Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Р. Багдасаров, Е. И. Островский, Экспоненциальные доверительные интервалы при непараметрическом оценивании плотности, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 4, 813–818

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2598>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 13:26:47

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 1997 г. БАГДАСАРОВ Д. Р., ОСТРОВСКИЙ Е. И.*

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ
ИНТЕРВАЛЫ ПРИ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОМ
ОЦЕНИВАНИИ ПЛОТНОСТИ

В статье выводятся двусторонние экспоненциальные границы доверительной вероятности для неизвестной плотности распределения при правильной на классах Гёльдера нормировке в минимаксном смысле.

Ключевые слова и фразы: экспоненциальная оценка, минимаксный доверительный интервал, преобразование Юнга-Фенхеля.

0. Введение. Пусть $\{\xi_i\}$ — выборка объема n из распределения с плотностью $f(x)$, принадлежащей классу функций $\Sigma(\beta, L)$ [1, с. 316], где $\Sigma(\beta, L)$ — множество k раз дифференцируемых функций таких, что для $x, y \in \mathbb{R}^1$ верно неравенство $|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)| \leq L|x - y|^\alpha$, где $\beta = k + \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, $k \geq 0$ — целое. Введем обозначения:

$$P(n, f, f_n, \beta, u) = P\left\{n^\gamma |f_n(x) - f(x)| > u\right\}, \quad u \geq 2; \quad \gamma = \frac{\beta}{2\beta + 1};$$

$$P_\beta(u) = \inf_{f_n} \sup_{n \geq 2} \sup_{f \in \Sigma(\beta, L)} P(n, f, f_n, \beta, u),$$

f_n — произвольная оценка плотности f , построенная по выборке объема n .

Информация о вероятности $P_\beta(u)$ представляет определенный интерес при построении минимаксного доверительного интервала для неизвестной плотности $f(x)$.

1. Основной результат.

Теорема. Для вероятности $P_\beta(u)$ верны экспоненциальные оценки:

$$C_1 \exp\left(-C_2 u^{\nu(\beta)}\right) \leq P_\beta(u) < C_3 \exp\left(-C_4 u^{\mu(\beta)}\right), \quad u > 1,$$

где C_i — «конструктивные» конечные положительные константы, зависящие от β, L , но не зависящие от u, n , и необязательно одни и те же в различных местах,

$$\nu(\beta) = \frac{(2\beta + 1)(\beta + 2)}{\beta^2}, \quad \mu(\beta) = \frac{2\beta + 1}{\beta + 1}.$$

З а м е ч а н и е 1. Постановкой и обсуждением данной задачи авторы обязаны И. А. Ибрагимову, за что выражают ему благодарность.

*Обнинский институт атомной энергии, Студгородок, 1, 249020 Обнинск, Россия.

2. Вспомогательные факты. Доказательству предположим несколько вспомогательных результатов, представляющих, на наш взгляд, самостоятельный интерес.

Лемма 1. Пусть ξ — случайная величина такая, что для всех достаточно больших $\lambda > \Lambda > 1$ верны неравенства

$$\exp \varphi(\lambda) \leq E \exp(\lambda \xi) \leq \exp \psi(\lambda). \quad (1)$$

Положим $G(x) = P\{\xi > x\}$ при $x > 2$. Тогда: 1) имеет место оценка

$$G(x) \leq \exp(-\psi^*(x)), \quad \psi^*(x) = \sup_{\lambda > 0} (\lambda x - \psi(\lambda)), \quad (2)$$

($\psi^*(x)$ представляет собой преобразование Юнга-Фенхеля функции $\psi(\lambda)$);

2) если функция $\psi(\lambda)$ выпукла, непрерывно дифференцируема и $\psi(\lambda)/\lambda \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$, то

$$G(x_-) > \exp(-\lambda x_+) \left(\exp \varphi(\lambda) - Z(x_-, \lambda) + Z(x_+, \lambda) \right), \quad (3)$$

где

$$Z(x, \lambda) = \frac{\lambda \exp S(\lambda, x)}{S'_x(\lambda, x)}, \quad S(\lambda, x) = \lambda x - \psi^*(x), \quad x_0 = v^{-1}(\lambda), \\ v(\lambda) = \frac{d\psi^*(\lambda)}{d\lambda},$$

x_+, x_- — любые положительные числа такие, что $x_- < x_0, x_+ > x_0$.

Доказательство леммы 1. Первое утверждение леммы, неравенство (2), является простым следствием неравенства Маркова-Чебышева и хорошо известно [2]. Выведем нижнюю оценку (3). Интегрируя по частям, запишем момент $E \exp(\lambda \xi)$ через интеграл и разобьем его на три:

$$E \exp(\lambda \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \exp(\lambda x) G(x) dx = I_1 + I_2 + I_3,$$

где $I_1 = \int_{-\infty}^{x_-}$, $I_2 = \int_{x_-}^{x_+}$, $I_3 = \int_{x_+}^{\infty}$.

Заметим, что функция $S(x, \lambda)$ вогнута по переменной x и достигает максимума при $x = x_0$, поэтому $dS(\lambda, x)/dx > 0$, $x < x_0$, $dS(\lambda, x)/dx < 0$, $x > x_0$. Оценим получившиеся интегралы, пользуясь верхней оценкой (2) и вогнутостью функции $S(x, \lambda)$:

$$I_1 \leq \int_{-\infty}^{x_-} \lambda \exp \left(S(\lambda, x_-) + S'_x(\lambda, x_-)(x - x_-) \right) dx = Z(x_-, \lambda).$$

Аналогично $I_3 \leq -Z(x_+, \lambda)$.

Оценим теперь интеграл I_2 . Используя монотонность функции $G(x)$, имеем:

$$I_2 = \int_{x_-}^{x_+} \lambda G(x) \exp(\lambda x) dx \leq \int_{x_-}^{x_+} \lambda G(x_-) \exp(\lambda x) dx < G(x_-) \exp(\lambda x_+).$$

Таким образом,

$$\exp \varphi(\lambda) \leq E \exp(\lambda \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \exp(\lambda x) G(x) dx \\ \leq Z(x_-, \lambda) - Z(x_+, \lambda) + G(x_-) \exp(\lambda x_+).$$

Выражая отсюда $G(x_-)$, получаем утверждение леммы 1.

Следствие 1. Пусть при всех достаточно больших $\lambda > \Lambda > 1$ верно неравенство $\exp(C_1 \lambda^{p_1}) \leq E \exp(\lambda \xi) \leq \exp(C_2 \lambda^{p_2})$, где p_1, p_2 — такие постоянные, что $1 < p_1 < p_2 < \infty$. Тогда для всех достаточно больших $u > u_0 > 1$ верна экспоненциальная оценка

$$G(u) \geq \exp\left(-Cu^{p_2/(p_1-1)}\right), \quad C = C(p_1, p_2, C_1, C_2). \quad (4)$$

Доказательство будет использовать доказанную выше лемму 1. Вначале заметим, что в рассматриваемом случае $\varphi(\lambda) = C_1 \lambda^{p_1}$, $\psi(\lambda) = C_2 \lambda^{p_2}$, так что $\psi^*(x) = C_3 x^{q_2}$, $\varphi^*(x) = C_4 x^{q_1}$, где $C_3 = (p_2 - 1) p_2^{-q_2} C_2^{1-q_2}$, $q_i = p_i / (p_i - 1)$, $i = 1, 2$. Выберем теперь $x_- = \gamma_- \lambda^{p_1-1}$, $x_+ = \gamma_+ \lambda^{p_2-1}$, где γ_- — достаточно малая, а γ_+ — достаточно большая положительные постоянные. Вычисляя $Z(x_{\pm}, \lambda)$, находим, что

$$Z(x_-, \lambda) = \frac{\lambda \exp(\gamma_- \lambda^{p_1} - C_3 \gamma_-^{q_2} \lambda^{(p_1-1)(q_2-1)})}{\lambda - C_3 q_2 \gamma_-^{q_2-1} \lambda^{(q_2-1)(p_1-1)}}.$$

Поскольку $q_1 > q_2$, находим: $(p_1 - 1)(q_2 - 1) < (p_1 - 1)(q_1 - 1) = (p_1 - 1)/(p_1 - 1) = 1$, и поэтому при достаточно больших λ имеем: $Z(x_-, \lambda) \sim \exp(\gamma_- \lambda^{p_1})$.

Вычислим теперь $Z(x_+, \lambda)$:

$$\begin{aligned} Z(x_+, \lambda) &= \frac{\lambda \exp(\gamma_+ \lambda^{p_2} - C_3 \gamma_+^{q_2} \lambda^{(p_2-1)q_2})}{\lambda - C_3 q_2 \gamma_+^{q_2-1} \lambda^{(p_2-1)(q_2-1)}} \\ &= (1 - C_3 q_2 \gamma_+^{q_2-1})^{-1} \exp\left(\gamma_+ \lambda^{p_2} - C_3 \gamma_+^{q_2} \lambda^{p_2}\right). \end{aligned}$$

Выберем $\gamma_+ > C_3^{1-p_2}$; тогда $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} Z(x_+, \lambda) = 0$.

Таким образом, при всех достаточно больших λ имеем:

$$G(x_-) \geq \exp\left(-\gamma_+ \lambda^{p_2}\right) \left(\exp(C_1 \lambda^{p_1}) - \exp(\gamma_- \lambda^{p_1})\right).$$

Делая замену переменных $u = x_- = \gamma_- \lambda^{p_2-1}$ и оставляя главный член в правой части неравенства, приходим к утверждению следствия.

Обобщим лемму 1 на случай семейства случайных величин $\{\xi_\alpha\}$, распределение которых зависит от произвольного параметра α из некоторого множества A .

Лемма 2. Пусть при всех достаточно больших $\lambda > \Lambda > 1$ верно неравенство:

$$\exp \varphi(\lambda) \leq \sup_{\alpha \in A} E \exp(\lambda \xi_\alpha) \leq \exp \psi(\lambda), \quad (5)$$

где функции $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ удовлетворяют тем же условиям, что и в лемме 1. Обозначим $H(x) = \sup_{\alpha \in A} P\{\xi_\alpha > x\}$. Тогда для $H(x)$ справедливы оценки вида (2), (3).

Доказательство. Неравенство $P\{\xi_\alpha > x\} \leq \exp(-\psi^*(x))$ верно для всех значений $\alpha \in A$, поэтому

$$H(x) = \sup_{\alpha \in A} P\{\xi_\alpha > x\} \leq \exp\left(-\psi^*(x)\right). \quad (6)$$

Выведем теперь нижнюю оценку. Повторяя те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 1, выводим:

$$\begin{aligned} \exp \varphi(\lambda) &\leq \sup_{\alpha \in A} E \exp(\lambda \xi_\alpha) = \sup_{\alpha \in A} \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\lambda x) G_\alpha(x) dx \\ &\leq \sup_{\alpha \in A} \lambda \left(\int_{-\infty}^{x_-} + \int_{x_-}^{x_+} + \int_{x_+}^{\infty} \right) = \sup_{\alpha} (I_1 + I_2 + I_3). \end{aligned} \quad (7)$$

Интегралы I_1 и I_3 оцениваются аналогично тому, как это сделано при доказательстве леммы 1, благодаря равномерной верхней оценке (6). Оценим теперь интеграл I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &= \sup_{\alpha} \lambda \int_{x_-}^{x_+} \exp(\lambda x) G_{\alpha}(x) dx \leq \sup_{\alpha} \lambda \int_{x_-}^{x_+} \exp(\lambda x) G_{\alpha}(x_-) dx \\ &\leq \exp(\lambda x_+) \sup_{\alpha} G_{\alpha}(x_-) = \exp(\lambda x_+) H(x_-). \end{aligned}$$

Подставляя значения оцененных интегралов в неравенство (7) и выражая отсюда $H(x_-)$, получаем экспоненциальную оценку (5).

З а м е ч а н и е 2. Аналогично следствию 1 рассматривается случай, когда для семейства случайных величин $\{\xi_{\alpha}\}$ верны условия леммы 2 с функциями $\varphi(\lambda) = C_1 \lambda^{p_1}$, $\psi(\lambda) = C_2 \lambda^{p_2}$, $1 < p_1 < p_2$. При этом для функции $H(x)$ справедливо неравенство вида (4).

3. Доказательство теоремы. Для доказательства применим лемму 2. При выводе верхней оценки в качестве $f_n(x)$ возьмем ядерную, или оценку Парзена-Розенблатта с ядром $V = V(x)$, удовлетворяющим условиям, указанным в [1, с. 316–317]: $V(x) = 0$, $|x| > 1$;

$$\int_{-1}^1 V(x) dx = 1; \quad \int_{-1}^1 x^j V(x) dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k;$$

$$|V(x) - V(y)| \leq C|x - y|.$$

Тогда можно показать [3], [4], что

$$M = \mathbb{E} \exp \left(\lambda n^{\gamma} (f_n - f) \right) \leq \exp \left(C|\lambda|^{(2\beta+1)/\beta} \right). \quad (8)$$

Оценим теперь M снизу. Для этого воспользуемся идеей, предложенной, например, в [1, с. 321], где доказано, что

$$\begin{aligned} \sup_n \sup_{f \in \Sigma(\beta, L)} \mathbb{E} w \left(n^{\gamma} (f_n(0) - f(0)) \right) &\geq J, \\ J &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_D w \left(x g(0) J_0^{-1/2} \right) e^{-x^2/2} dx \\ &= C \int_D w \left(x g(0) J_0^{-1/2} \right) e^{-x^2/2} dx, \quad D = \left\{ x, |x| < J_0^{1/2} \kappa^{-\beta/2} \right\}, \\ J_0 &= \kappa^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g^2(y) dy}{f_0(0)}, \end{aligned} \quad (9)$$

где κ — достаточно малая величина, $f_0(x)$ — любая плотность из множества $\Sigma(\beta, L/2)$, отличная от нуля при всех $x \in \mathbb{R}^1$, $g(x) \in \Sigma(\beta, L/2)$; $g(x) = 0$, $|x| > 1$; $\int_{-1}^1 g(x) dx = 0$, $g(0) > 0$; $w(x)$ — произвольная четная монотонная на правой полупрямой, не равная тождественно нулю функция такая, что $w(0) = 0$.

В дальнейшем функции $f_0(x)$ и $g(x)$ считаем фиксированными, в качестве $w(x)$ выберем $w(x) = \text{ch}(\lambda x) - 1$, $\lambda > 0$, а величину κ полагаем равной

$$\kappa = 0.5 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g^2(y) dy}{f_0(0)} \right)^{2/(2+\beta)} \lambda^{-2/(2+\beta)} = \Delta \lambda^{-2/(2+\beta)}.$$

Оценим теперь интеграл J . Заметим, что $J_0^{1/2} \kappa^{-\beta/2} = C_1 \kappa^{-(1+\beta)/2}$. Делая замену переменных $x = y C_1 \kappa^{-(1+\beta)/2}$, сводим интеграл J к интегралу вида

$$\begin{aligned} J &= C \kappa^{-(1+\beta)/2} \int_{-1}^1 \left(\operatorname{ch}(C_2 \lambda y \kappa^{-\beta/2}) - 1 \right) \exp \left(-C_1^2 y^2 \frac{\kappa^{-1-\beta}}{2} \right) dy \\ &= C \kappa^{-(1+\beta)/2} \int_{-1}^1 \operatorname{ch}(C_2 \lambda y \kappa^{-\beta/2}) \exp \left(-C_1^2 y^2 \frac{\kappa^{-1-\beta}}{2} \right) dy - J_1, \\ J_1 &= C \kappa^{-(1+\beta)/2} \int_{-1}^1 \exp \left(-C_1^2 y^2 \frac{\kappa^{-1-\beta}}{2} \right) dy. \end{aligned}$$

С помощью метода Лапласа [5, с. 29] легко показать, что при $\lambda \rightarrow \infty$

$$J_1 \sim C_3 \lambda^{-(1+\beta)/(2+\beta)}, \quad C_3 > 0. \quad (10)$$

Поскольку $\operatorname{ch}(\lambda x) \sim \exp(\lambda x)/2$ при достаточно больших λ и всех положительных значениях x , то имеет место асимптотическая эквивалентность:

$$J \sim C \kappa^{-(1+\beta)/2} \int_0^1 \exp \left(\lambda g(0) y \kappa^{-\beta/2} - C_1^2 y^2 \frac{\kappa^{-\beta-1}}{2} \right) dy - J_1 = J_2 - J_1. \quad (11)$$

Интеграл J_2 также можно оценить методом Лапласа:

$$\ln J_2 \sim \max_{y \in [0,1]} N(\lambda, y), \quad N(\lambda, y) = \lambda g(0) y \kappa^{-\beta/2} - C_1^2 y^2 \frac{\kappa^{-1-\beta}}{2}.$$

Учитывая, что $\kappa = \Delta \lambda^{-2/(2+\beta)}$, заметим, что при нашем выборе константы Δ

$$\max_{y \in [0,1]} N(\lambda, y) = C_4 \lambda^{2(1+\beta)/(2+\beta)}, \quad C_4 > 0,$$

поэтому с учетом (9)–(11) выводим при всех достаточно больших значений λ :

$$J \geq C_5 \lambda^{-C_6} \exp \left(C_4 \lambda^{2(1+\beta)/(2+\beta)} \right) - J_1 \geq C_7 \exp \left(C_8 \lambda^{2(1+\beta)/(2+\beta)} \right).$$

Теперь осталось воспользоваться леммой 2, в которой положим

$$\xi_\alpha = n^\gamma |f_n(x) - f(x)|, \quad \alpha = \{x, n, f\},$$

и соответственно (см. замечание 1 к лемме 2) $p_1 = 2(1+\beta)/(2+\beta)$, $p_2 = (2\beta+1)/\beta$. Подставляя в неравенство (4), приходим к утверждению теоремы.

З а м е ч а н и е 3. При $\beta \rightarrow \infty$ имеем: $\nu(\beta) \rightarrow 2$, $\mu(\beta) \rightarrow 2$, что свидетельствует о точности нашей оценки при большой гладкости функции f . При малых значениях β вопрос о точности теоремы остается открытым.

З а м е ч а н и е 4. Результат, аналогичный нашему, справедлив и для построения доверительного интервала в других метриках. К примеру, при оценивании плотности $f(x)$ в равномерной норме $\|g(x)\|_c = \sup_{x \in \mathbb{R}^1} |g(x)|$ в естественной нормировке для вероятности

$$Q_\beta(u) = \inf_{f_n} \sup_{n \geq 2} \sup_{f \in \Sigma(\beta, L)} \mathbf{P} \left\{ \left(\frac{n}{\ln n} \right)^\gamma \|f_n(x) - f(x)\|_c > u \right\}$$

также справедливо утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е 5. Было бы интересно получить утверждение, аналогичное нашему, для так называемых адаптивных оценок плотности распределения, т.е. оценок, не зависящих от априорного класса гладкости $\Sigma(\beta, L)$. Ядерная оценка таковой не является, однако в последнее время такие оценки начали появляться (см. [6]–[8]), причем их скорость сходимости совпадает с оптимальной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979, 528 с.
2. Козаченко Ю. В., Островский Е. И. Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских. — Теория вероятн. и матем. статист., (Киев, КГУ) 1985, в. 32, с. 43–52.
3. Казбарас А. Неравенства экспоненциального типа для некоторых статистических оценок плотности распределения. — Литов. матем. сб., 1981, т. 21, в. 4, с. 149–158.
4. Рудзис Р. О распределении функционалов типа супремума от непараметрических оценок плотности распределения и спектральной плотности. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 2, с. 254–267.
5. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1986, 492 с.
6. Бобров П. Б., Островский Е. И. Адаптивное оценивание регрессии, плотности и спектра. — Заводская лаборатория, 1996, № 7, с. 55–57.
7. Островский Е. И. Алгоритмизация процесса обработки статистических данных о надежности элементов. — В сб.: Доклады 4 Международной конференции «Безопасность АЭС и подготовка кадров» (Обнинск, 1995 г.), с. 100–102.
8. Donoho D., Johnstone I., Kerkycharian G., Picard D. Density Estimation by Wavelet Thresholding. — Stanford Univ., Technical Report № 426, 1993, p. 1–26.

Поступила в редакцию
13.IV.1995

Исправленный вариант
10.X.1996

© 1997 г.

КОРОЛЕВ В. Ю.*

О СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН К УСТОЙЧИВЫМ ЗАКОНАМ¹⁾

Приводятся необходимые и достаточные условия сходимости распределений случайных сумм независимых случайных величин к строго устойчивым законам.

Ключевые слова и фразы: устойчивые распределения, условие Линдберга, случайные суммы.

*Московский государственный университет, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра математической статистики, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 96-010-1919 и 96-01-01920.