bigcup_{j=1}^{N(\varepsilon)} \mathcal{R}_{b,u,\varepsilon}^j$$

при подходящем выборе параметров удовлетворяет условиям леммы.

Имеем

$$\begin{aligned} & P_Y(u, (L_u \times S_{n-1}) \cap \mathcal{R}_b) - P_Y(u, L_u \times S_{n-1}) \\ &= \mathbf{P} \left(\bigcap_{j=1}^{N(\varepsilon)} \left\{ \max_{(L_u \times A_j) \cap \mathcal{R}_b} Y(t, \mathbf{v}) \leq u \right\} \cap \bigcup_{j=1}^{N(\varepsilon)} \left\{ \max_{L_u \times A_j} Y(t, \mathbf{v}) > u \right\} \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \mathbf{P} \left\{ \max_{(L_u \times A_j) \cap \mathcal{R}_b} Y(t, \mathbf{v}) \leq u, \max_{L_u \times A_j} Y(t, \mathbf{v}) > u \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Обозначим через A_j^P проекцию A_j на соответствующую гиперплоскость и через $\mathbf{w}$ проекцию произвольной точки $\mathbf{v} \in A_j$ на касательную гиперплоскость. Геометрия сферы позволяет заключить, что

$$\sup_{\substack{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in A_j \\ j=1, 2, \dots, N(\varepsilon)}} \frac{\|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|}{\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|} \geq 1 - 2\varepsilon.$$

Таким образом, из (1) следует, что для любого достаточно малого ε найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для каждого $j = 1, 2, \dots, N(\varepsilon)$ ковариационная функция $r_j((t, \mathbf{w}_1), (s, \mathbf{w}_2))$ гауссовского поля $Z_j(t, \mathbf{w}) = Y(t, \mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in A_j$, удовлетворяет следующему соотношению:

$$\begin{aligned} (1 - 2\varepsilon) \left(|t - s|^\alpha + \frac{1}{2} \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|^2 \right) &\leq 1 - r_j((t, \mathbf{w}_1), (s, \mathbf{w}_2)) \\ &\leq (1 + 2\varepsilon) \left(|t - s|^\alpha + \frac{1}{2} \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|^2 \right), \end{aligned}$$

где $t, s \in [0, \delta(\varepsilon)]$, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in A_j^P$. Разбивая теперь интервал $L_u = [0, h_u T]$ на интервалы длины $\delta(\varepsilon)$ и пользуясь тем, что поле Y однородно относительно временных сдвигов,

получаем, что последняя сумма в (7) не превосходит величины

$$\begin{aligned} & \frac{2\mu(u)^{-1}T}{\delta(\varepsilon)} \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \mathbf{P} \left\{ \max_{([0, \delta(\varepsilon)] \times A_j) \cap \mathcal{A}_b} Y(t, \mathbf{v}) \leq u, \max_{[0, \delta(\varepsilon)] \times A_j} Y(t, \mathbf{v}) > u \right\} \\ &= \frac{2\mu(u)^{-1}T}{\delta(\varepsilon)} \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \mathbf{P} \left\{ \max_{([0, \delta(\varepsilon)] \times A_j^P) \cap \mathcal{A}^j(b)} Z_j(t, \mathbf{w}) \leq u, \max_{[0, \delta(\varepsilon)] \times A_j^P} Z_j(t, \mathbf{w}) > u \right\}. \quad (8) \end{aligned}$$

Введем гауссовское однородное поле $\xi(t, \mathbf{w})$, $t \in \mathbf{R}$, $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^{n-1}$, с нулевым средним и ковариационной функцией $\rho(t, \mathbf{w}) = e^{-|t|^\alpha - \|\mathbf{w}\|^2/2}$. Нам понадобится следующий оператор поординатного умножения вектора на множество. Пусть A — множество в $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{b}$ — вектор с положительными координатами. Полагаем

$$\mathbf{b}A := \left(\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : \left(\frac{x_1}{b_1}, \dots, \frac{x_n}{b_n} \right) \in A \right).$$

В силу неравенства Слепяна правая часть (8) не превосходит величины

$$\begin{aligned} & \frac{2\mu(u)^{-1}T}{\delta(\varepsilon)} \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \mathbf{P} \left\{ \max_{\mathbf{c}(-\varepsilon)[([0, \delta(\varepsilon)] \times A_j^P) \cap \mathcal{A}^j(b)]} \xi(t, \mathbf{w}) \leq u \right\} \\ & \quad - \mathbf{P} \left\{ \max_{\mathbf{c}(+\varepsilon)[([0, \delta(\varepsilon)] \times A_j^P)]} \xi(t, \mathbf{w}) \leq u \right\} \\ & \leq \frac{2\mu(u)^{-1}T}{\delta(\varepsilon)} \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \mathbf{P} \left\{ \max_{\mathbf{c}(-\varepsilon)[([0, \delta(\varepsilon)] \times A_j^P) \cap \mathcal{A}^j(b)]} \xi(t, \mathbf{w}) \leq u, \right. \\ & \quad \left. \max_{\mathbf{c}(-\varepsilon)[([0, \delta(\varepsilon)] \times A_j^P)]} \xi(t, \mathbf{w}) > u \right\} \\ & \quad + \frac{2\mu(u)^{-1}T}{\delta(\varepsilon)} \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \left[\mathbf{P} \left\{ \max_{\mathbf{c}(-\varepsilon)[([0, \delta(\varepsilon)] \times A_j^P)]} \xi(t, \mathbf{w}) \leq u \right\} \right. \\ & \quad \left. - \mathbf{P} \left\{ \max_{\mathbf{c}(+\varepsilon)[([0, \delta(\varepsilon)] \times A_j^P)]} \xi(t, \mathbf{w}) \leq u \right\} \right], \quad (9) \end{aligned}$$

где $\mathbf{c}(\pm\varepsilon) = ((1 \pm 2\varepsilon)^{1/\alpha}, (1 \pm 2\varepsilon)^{1/2}, \dots, (1 \pm 2\varepsilon)^{1/2})$ и положительное ε достаточно мало.

Оценим сначала вторую сумму в правой части неравенства (9). В силу леммы 6.1 [6], для всех достаточно больших u найдутся константы $C_1 = C_1(\varepsilon)$ и $C_2 = C_2(\varepsilon)$ такие, что эта сумма не превосходит величины

$$\frac{2\mu(u)^{-1}T}{\delta(\varepsilon)} C_1 u^{n+2/\alpha-1} \Psi(u) \delta(\varepsilon) \cdot \varepsilon \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} V(A_j^P) \leq C_2 \varepsilon,$$

где V — объем множества соответствующей размерности. Рассмотрим теперь первую сумму в правой части (9). Обозначим

$$\mathbf{g}_u = ((1 - 2\varepsilon)^{1/\alpha} u^{-2/\alpha}, (1 - 2\varepsilon)^{1/2} u^{-1}, \dots, (1 - 2\varepsilon)^{1/2} u^{-1}),$$

$S = bN$, N — целое, $K = [0, S]^n$. Поскольку поле ξ однородно, то, разбивая множество $\mathbf{c}(-\varepsilon)[([0, \delta(\varepsilon)] \times A_j)$ на параллелепипеды, равные $\mathbf{g}_u K$, получаем, что эта сумма не превосходит

$$\frac{2\mu(u)^{-1}T}{\delta(\varepsilon)} \frac{\delta(\varepsilon)}{S^n u^{1-n-2/\alpha}} \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \mathbf{P} \left\{ \max_{\mathbf{g}_u [K \cap \mathcal{A}^j(b)]} \xi(t, \mathbf{w}) \leq u, \max_{\mathbf{g}_u K} \xi(t, \mathbf{w}) > u \right\} V(A_j^P). \quad (10)$$

Пусть $\theta(t, \mathbf{w})$, $t \in \mathbf{R}$, $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^{n-1}$, — гауссовское поле,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \theta(t, \mathbf{w}) &= (1 - 2\varepsilon) \left(|t|^\alpha + \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 \right), \\ \mathbf{D}(\theta(t, \mathbf{w}_1) - \theta(s, \mathbf{w}_2)) &= 2(1 - 2\varepsilon) \left(|t - s|^\alpha + \frac{1}{2} \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|^2 \right). \end{aligned}$$

Следуя преобразованиям, приведенным в доказательстве леммы 6.1 из [6], можно показать, что

$$\begin{aligned} &\lim_{u \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi} u e^{u^2/2} \mathbf{P} \left\{ \max_{\mathbf{g}_u[K \cap \mathcal{R}(b)]} \xi(t, \mathbf{w}) \leq u, \max_{\mathbf{g}_u K} \xi(t, \mathbf{w}) > u \right\} \\ &= \int_0^\infty e^s \mathbf{P} \left\{ \max_K \theta(t, \mathbf{w}) > s, \max_{K \cap b\mathbf{Z}^n} \theta(t, \mathbf{w}) \leq s \right\} ds. \end{aligned}$$

Рассмотрим версию поля θ с п.н. непрерывными траекториями, тогда вероятность под интегралом стремится к нулю при $b \rightarrow 0$ для всех s и фиксированного $S = bN$. Пользуясь теоремой о мажорируемой сходимости, получаем, что и интеграл также стремится к нулю при $b \rightarrow 0$. Итак, для всех достаточно больших u и всех достаточно малых b первая сумма в правой части (9) не превосходит ε . Лемма доказана.

Пусть $L \in \mathcal{L}$ и число T столь большое, что $L \subset [0, T]$. Пусть δ — положительное число. Разобьем интервал $[0, h_u T]$ на интервалы длины единица, перемежающиеся интервалами длины δ . Обозначим через N — число всех таких единичных интервалов и через π_u — объединение этих интервалов. Также обозначим через λ_u объединение всех интервалов длины единица, содержащихся в L_u .

Лемма 4. Для произвольного $L \in \mathcal{L}$ положительной меры, $\mu(L) > 0$, и любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех достаточно больших u

$$P_\chi(u, \lambda_u \cap \mathcal{R}(b)) - P_\chi(u, L_u \cap \mathcal{R}(b)) \leq \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $L \subset [0, T]$. Пользуясь (4), имеем для всех достаточно больших u :

$$\begin{aligned} P_\chi(u, \lambda_u \cap \mathcal{R}(b)) - P_\chi(u, L_u \cap \mathcal{R}(b)) &= \mathbf{P} \left\{ \max_{\lambda_u \cap \mathcal{R}(b)} \chi(t) \leq u, \max_{L_u \cap \mathcal{R}(b)} \chi(t) > u \right\} \\ &\leq \bar{P}_\chi(u, L_u \setminus \lambda_u) \leq 2 \frac{\mu(u)^{-1} T}{1 + \delta} \bar{P}_\chi(u, [0, \delta]) \leq 3 \frac{\mu(u)^{-1} T}{1 + \delta} \delta \mu(u) = \frac{\delta T}{1 + \delta} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

где подходящий выбор δ очевиден. Лемма доказана.

Обозначим через K_j , $j = 1, 2, \dots$, интервалы длины единица, содержащиеся в π_u (напомним, что они перемежаются интервалами длины δ). Рассмотрим набор независимых копий $Y_j(t, \mathbf{v})$ гауссовского поля $Y(t, \mathbf{v})$, $(t, \mathbf{v}) \in K_j \times S_{n-1}$, $j = 1, 2, \dots$, и введем гауссовское случайное поле

$$Y_0(t, \mathbf{v}) = Y_j(t, \mathbf{v}) \quad \text{для } (t, \mathbf{v}) \in K_j \times S_{n-1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Лемма 5. Для всех $L \in \mathcal{L}$ имеем $P_Y(u, (\lambda_u \times S_{n-1}) \cap \mathcal{R}_b) - P_{Y_0}(u, (\lambda_u \times S_{n-1}) \cap \mathcal{R}_b) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$.

Доказательство. Обозначим для сокращения записи $S(i, j) = \{(t, \mathbf{v}_1) \in (K_i \times S_{n-1}) \cap \mathcal{R}_b, (s, \mathbf{v}_2) \in K_j \times S_{n-1} \cap \mathcal{R}_b\}$. Пользуясь неравенством Бермана (см. [6]), получаем, что

$$\begin{aligned} &\left| P_Y(u, (\lambda_u \times S_{n-1}) \cap \mathcal{R}_b) - P_{Y_0}(u, (\lambda_u \times S_{n-1}) \cap \mathcal{R}_b) \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{(t, \mathbf{v}_1), (s, \mathbf{v}_2) \in (\lambda_u \times S_{n-1}) \cap \mathcal{R}_b \\ (t, \mathbf{v}_1) \neq (s, \mathbf{v}_2)}} \left| r_Y((t, \mathbf{v}_1), (s, \mathbf{v}_2)) - r_{Y_0}((t, \mathbf{v}_1), (s, \mathbf{v}_2)) \right| \\ &\quad \times \int_0^1 (1 - r_h((t, \mathbf{v}_1), (s, \mathbf{v}_2)))^{-1/2} \exp \left(- \frac{u^2}{1 + r_h((t, \mathbf{v}_1), (s, \mathbf{v}_2))} \right) dh \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{i \neq j} \sum_{S(i,j)} |r_Y((t, \mathbf{v}_1), (s, \mathbf{v}_2))| \\ \times \int_0^1 (1 - hr_Y((t, \mathbf{v}_1), (s, \mathbf{v}_2)))^{-1/2} \exp \left(- \frac{u^2}{1 + hr_Y((t, \mathbf{v}_1), (s, \mathbf{v}_2))} \right) dh,$$

где $r_h((t, \mathbf{v}_1), (s, \mathbf{v}_2)) = hr_Y((t, \mathbf{v}_1), (s, \mathbf{v}_2)) + (1-h)r_{Y_0}((t, \mathbf{v}_1), (s, \mathbf{v}_2))$, $t, s \in \mathbf{R}$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in S_{n-1}$, r_Y — ковариационная функция поля Y , r_{Y_0} — ковариационная функция поля Y_0 . Покажем, что последняя сумма стремится к нулю. Из неравенства

$$r_Y((t, \mathbf{v}_1), (s, \mathbf{v}_2)) = r(t-s) \left(1 - \frac{1}{2} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|^2 \right)$$

и условия (3) следует, что найдется γ_2 , $0 < \gamma_2 < 1$, такое, что $|r_Y((t, \mathbf{v}_1), (s, \mathbf{v}_2))| \leq 1 - \gamma_2$ при $|t-s| \geq \delta$. Сначала рассмотрим «не слишком далеко отстоящие» друг от друга t и s , т.е. такие, что $t \in K_i$, $s \in K_j$ и $d(K_i, K_j) \leq \mu(u)^{-\gamma_1}$, где $\gamma_1 \in (0, 1 + \frac{1}{2}\gamma_2)$. (Полагаем $d(K_i, K_j) := \sup\{|t-s|: t \in K_i, s \in K_j\}$.) Обозначая через Σ_1 эту часть суммы по $t, s, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, получаем, что

$$\Sigma_1 \leq C_1 \sum_{i \neq j} \sum_{S(i,j)} \exp \left(- \frac{u^2}{1 + |r_Y((t, \mathbf{v}_1), (s, \mathbf{v}_2))|} \right) \\ d(K_i, K_j) \leq \mu(u)^{-\gamma_1} \\ \leq C_2 \sum_{i \neq j} \sum_{S(i,j)} \exp \left(- \frac{u^2}{2} \left(1 + \frac{\gamma_2}{2} \right) \right) \\ d(K_i, K_j) \leq \mu(u)^{-\gamma_1} \\ = O \left(\mu(u)^{-1} \varepsilon^{n(n-1)/2} u^{n-1+2/\alpha} \mu(u)^{-\gamma_1} u^{n-1+2/\alpha} \varepsilon^{n(n-1)/2} e^{-(u^2/2)(1+\gamma_2/2)} \right) = o(1)$$

при $u \rightarrow \infty$, где C_1 и C_2 — некоторые константы. В этих преобразованиях мы пользовались тем, что объем каждого A_j имеет порядок $\varepsilon^{n(n-1)/2}$ для малых ε .

Обратимся теперь к тем $t, s, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, для которых $d(K_i, K_j) \geq \mu(u)^{-\gamma_1}$, $t \in K_i$, $s \in K_j$. Обозначим соответствующую сумму через Σ_2 . В силу (2) имеем в этом случае, что

$$\sup_{|t-s| \geq \mu(u)^{-\gamma_1}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in S_{n-1}} |r_Y((t, \mathbf{v}_1), (s, \mathbf{v}_2))| =: \kappa(u) = o(u^{-2})$$

при $u \rightarrow \infty$, т.е.

$$\Sigma_2 \leq C_3 \kappa(u) \sum_{i \neq j} \sum_{S(i,j)} \exp \left(- \frac{u^2}{1 + |r_Y((t, \mathbf{v}_1), (s, \mathbf{v}_2))|} \right) \\ d(K_i, K_j) \geq \mu(u)^{-\gamma_1} \\ \leq C_4 \kappa(u) e^{-u^2} \sum_{i \neq j} \sum_{S(i,j)} \exp \left(- \frac{|r_Y((t, \mathbf{v}_1), (s, \mathbf{v}_2))| u^2}{1 + |r_Y((t, \mathbf{v}_1), (s, \mathbf{v}_2))|} \right) \\ d(K_i, K_j) \geq \mu(u)^{-\gamma_1} \\ = O \left(\left(\mu(u)^{-1} \varepsilon^{n(n-1)/2} u^{n-1+2/\alpha} \right)^2 \kappa(u) e^{-u^2} \right) = O(u^2 \kappa(u)) = o(1)$$

при $u \rightarrow \infty$, где C_3 и C_4 — некоторые постоянные. Итак, лемма доказана.

Замеим теперь, что утверждение леммы 2 остается справедливым и для поля Y_0 , с тем же выбором решетки. Пусть N — число единичных интервалов, из которых состоит λ_u . Легко видеть, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется достаточно малое положительное δ такое, что $|N\mu(u) - V(L)| \leq \varepsilon$, $V(\cdot)$ в данном случае — длина. Отсюда получаем, что

$$P_{Y_0}(u, \lambda_u \times S_{n-1}) = (1 - \overline{P}_{Y_0}(u, \lambda_u \times S_{n-1}))^N \rightarrow e^{-V(L)}.$$

Итак, мы доказали первое соотношение в (5). Второе соотношение в (5) очевидно следует из эквивалентности $\mu(u)$ и $\mu_a(u)$ при $u \rightarrow \infty$, которое доставляет лемма 1, т.е., $\lim_{u \rightarrow \infty} \mathbf{E} \Phi_u(L) = \mathbf{E} \Phi(L)$, где Φ — пуассоновский точечный процесс на $\mathcal{L}$. Итак, теорема 1 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adler R. J. On excursion sets, tube formulas and maxima of random fields. — Ann. Appl. Probab., 2000, v. 10, № 1, p. 1–74.
2. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы, М.: Мир, 1969, 398 с.
3. Illsley R. The excursions of a stationary Gaussian process outside a large two-dimensional region. — Adv. Appl. Probab., 2001, v. 33, p. 141–159.
4. Kallenberg O. Random Measures. Berlin/London: Akademie-Verlag/Academic Press, 1983, 187 p.
5. Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989, 187 с.
6. Piterbarg V. I. Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields. AMS, Providence, 1996, 296 p.
7. Рукавов А. А. Пуассоновость распределения числа выходов за высокий уровень огибающей гауссовского стационарного процесса. Депонировано ВИНТИ, 28.10.01 N2142-B2001, 23 с.

Поступила в редакцию
12.XI.2002

© 2003 г.

ТИМАШЕВ А. Н.*

СЛУЧАЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ С ИЗВЕСТНЫМ ЧИСЛОМ КОМПОНЕНТ

Рассматривается класс всех однозначных отображений n -элементного множества в себя, имеющих каждое ровно N компонент связности. В предположении, что на этом классе задано равновероятное распределение и $n, N \rightarrow \infty$, получены асимптотики математического ожидания и дисперсии и доказаны пуассоновские и локальная нормальная теоремы для случайной величины, равной количеству компонент заданного объема в случайно выбранном отображении. Найдены асимптотические оценки для числа таких отображений с N компонентами, имеющих ровно k компонент фиксированного объема.

Ключевые слова и фразы: случайные отображения, локальная предельная теорема, асимптотические оценки, компоненты.

Рассмотрим класс всех однозначных отображений n -элементного множества в себя, имеющих каждое ровно N компонент связности. Число таких отображений равно (см. [1, с. 80]) $a(n, N)$, где

$$\begin{aligned} a(n, N) &= \frac{n!}{N!} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_N = n \\ k_1, \dots, k_N \in \mathbf{N}}} a_{k_1} \dots a_{k_N} \\ &= \frac{n!}{N!} \frac{(A(x))^N}{x^n} \mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_N = n\}, \quad N = 1, \dots, n; \end{aligned} \quad (1)$$

$$a_k = \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{k^m}{m!}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (2)$$

$$A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \ln \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{k!} x^k \right); \quad (3)$$

* Академия ФСБ, Мичуринский просп., 70, 117602 Москва, Россия.