Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Гапошкин, Точные оценки метрической энтропии множества средних квазистационарных процессов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 4, 785–793

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp26>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 08:35:15

точность асимптотики возрастает с ростом p . При $\tau > c$ точное значение вероятности накрытия убывает значительно быстрее, чем полученная асимптотика, причем ошибка аппроксимации растет с ростом p . Так, при $p = 3$ максимальная ошибка равна 0.008, а при $p = 5$ и $p = 10$ — немногим больше 0.01, и значения ошибок одинаковы в пределах точности наших вычислений. Таким образом, можно сделать вывод о практической приемлемости расчетов вероятности накрытия по асимптотическим формулам, указанным в теореме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Berger J.* A robust generalized Bayes estimator and confidence region for a multivariate normal mean. — *Ann. Statist.*, 1980, v. 8, № 4, p. 716–761.
2. *Brown L. D.* On the admissibility of invariant estimators of one or more location parameters. — *Ann. Math. Statist.*, 1966, v. 37, p. 1087–1136.
3. *de Bruijn N. G.* Asymptotic Methods in Analysis. Amsterdam: North-Holland, 1958, 200 p.
4. *Casella G., Hwang J. T.* Confidence sets and the Stein effect. — *Comm. Statist. Theory Methods*, 1984, v. 15, № 7, p. 2043–2063.
5. *James W., Stein C.* Estimation with quadratic loss. — *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1961, p. 361–380.
6. *Joshi V. M.* Inadmissibility of the usual confidence sets for the mean of a multivariate normal population. — *Ann. Math. Statist.*, 1967, v. 38, p. 1868–1875.
7. *Hwang J. T., Casella G.* Minimax confidence sets for the mean of a multivariate normal distribution. — *Ann. Statist.*, 1982, v. 10, № 3, p. 868–881.
8. *Hwang J. T., Casella G.* Improved set estimators for a multivariate normal mean. Recent results in estimation theory and related topics. — *Statist. Decisions*, 1984, suppl. 1, p. 3–16.
9. *Robert C., Saleh A. K. Md. E.* Recentered confidence sets: a review. — *Data Analysis from Statistical Foundations*. Huntington: Nova Sci. Publ., 2001, p. 295–308.
10. *Saleh A. K. Md. E.* Asymptotic properties of Stein-type confidence sets — a U -statistics approach. — *Sankhyā*, 2003, v. 65, part 2, p. 411–421.
11. *Stein C.* Confidence sets for the mean of a multivariate normal distribution. — *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, 1962, v. 24, p. 265–296.
12. *Lehmann E. L., Casella G.* *Theory of Point Estimation*, 2-nd ed. New York: Springer-Verlag, 1998, 589 p.

Поступила в редакцию
17.XI.2004

© 2006 г.

ГАПОШКИН В. Ф.*

**ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ МЕТРИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ
МНОЖЕСТВА СРЕДНИХ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ**

Получены оценки ε -энтропии множества средних арифметических для R -квазистационарных систем в зависимости от скорости убывания функции $R(n)$. Показана неулучшаемость этих оценок по порядку при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Ключевые слова и фразы: стационарные и квазистационарные последовательности, R -системы, средние арифметические, ε -энтропия множества средних, верхние и нижние оценки.

* Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), ул. Образцова, 15, 101475 Москва, Россия; e-mail: gaposhkin@hotmail.com

Пусть $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ — последовательность случайных величин в $L^2(\Omega)$, и пусть A_n — средние арифметические этой последовательности,

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

Далее предполагается, что последовательность (X_k) удовлетворяет следующему условию квазистационарности: при всех $m \geq 0$, $n \geq 1$

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \right\|^2 \leq R(n). \quad (1)$$

При фиксированной невозрастающей функции $R(n)$, $R(n) \rightarrow 0$, будем называть такую систему (X_k) R -системой.

В работах [1]–[4] исследовался порядок метрической энтропии $N(\varepsilon)$ предкомпактного множества $A = (A_n)$, где при $\varepsilon > 0$ $N(\varepsilon)$ — наименьшее число замкнутых шаров радиуса ε в $L^2(\Omega)$, покрывающих множество A . В работе [1] показано, что для любой стационарной последовательности справедлива оценка $N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-2})$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ и эта оценка неулучшаема во всем классе стационарных последовательностей. Но при добавочных ограничениях на спектральную меру или корреляционную функцию последовательности (X_k) эта оценка может быть улучшена (см. [3], [4]). Так, в работе [4] показано, что если корреляционная функция стационарной последовательности имеет порядок убывания $O(n^{-\alpha})$, $\alpha > 0$, то $N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1})$ и этот результат сохраняет силу для квазистационарных систем с $R(n) = O(n^{-\alpha})$, $\alpha > 0$.

В данной работе продолжается исследование этой задачи при общих предположениях относительно $R(n)$. Получены как верхние, так и нижние оценки энтропии в зависимости от скорости убывания $R(n)$.

1. Верхние оценки энтропии средних.

Теорема 1. Если (X_k) — R -система и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{R(n)}}{n} < \infty, \quad (2)$$

то энтропия $N(\varepsilon)$ допускает оценку $N(\varepsilon) \leq C_0 \varepsilon^{-1}$, $0 < \varepsilon < 1$, где постоянная C_0 зависит лишь от функции R .

Таким образом, не только для случая $R(n) = O(n^{-\alpha})$, $\alpha > 0$, рассмотренного в работе [4], но и при $R(n) = O((\log n)^{-\alpha})$, $\alpha > 2$, наблюдается предельно медленный рост энтропии при $\varepsilon \rightarrow +0$. Поэтому далее естественно исследовать R -системы со скоростью убывания $R(n)$ не выше логарифмической. Далее логарифмы удобно рассматривать по основанию 2; через $A, C_0, C_1, D_1, D_2, \dots$ обозначаются некоторые положительные постоянные, не обязательно одни и те же в разных неравенствах.

Теорема 2. Пусть (X_k) — R -система, где при некоторых $A > 0$ и $\alpha > 0$

$$R(n) \leq A^2 (\log n + 1)^{-\alpha}. \quad (3)$$

Тогда при $\varepsilon \rightarrow +0$ справедлива оценка энтропии

$$N(\varepsilon) = O(\Phi_{\alpha}(\varepsilon)),$$

где

$$\Phi_{\alpha}(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon^{-1} & \text{при } \alpha > 2, \\ \varepsilon^{-1} \log \varepsilon^{-1} & \text{при } \alpha = 2, \\ \varepsilon^{-2/\alpha} & \text{при } 0 < \alpha < 2. \end{cases}$$

Этот результат при $\alpha > 1$ улучшает оценки работ [3], [4]. Далее будет показано, что эти оценки являются точными по порядку в рассматриваемых классах.

Теоремы 1 и 2 являются частными случаями следующей общей теоремы.

Предположим, что выполнена оценка сверху для $R(n)$:

$$\sqrt{R(n)} \leq \frac{A}{H(\log n + 1)}, \quad n \geq 1. \quad (4)$$

Здесь неубывающая непрерывная функция $H(u)$ задана при $u \geq 1$, $H(1) = 1$, $\lim_{u \rightarrow \infty} H(u) = \infty$. Пусть $H^{(-1)}(M)$ — обратная функция; для $1 \leq M < \infty$

$$H^{(-1)}(M) = \min\{u: H(u) = M\}.$$

Для любого действительного $M \geq 2$ положим

$$M_1 = H^{(-1)}(M); \quad M_1 \geq 1. \quad (5)$$

Положим также

$$r(M) = r_M = [M_1 - \log M] + 1 \quad \text{при} \quad M_1 \geq \log M; \quad (6)$$

$r_M = 1$ при $M_1 < \log M$. Здесь и далее используются обозначения $[x]$ — целая часть x , $]x[$ — наименьшее целое N такое, что $N \geq x$.

Положим

$$D(r) = \sum_{k=1}^r \frac{1}{H(k)}, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

и

$$D(r) = D([r]) \quad \text{при нецелых} \quad r > 0.$$

Очевидно, что $r_M \leq M_1$, $H(r_M) \leq M$ при $M \geq 2$.

Из определения (7) и монотонности $H(r)$ вытекает, что

$$MD(r_M) \geq r_M. \quad (8)$$

Теорема 3. Пусть для R -системы (X_k) выполнено условие (4). Тогда существует такая постоянная C_0 , что при $\varepsilon > 0$ справедлива оценка энтропии средних

$$N(\varepsilon) \leq AC_0 \varepsilon^{-1} D(R_\varepsilon) + 1, \quad R_\varepsilon = r(4A\varepsilon^{-1}). \quad (9)$$

Докажем сначала несколько лемм.

Лемма 1. Для средних любой R -системы (X_k) справедлива оценка

$$\|A_n - A_m\| \leq \frac{m-n}{m} \left(\sqrt{R(n)} + \sqrt{R(m-n)} \right), \quad 1 \leq n < m. \quad (10)$$

Если, кроме того, $1 \leq n < m \leq 2n$, то

$$\|A_n - A_m\| \leq 2 \frac{m-n}{m} \sqrt{R(m-n)}.$$

Доказательство. Имеем

$$\|A_n - A_m\| = \frac{m-n}{m} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{m-n} \sum_{k=n+1}^m X_k \right\|,$$

и оценка (10) сразу следует из (1). При предположении $m \leq 2n$ используем неравенство $R(n) \leq R(m-n)$.

Лемма 2. Пусть для R -системы (X_k) выполнено условие (4) с $A = 1$. Пусть $M \geq 2$, $M_1 = H^{(-1)}(M)$. Тогда множество средних $E_1 = (A_n: n \geq 2^{M_1})$ содержится в шаре $U(0, \varepsilon_1)$ с центром в 0 и радиусом $\varepsilon_1 = M^{-1}$.

Доказательство. При $n \geq 2^{M_1}$ имеем $\log n + 1 > M_1$, т.е.

$$H(\log n + 1) \geq H(M_1) = M, \quad \|A_n\| \leq M^{-1}.$$

Далее будет удобно получить оценку (9) сначала при $A = 1$, а затем использовать однородность.

Лемма 3. Пусть выполнено условие (4), где $A = 1$. Пусть $M > 4$, $\varepsilon_2 = 4M^{-1}$. Существует такое $B_1 > 2$, что множество $E_2 = \{A_n:]B_1 M[\leq n \leq [2^{M_1}]\}$, если оно не пусто, обладает ε_2 -сетью S_2 , причем $\text{Card } S_2 \leq 4MD(r_M)$.

Доказательство. Выберем такое натуральное $r_0 \geq 6$, что $H(r) \geq 8$ при $r \geq r_0$, и положим $B_1 = 2^{r_0}$. Если $|B_1 M| > [2^{M_1}]$, то E_2 пусто. В противном случае $2^{M_1} \geq 2M$, $M_1 - \log M \geq 1$ и $M_1 \geq r_M \geq M_1 - \log M$ (см. формулу (6)). Тогда $H(r) \leq M$ при $r \leq r_M$.

Образуем при $r_0 \leq r \leq r_M$ и $k = 0, 1, \dots, k_r$, $k_r = [2M/H(r)] + 1$, индексы

$$m_k^{(r)} =]M2^{r+kH(r)/(2M)}[. \quad (11)$$

Легко проверяется, что

$$\begin{aligned} m_k^{(r)} &\leq m_{k+1}^{(r)} \leq 2m_k^{(r)}, \quad m_{k_r}^{(r)} \geq m_0^{(r+1)} \quad \text{при любых } r \text{ и } k < k_r, \\ m_0^{(r_0)} &=]B_1 M[, \quad m_{k_r}^{(r)} \geq]M2^{r+1}[, > 2^{M_1} \quad \text{при } r = r_M. \end{aligned}$$

Покажем, что нужная ε_2 -сеть S_2 состоит из средних A_n с этими индексами $m_k^{(r)}$.

В силу (8) имеем

$$\text{Card } S_2 \leq \sum_{r=1}^{r_M} \left(\frac{2M}{H(r)} + 2 \right) = 2MD(r_M) + 2r_M \leq 4MD(r_M).$$

Покажем, что любое среднее A_n из E_2 содержится в ε_2 -шаре с центром в некотором элементе с номером $m_k^{(r)}$ из S_2 . Если A_n не принадлежит S_2 , то существуют такие индексы r , $r_0 \leq r \leq r_M$, и k , $0 \leq k < k_r$, что $m_k = m_k^{(r)} < n < m_{k+1}^{(r)} = m_{k+1}$ (для упрощения записи далее индекс r опускается). Обозначим $l_k = m_{k+1} - m_k$, $p_k =]l_k/2[$. Тогда $m_{k+1} - n \geq p_k$ или $n - m_k \geq p_k$. Для определенности будем считать, что $m_{k+1} - n \geq p_k$, и оценим $\|A_n - A_{m_{k+1}}\|$. По лемме 1, так как $m_k < n < m_{k+1} \leq 2m_k \leq 2n$, то

$$\|A_n - A_{m_{k+1}}\| \leq 2(m_{k+1} - n) m_{k+1}^{-1} \sqrt{R(m_{k+1} - n)} \leq 2l_k m_{k+1}^{-1} (H(\log p_k + 1))^{-1}. \quad (12)$$

Из определения чисел m_k следует, что

$$m_k = M2^{r+kH(r)/(2M)} + \varepsilon_k, \quad m_{k+1} = M2^{r+(k+1)H(r)/(2M)} + \varepsilon_{k+1},$$

$0 \leq \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1} < 1$. Следовательно,

$$l_k = m_{k+1}(1 - 2^{-H(r)/(2M)}) + \eta_k, \quad |\eta_k| \leq 1.$$

Так как при $0 \leq x \leq 0.5$ имеем $0.55x \leq 1 - 2^{-x} \leq x$ и по условию $r \geq r_0 \geq 6$, $H(r) \geq 8$, то справедливы неравенства

$$\begin{aligned} l_k &\geq \frac{1}{4} H(r) 2^r - 1 > 2, \quad \frac{1}{m_{k+1}} \leq \frac{1}{M2^{r_0}} \leq 0.01 \frac{H(r)}{4M}, \\ \frac{H(r)}{4M} &\leq \frac{l_k}{m_{k+1}} \leq \frac{2H(r)}{M}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$p_k \geq \frac{l_k}{2} \geq \frac{1}{8} H(r) m_{k+1} M^{-1}, \quad \log p_k + 1 \geq r + \log H(r) - \log 8 \geq r.$$

Подставляя эти оценки в (12), получим, что $\|A_n - A_{m_{k+1}}\| \leq 4M^{-1} = \varepsilon_2$.

Доказательство теоремы 3. Считаем сначала, что условие (4) выполнено при $A = 1$. Тогда при $\varepsilon \geq 1$ имеем $\|A_n\| \leq \varepsilon$ для всех n , т.е. ε -сеть состоит из одного элемента 0. Пусть теперь задано некоторое $0 < \varepsilon < 1$. Положим $M = 4\varepsilon^{-1}$, $M > 4$. Из лемм 2 и 3 следует, что нужная ε -сеть S может быть образована объединением элементов $A_1, A_2, \dots, A_{|B_1 M| - 1}$ (каждый входит в «свой» шар радиуса ε), сети S_2 и элемента 0 (если E_2 пусто, то сеть S_2 не нужна). При этом

$$\text{Card } S \leq |B_1 M| + 4MD(r_M) \leq C'_0 MD(r_M).$$

Итак, при любом $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$N(\varepsilon) \leq C_0 \varepsilon^{-1} D(r(4\varepsilon^{-1})) + 1. \quad (14)$$

Если в условии (4) A — любое положительное число, то заметим, что ε -сети для средних системы (X_k) соответствует ε/A -сеть для средних системы $(Y_k) = (X_k/A)$,

состоящая из элементов с теми же индексами. Оценка (9) энтропии средних системы (X_k) получается заменой ε на ε/A в неравенстве (14).

Доказательство теоремы 1. Обозначим

$$R(n) = H^{-2}(\log n + 1).$$

Условие (2) равносильно условию $\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{R(2^k)} < \infty$, т.е. условию

$$H_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{H(k)} < \infty. \quad (15)$$

В этом случае $D(r) \leq H_0$ и теорема 3 дает оценку $N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1})$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Доказательство теоремы 2. Пусть выполнено условие (3). В случае $\alpha > 2$ сходится ряд (15) и можно применить теорему 1. При $\alpha \leq 2$ полагаем в теореме 3 $H(u) = u^\beta$, $\beta = \alpha/2$. При $\beta = 1$ имеем

$$D(r) = \sum_{k=1}^r k^{-1} \leq \log r + 1, \quad M_1 = M, \quad r_M \leq M;$$

$$MD(r_M) = O(M \log M).$$

При $\beta < 1$

$$D(r) = O(r^{1-\beta}), \quad M_1 = M^{1/\beta}; \quad r_M \leq M^{1/\beta}; \quad MD(r_M) = O(M^{1/\beta}).$$

Остается применить оценку (9) теоремы 3.

Отметим еще один частный случай.

Следствие 1. Пусть выполнено условие

$$\sqrt{R(n)} \leq A \left(\log(n+1)(\log \log(n+3))^\beta \right)^{-1}.$$

Тогда при $\varepsilon \rightarrow +0$ справедливы оценки:

$$\text{если } \beta < 1, \quad \text{то } N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1}(\log \varepsilon^{-1})^{1-\beta}),$$

$$\text{если } \beta = 1, \quad \text{то } N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1} \log \log \varepsilon^{-1}).$$

Действительно, легко проверяется, что соответственно в первом и втором случае

$$D(r_M) = O((\log M)^{1-\beta}), \quad D(r_M) = O(\log \log M).$$

Отметим, что теорема 2 показывает, что если $\alpha < 1$ в условии (3), то для соответствующих квазистационарных последовательностей верхняя оценка энтропии средних $N(\varepsilon)$ — сильно растущая по порядку. В отличие от стационарных последовательностей, для которых по цитированному результату работы [1] всегда $N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-2})$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, здесь получается при $R(n) = O((\log n)^{-\alpha})$ оценка $N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-2/\alpha})$. Интересно, что такая большая скорость роста $N(\varepsilon)$ действительно реализуется в соответствующих классах квазистационарных последовательностей. Более того, все основные результаты первой части работы об оценках сверху энтропии могут быть дополнены аналогичными нижними оценками.

2. Нижние оценки энтропии средних. Начнем со следующей леммы. Пусть $M \geq 2$ — фиксированное число. Предположим, что функции $H(u)$, $D(u)$ и числа M_1 , r_M определены согласно (5)–(7). Предположим также, что при $r \geq 1$

$$H(3r) \leq CH(r). \quad (16)$$

Лемма 4. Пусть в линейном нормированном пространстве имеется последовательность элементов $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющая при некотором $a > 0$ соотношению

$$\|Y_n - Y_m\| \geq \frac{a(m-n)}{mH(\log n + 1)}, \quad m > n \geq 1. \quad (17)$$

Тогда найдутся такие постоянные C_1, M_0 , что для любого $M \geq M_0$ при $\varepsilon_1 = C_1 M^{-1}$ имеется k_M ε_1 -изолированных элементов Y_{n_i} , $1 \leq i \leq k_M$, т.е.

$$\|Y_{n_i} - Y_{n_j}\| > 2\varepsilon_1 \quad (i \neq j),$$

причем

$$k_M \geq M(D(r_M) - D(\log M)). \quad (18)$$

Поэтому ε_1 -энтропия $N_Y(\varepsilon_1)$ множества (Y_n) допускает оценку $N_Y(\varepsilon_1) \geq k_M$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия (16) следует, что $H(u) \leq B_1 u^\gamma$ при некоторых $B_1 > 0, \gamma > 0$. Поэтому $H^{(-1)}(M) = M_1 \geq B_2 M^\delta$ при некоторых $B_2 > 0, \delta > 0$. Из формулы (6) следует, что можно выбрать такое $M_0 \geq 2^6$, что если $M \geq M_0$, то $r_M - \log M \geq 4$, $H(\log M) \geq 8$.

Образуем снова индексы $m_k^{(r)}$ по формуле (11) и будем считать, что

$$k = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{2M}{H(r)} \right\rfloor + 1; \quad] \log M[\leq r \leq r_M, \quad r \text{ — четные числа.}$$

Оценка (13) показывает, что

$$l_k = m_{k+1}^{(r)} - m_k^{(r)} \geq \frac{1}{4} H(r) 2^r - 1 > 2.$$

Таким образом, все индексы $m_k^{(r)}$ различны и их число k_M допускает оценку (18), так как по определению функции $D(r)$

$$k_M \geq \frac{1}{2} \sum_{r=\lfloor \log M \rfloor + 1}^{r_M} \frac{2M}{H(r)} = M(D(r_M) - D(\lfloor \log M \rfloor)) = M(D(r_M) - D(\log M)).$$

Оценим $\|Y_{n_i} - Y_{n_j}\|$ ($i < j$). Рассмотрим два случая.

1) Индексы n_i, n_j из одной r -й серии; их можно обозначить

$$m_k = M2^{r+kH(r)/(2M)} + \varepsilon_k, \quad m_{k+s} = M2^{r+(k+s)H(r)/(2M)} + \varepsilon_{k+s},$$

$0 \leq \varepsilon_k, \varepsilon_{k+s} < 1$. Используя оценки (13), имеем:

$$m_{k+s} - m_k \geq m_{k+s} \left(1 - \frac{m_k}{m_{k+1}} \right) = m_{k+s} \frac{l_k}{m_{k+1}} \geq \frac{H(r) m_{k+s}}{4M}.$$

Далее, при $M \geq M_0 \geq 2^6$ справедливы неравенства $\log m_k \leq \log M + r + 2 \leq 3r - 1$, $H(\log m_k + 1) \leq H(3r)$.

По предположению (17) леммы

$$\|Y_{n_i} - Y_{n_j}\| \geq \frac{aH(r)}{4MH(3r)} > \frac{2C_1}{M}, \quad C_1 = \frac{a}{8C}.$$

2) Если n_i, n_j из разных серий, то по построению номера серий отличаются не менее чем на $t \geq 2$, т.е.

$$n_i = M2^{r+k_1H(r)/(2M)} + \varepsilon_1, \quad n_j = M2^{r+t+k_2H(r+t)/(2M)} + \varepsilon_2.$$

Тогда

$$\frac{n_j - n_i}{n_j} \geq \frac{1}{2}, \quad \log(n_i + 1) \leq \log M + r + 3 \leq 3r.$$

Так как $H(r) \leq M$, то снова из (17) имеем

$$\|Y_{n_i} - Y_{n_j}\| \geq \frac{a}{2CH(r)} > \frac{2C_1}{M}.$$

Лемма доказана.

Итак, чтобы получить нижние оценки энтропии, дополняющие результаты п. 1, нужно построить квазистационарные последовательности в $L^2(\Omega)$, удовлетворяющие условиям леммы 4.

Лемма 5. Пусть $H(u)$ — неубывающая положительная функция при $u \geq 1$, $\lim_{u \rightarrow \infty} H(u) = \infty$, и пусть $H(u+1)/H(u) \leq A$. Существует R -система (X_k) , для которой при данной постоянной A выполнено соотношение (4), и при этом для средних арифметических (A_n) этой последовательности выполнено соотношение (17) при $a = \frac{1}{4}$.

Доказательство. Пусть $(\Phi_\nu)_{\nu=0}^\infty$ — ортогональная система в $L^2(\Omega)$ и $\|\Phi_\nu\| = [H(\nu+1)]^{-1}$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$. Положим

$$X_k = \Phi_\nu \quad \text{при } k \in [2^\nu, 2^{\nu+1}), \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Оценим сначала при $n > 2$, $l \geq 1$ норму разности

$$A_n - A_{n+l} = \frac{l}{n+l} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{l} \sum_{k=n+1}^{n+l} X_k \right).$$

Обозначим через ν такое натуральное число, что $n = 2^\nu + n_1$, $1 \leq n_1 \leq 2^\nu$. Тогда сумма в скобках представляется в виде

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2^\nu-1} X_k + \frac{1}{n} \sum_{k=2^\nu}^{2^\nu+n_1} X_k - \frac{1}{l} \sum_{k=2^\nu+n_1+1}^{n+l} X_k = Y + Z,$$

где $Y = n^{-1} \sum_{k=1}^{2^\nu-1} X_k$, а Z ортогонально Y . Поэтому

$$\|A_n - A_{n+l}\| \geq \frac{l}{n+l} \|Y\|.$$

По построению

$$\sum_{k=1}^{2^\nu-1} X_k = \sum_{s=1}^{\nu} 2^{s-1} \Phi_{s-1}.$$

Так как $2^\nu < n \leq 2^{\nu+1}$, то

$$\|Y\|^2 = n^{-2} \sum_{s=1}^{\nu} \frac{2^{2s-2}}{H^2(s)} \geq \frac{1}{16H^2(\log n + 1)}.$$

Отсюда получаем требуемую оценку:

$$\|A_n - A_{n+l}\| \geq \frac{l}{4(n+l)H(\log n + 1)}.$$

Покажем, что (X_k) — R -система, где

$$\sqrt{R(n)} \leq \frac{A}{H(\log n + 1)}.$$

Оценим нормы сумм

$$B_{n,l} = \frac{1}{l} \sum_{k=n+1}^{n+l} X_k.$$

Рассмотрим два случая.

а) $2^\nu \leq n < n+l < 2^{\nu+1}$, т.е. n и $n+l$ в одном блоке. Тогда $\nu+1 \geq \log n$ и в силу условия леммы имеем

$$B_{n,l} = \Phi_\nu, \quad \|B_{n,l}\| = \frac{1}{H(\nu+1)} \leq \frac{1}{H(\log n)} \leq \frac{A}{H(\log n + 1)}.$$

б) Пусть $2^\nu \leq n < 2^{\nu+1}$, $2^\mu \leq n+l < 2^{\mu+1}$, $\mu > \nu$, т.е. n и $n+l$ находятся в разных блоках. Тогда

$$B_{n,l} = l^{-1} [(2^{\nu+1} - n - 1) \Phi_\nu + 2^{\nu+1} \Phi_{\nu+1} + \dots + (n+l - 2^\mu + 1) \Phi_\mu],$$

где сумма всех коэффициентов при Φ_k в квадратных скобках равна l . Оценим $\|B_{n,l}\|$ сверху через сумму норм. Так как нормы $\|\Phi_k\|$ не возрастают, получим снова

$$\|B_{n,l}\| \leq \|\Phi_\nu\| = \frac{1}{H(\nu+1)} \leq \frac{A}{H(\log n + 1)}.$$

Итак,

$$\sup_l \|B_{n,l}\| \leq \frac{A}{H(\log n + 1)},$$

где A — постоянная из условия леммы. Лемма 5 доказана.

Из лемм 4 и 5 вытекает, что верхние оценки, полученные в п. 1, являются точными по порядку (при $\varepsilon \rightarrow +0$) в соответствующих классах квазистационарных последовательностей. Например, следующая теорема дополняет теорему 2.

Теорема 4. Для любого α , $0 < \alpha \leq 2$, существует R -система, удовлетворяющая условию (3), для которой при некоторой постоянной $D_\alpha > 0$ энтропия средних имеет при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ оценку

$$N(\varepsilon) \geq D_\alpha \varepsilon^{-1} \log \varepsilon^{-1} \quad \text{при } \alpha = 2$$

и

$$N(\varepsilon) \geq D_\alpha \varepsilon^{-2/\alpha} \quad \text{при } 0 < \alpha < 2.$$

Для доказательства применяем леммы 4 и 5, где $H(u) = u^\beta$, $\beta = \alpha/2$. Условие леммы 5, очевидно, выполнено при $A_\alpha = 2^{\alpha/2}$. Полагая $M = 1/\varepsilon$, имеем при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $M \geq M_0$ оценки: если $\beta = 1$, то

$$2 \log r \geq D(r) \geq \frac{1}{2} \log r \quad (r \geq 2), \quad r_M \sim M;$$

$$D(\log M) \leq 2 \log \log M, \quad M(D(r_M) - D(\log M)) \geq cM \log M;$$

если $\beta < 1$, то

$$D(r) \geq cr^{1-\beta}, \quad r_M \sim M^{1/\beta};$$

$$D(\log M) \leq C \log M, \quad M(D(r_M) - D(\log M)) \geq c_1 M^{1/\beta} = c_1 M^{2/\alpha}.$$

Аналогично получаются нижние оценки к следствию 1.

Отметим еще такое утверждение.

Следствие 2. Существуют квазистационарные системы (X_k) с $R(n) \rightarrow 0$, для которых энтропия множества средних растет сколь угодно быстро при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Действительно, если функцию $H(r)$ выбрать очень медленно растущей, то M_1 (корень уравнения $H(M_1) = M$) будет расти сколь угодно быстро при $M \rightarrow \infty$, и утверждение следствия вытекает из оценки (18) леммы 4: при $\varepsilon = M^{-1}$

$$N(\varepsilon) \geq cMD(r_M) \geq cr_M \sim cM_1.$$

Здесь имеется существенное отличие от стационарных систем, для которых всегда $N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-2})$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ по цитированному выше результату работы [1]. Поэтому нельзя распространить нижние оценки, скажем, теоремы 4, на стационарные последовательности при $0 < \alpha < 1$. Из этого результата работы [1] и леммы 4 следует также такое утверждение.

Следствие 3. Не существует стационарной последовательности (X_k) , для которой при $\alpha < \frac{1}{2}$ и некотором $a > 0$ справедлива оценка

$$\|A_n - A_m\| \geq \frac{a(m-n)}{m(\log n + 1)^\alpha} \quad (1 \leq n < m).$$

Из приведенных фактов следует, что для точной оценки энтропии множества средних в классах стационарных R -систем при медленно убывающей функции $R(n)$ не достаточно использовать грубую оценку норм средних $\|A_n - A_m\|$ из леммы 1, а нужны более точные оценки. Эта задача будет исследоваться в дальнейшем. Автор благодарен рецензенту за полезные редакционные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Talagrand M. Applying a theorem of Fernique. — Ann. Inst. H. Poincaré, 1996, v. 32, № 6, p. 779–799.
2. Weber M. Entropie métrique et convergence presque partout. — Paris: Hermann, 1998, 151 p.
3. Gamet C., Weber M. Entropy numbers of some ergodic averages. — Теория вероятн. и ее примен., 1999, т. 44, в. 4, с. 776–795.
4. Гапошкин В. Ф. Оценки энтропии множества средних некоторых классов стационарных или квазистационарных последовательностей. — Матем. заметки, 2005, т. 78, № 1, с. 52–58.

Поступила в редакцию
15.VI.2005

Исправленный вариант
15.V.2006

© 2006 г. ЗАМЯТИН А. А.*, МАЛЫШЕВ В. А.*, МАНИТА А. Д.*

**ЯВЛЕНИЕ ГОМЕОСТАЗА
В СЕТЯХ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ¹⁾**

Предложены вероятностные модели сетей химических реакций с зависящими от времени входными потоками и несколькими типами молекул. Мы доказываем, что, несмотря на сильную зависимость от времени входных интенсивностей, в сети наблюдается явление гомеостаза в следующем смысле: вдали от входящих узлов математические ожидания числа молекул каждого типа становятся близкими к константам, не зависящим от времени.

Ключевые слова и фразы: вероятностные модели биологических систем, почти периодические входные интенсивности, стохастические сети, термодинамический предел.

1. Введение и описание модели. Задача возникла из обдумывания феномена гомеостаза в живых организмах. Многие биологические явления можно описать в терминах концентраций или средних чисел $m_{\alpha,v}$ молекул типа v в различных частях (*компартаментах*) α организма. Компартменты следует представлять себе как пространственно отделенные части клетки или биологического организма, в которых протекает некоторая система химических реакций. В результате химических реакций в данном компартменте молекулы могут менять тип, а также переходить из компартмента в компартмент. Одно из проявлений гомеостаза состоит в том, что большие флуктуации во внешней среде должны сглаживаться внутри организма.

При формализации задачи удобно рассмотреть направленный граф G с $M = N_1 J$ вершинами, каждая вершина имеет вид пары $i = (\alpha, v)$, где $v = 1, \dots, J$ являются типами молекул, а $\alpha = 1, \dots, N_1$ обозначают компартменты. Мы определим марковский процесс с непрерывным временем или (для более общих ситуаций) немарковский процесс, состояниями которого будут векторы $(\xi_{\alpha,v}, \alpha = 1, \dots, N_1, v = 1, \dots, J)$,

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: andrei.zamyatin@mail.ru, malyshev2@yahoo.com, manita@mech.math.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 05-01-22001, 06-01-00662).