Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Тимашёв, Случайные отображения конечных множеств с известным числом компонент, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 4, 818–828

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp260>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 16:23:17

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adler R. J. On excursion sets, tube formulas and maxima of random fields. — Ann. Appl. Probab., 2000, v. 10, № 1, p. 1–74.
2. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы, М.: Мир, 1969, 398 с.
3. Illsley R. The excursions of a stationary Gaussian process outside a large two-dimensional region. — Adv. Appl. Probab., 2001, v. 33, p. 141–159.
4. Kallenberg O. Random Measures. Berlin/London: Akademie-Verlag/Academic Press, 1983, 187 p.
5. Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989, 187 с.
6. Piterbarg V. I. Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields. AMS, Providence, 1996, 296 p.
7. Русаков А. А. Пуассоновость распределения числа выходов за высокий уровень огибающей гауссовского стационарного процесса. Депонировано ВИНТИ, 28.10.01 N2142-B2001, 23 с.

Поступила в редакцию
12.XI.2002

© 2003 г.

ТИМАШЕВ А. Н.*

СЛУЧАЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ С ИЗВЕСТНЫМ ЧИСЛОМ КОМПОНЕНТ

Рассматривается класс всех однозначных отображений n -элементного множества в себя, имеющих каждое ровно N компонент связности. В предположении, что на этом классе задано равновероятное распределение и $n, N \rightarrow \infty$, получены асимптотики математического ожидания и дисперсии и доказаны пуассоновские и локальная нормальная теоремы для случайной величины, равной количеству компонент заданного объема в случайно выбранном отображении. Найдены асимптотические оценки для числа таких отображений с N компонентами, имеющих ровно k компонент фиксированного объема.

Ключевые слова и фразы: случайные отображения, локальная предельная теорема, асимптотические оценки, компоненты.

Рассмотрим класс всех однозначных отображений n -элементного множества в себя, имеющих каждое ровно N компонент связности. Число таких отображений равно (см. [1, с. 80]) $a(n, N)$, где

$$\begin{aligned} a(n, N) &= \frac{n!}{N!} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_N = n \\ k_1, \dots, k_N \in \mathbf{N}}} a_{k_1} \dots a_{k_N} \\ &= \frac{n!}{N!} \frac{(A(x))^N}{x^n} \mathbf{P}\{\xi_1 + \dots + \xi_N = n\}, \quad N = 1, \dots, n; \end{aligned} \quad (1)$$

$$a_k = \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{k^m}{m!}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (2)$$

$$A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \ln \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{k!} x^k \right); \quad (3)$$

* Академия ФСБ, Мичуринский просп., 70, 117602 Москва, Россия.

$\xi_1, \dots, \xi_N$ — независимые в совокупности одинаково распределенные случайные величины такие, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{a_k x^k}{A(x)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

и параметр x распределения (4) может принимать любое значение из интервала $(0, e^{-1})$, поскольку при таких x оба ряда в (3) сходятся и $\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} > 0$, $k = 1, 2, \dots$. Пусть r — натуральное число (всюду далее, если не оговорено противное, r фиксировано). Предполагая, что на указанном классе отображений задано равновероятное распределение, на соответствующем вероятностном пространстве определим случайную величину $\varkappa_r(n, N)$, равную количеству компонент мощности (объема) r в случайно выбранном отображении. Если $C_{kr}(n, N)$ — число отображений, входящих в этот класс и имеющих каждое ровно k компонент объема r , то

$$C_{kr}(n, N) = a(n, N) \mathbf{P}\{\varkappa_r(n, N) = k\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Пусть при $n, N \rightarrow \infty$ целое неотрицательное число $k = k(n, N)$ меняется так, что выполнены условия:

$$N - k \rightarrow +\infty; \quad 1 < \alpha_0 \leq \alpha = \frac{n - kr}{N - k} \leq \alpha_1 < +\infty; \quad (6)$$

α_0, α_1 — постоянные, причем при $r = 1$

$$\alpha_0 > 2. \quad (7)$$

Заметим, что при условиях (6), (7) параметры n, N меняются в центральной области в том смысле, что существуют постоянные β_0, β_1 такие, что

$$1 < \beta_0 \leq \beta = N^{-1}n \leq \beta_1 < +\infty. \quad (8)$$

В работе получена асимптотика чисел $C_{kr}(n, N)$ и доказана локальная нормальная теорема, оценивающая вероятность $\mathbf{P}\{\varkappa_r(n, N) = k\}$ в предположении, что $n, N \rightarrow \infty$ и выполнены условия (6), (7). Получены также достаточные условия сходимости распределения случайной величины $\varkappa_r(n, N)$ к пуассоновскому закону, справедливые при $n, N \rightarrow \infty$.

В доказательствах соответствующих теорем используются соотношения (1)–(5) и применяется метод условных распределений для сумм независимых случайных величин при специальном выборе обобщенной схемы размещения, в которой случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$ имеют одинаковое распределение вида (4) ([1, с. 79–80], см. также [2]). Заметим, что случайные отображения из рассматриваемого класса изучались ранее в случае $N = 1$ (см. [3]–[5]), а также в предположении, что $N \ln N = o(\ln n)$ при $n \rightarrow \infty$ (см. [6]). Однако случай, когда при $n, N \rightarrow \infty$ выполнены условия (6), (7) или (8), по-видимому, до настоящего времени не привлекал внимание исследователей.

Теорема 1. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ и целое неотрицательное число $k = k(n, N)$ меняется так, что выполнены условия (6), (7). Тогда равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$C_{kr}(n, N) = \frac{n!}{N!} \frac{(A(x_r))^N}{x_r^n} C_N^k(p_r(x_r))^k \times (1 - p_r(x_r))^{N-k} \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi(N-k)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{N-k}\right)\right), \quad (9)$$

где $x = x_r$ — единственный корень уравнения

$$\frac{x A'(x)(A(x))^{-1} - r p_r(x)}{1 - p_r(x)} = \alpha, \quad (10)$$

принадлежащий интервалу $(0, e^{-1})$;

$$p_r(x) = \frac{a_r x^r}{A(x)}, \quad r = 1, 2, \dots, \quad 0 < x < e^{-1}; \quad (11)$$

$$\sigma_r^2 = \frac{(x_r^2 A''(x_r) + x_r A'(x_r))(A(x_r))^{-1} r^2 \cdot p_r(x_r)}{1 - p_r(x_r)} - \alpha^2 > 0. \quad (12)$$

Доказательство. Заметим, что в условиях (11) [1, с. 16]

$$\mathbf{P}\{\kappa_r(n, N) = k\} = C_N^k (p_r(x))^k (1 - p_r(x))^{N-k} \frac{\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{S_N = n\}}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (13)$$

где $S_N = \xi_1 + \dots + \xi_N$, $S_{N-k}^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \dots + \xi_{N-k}^{(r)}$, $\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_{N-k}^{(r)}$ — независимые в совокупности одинаково распределенные случайные величины такие, что $\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = m\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = m \mid \xi_1 \neq r\} = p_m(x)(1 - p_r(x))^{-1}$, $m = 1, 2, \dots, m \neq r$.

При $m = r$ имеем $\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = r\} = 0$.

Подставляя (13) в (5) и учитывая (1), получаем, что

$$C_{kr}(n, N) = \frac{n!}{N!} \frac{(A(x))^N}{x^n} C_N^k (p_r(x))^k (1 - p_r(x))^{N-k} \mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\}. \quad (14)$$

Нетрудно подсчитать, что с учетом (4)

$$\mathbf{E} \xi_1^{(r)} = (1 - p_r(x))^{-1} (\mathbf{E} \xi_1 - r p_r(x)) = (1 - p_r(x))^{-1} [x A'(x) (A(x))^{-1} - r p_r(x)].$$

Если потребовать, чтобы $\mathbf{E} \xi_1^{(r)} = \alpha$, то окажется, что $\mathbf{E} S_{N-k}^{(r)} = (N - k) \mathbf{E} \xi_1^{(r)} = n - kr$ и параметр x удовлетворяет уравнению (10). Легко проверить, что при $\alpha > 1$ и $r \geq 2$ это уравнение имеет единственный корень $x = x_r$, принадлежащий интервалу $(0, e^{-1})$ (при $r = 1$ нужно дополнительно потребовать, чтобы $\alpha > 2$). Таким образом, при условиях (6), (7) уравнение (10) имеет ровно один корень $x = x_r \in (0, e^{-1})$.

Вычислим дисперсию $\mathbf{D} \xi_1^{(r)}$. Нетрудно убедиться в том, что $\mathbf{D} \xi_1^{(r)} = \sigma_r^2$ при $x = x_r$, где значение σ_r^2 определяется согласно (12). При этом $\sigma_r^2 > 0$, поскольку при наших условиях распределение случайной величины $\xi_1^{(r)}$ невырожденное. Применяя к оценке вероятности $\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\} = \mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = \mathbf{E} S_{N-k}^{(r)}\}$ локальную нормальную теорему, убеждаемся в том, что при $\sigma_r > 0$

$$\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\} = \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi(N-k)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{N-k}\right) \right) \quad (15)$$

равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$.

Полагая в (14) $x = x_r$ и используя (15), получаем оценку (9). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. При условиях теоремы 1 равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ и целых положительных значений $k = N p_r(x_r) + y \sqrt{N}$, для которых величина y заключена в любом фиксированном конечном промежутке,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \kappa_r(n, N) &= N p_r(x_r) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \right), \\ \mathbf{D} \kappa_r(n, N) &= N (\sigma^{(r)})^2 \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \right), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$(\sigma^{(r)})^2 = \frac{\sigma_r^2}{\sigma^2} \left(1 - p_r(x_r) \right)^2 p_r(x_r) > 0, \quad (17)$$

$$\sigma^2 = x_r^2 A''(x_r) (A(x_r))^{-1} + \frac{x_r A'(x_r)}{A(x_r)} \left(1 - \frac{x_r A'(x_r)}{A(x_r)} \right) > 0. \quad (18)$$

Доказательство. Нетрудно подсчитать, что в обозначениях (3), (13) и (18) $\mathbf{D} \xi_1 = \sigma^2$. Применяя к сумме $S_N = \xi_1 + \dots + \xi_N$ локальную нормальную теорему и учитывая равенства

$$M = \mathbf{E} \xi_1 = x_r A'(x_r) (A(x_r))^{-1}, \quad (19)$$

$(n - MN)/\sqrt{N} = (r - \alpha)y$ (это следует из (10), (19) и условий теоремы 2), получаем, что

$$\mathbf{P}\{S_N = n\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(r - \alpha)^2 y^2}{2\sigma^2}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right). \quad (20)$$

Следовательно, согласно (1) и (20),

$$a(n, N) = \frac{n!}{N!} \frac{(A(x_r))^N}{x_r^n} \frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(r - \alpha)^2 y^2}{2\sigma^2}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right). \quad (21)$$

При замене n на $n - r$, N на $N - 1$ и k на $k - 1$ равенство $\alpha = (n - kr)/(N - k)$ (справедливое согласно (6)) сохраняется, поэтому из условий теоремы 2 следует, что с учетом (21)

$$\frac{a(n - r, N - 1)}{a(n, N)} = \frac{(n - r)! N x_r^r}{n! A(x_r)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right).$$

Поскольку, как нетрудно проверить, $\mathbf{E}\kappa_r(n, N) = C_n^r a(r, 1) a(n - r, N - 1)/a(n, N)$ и, согласно (1), $a(r, 1) = r! a_r$, имеем

$$\mathbf{E}\kappa_r(n, N) = N p_r(x_r) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right).$$

Аналогично устанавливается асимптотическая формула для дисперсии $\mathbf{D}\kappa_r(n, N)$; соответствующие выкладки более громоздки и опущены в целях компактности изложения. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. При условиях теоремы 1 равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ и целых положительных значений $k = N p_r(x_r) + y\sqrt{N}$, для которых $|y| \leq C = \text{const}$,

$$\mathbf{P}\{\kappa_r(n, N) = k\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N(\sigma^{(r)})^2}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2} \left((p_r(x_r))^{-1} (1 - p_r(x_r))^{-1} - \frac{(r - \alpha)^2}{\sigma^2}\right)\right\} \times \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right), \quad (22)$$

где значения σ^2 и $(\sigma^{(r)})^2$ определяются согласно (17), (18).

Доказательство. Оценка (22) следует из (13), (15) и (20), если учесть, что по локальной теореме Муавра-Лапласа

$$C_N^k (p_r(x_r))^k (1 - p_r(x_r))^{N-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N p_r(x_r)(1 - p_r(x_r))}} \times \exp\left(-\frac{y^2}{2 p_r(x_r)(1 - p_r(x_r))}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right)$$

и, согласно (15),

$$\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N(1 - p_r(x_r))\sigma_r^2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right)$$

равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$. Теорема 3 доказана.

Заметим, что метод доказательства теорем 1 и 3 по своей идее восходит к работе [2].

Если теперь отказаться от ограничения $r = \text{const}$, то окажется, что справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $n, N, r \rightarrow \infty$ так, что выполнено условие (8) и $N p_r(x_0) \rightarrow \lambda > 0$, где $x = x_0$ — единственный корень уравнения

$$x A'(x) (A(x))^{-1} = \beta, \quad (23)$$

принадлежащий интервалу $(0, e^{-1})$. Тогда случайная величина $\kappa_r(n, N)$ распределена в пределе по закону Пуассона с параметром λ .

Доказательство. Нетрудно проверить, что уравнение (23) имеет для любого значения $\beta > 1$ единственный корень $x = x_0 \in (0, e^{-1})$. Нужно доказать, что при условиях теоремы 4

$$\mathbf{P}\{\kappa_r(n, N) = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}(1 + o(1)), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

Для обоснования оценок (24) используем (13), полагая $x = x_0$ (аналогичный метод применяется, например, в [1, с. 161]). Пуассоновское приближение для биномиального распределения позволяет утверждать, что $C_N^k(p_r(x_0))^k(1 - p_r(x_0))^{N-k} = (\lambda^k/k!) e^{-\lambda}(1 + o(1))$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Таким образом, для обоснования (24) нам достаточно установить, что при $x = x_0$

$$\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\} = \mathbf{P}\{S_N = n\} (1 + o(1)). \quad (25)$$

Легко подсчитать, что в использованных выше обозначениях

$$\mathbf{E}\xi_1 = x_0 A'(x_0) (A(x_0))^{-1} = \beta,$$

$$\mathbf{D}\xi_1 = x_0^2 A''(x_0) (A(x_0))^{-1} + \beta(1 - \beta) > 0.$$

Применяя для оценки вероятности $\mathbf{P}\{S_N = n\}$ локальную нормальную теорему, получаем

$$\mathbf{P}\{S_N = n\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N \mathbf{D}\xi_1}} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right). \quad (26)$$

Далее, $\mathbf{E}\xi_1^{(r)} = (1 - p_r(x_0))^{-1}(\beta - rp_r(x_0))$.

При наших условиях, согласно (11) и (23), равенство $Np_r(x_0) = \lambda + o(1)$ означает, что $a_r x_0^r = N^{-1} \lambda A(x_0)(1 + o(1))$. Используя оценку $a_r = e^r (2r)^{-1} (1 + o(1))$, справедливую при $r \rightarrow \infty$ согласно (2), получаем, что

$$r = -\frac{\ln N}{1 + \ln x_0} (1 + o(1)),$$

и поэтому

$$\mathbf{E}\xi_1^{(r)} = \beta + \frac{\lambda \ln N}{N(1 + \ln x_0)} + o\left(\frac{\ln N}{N}\right),$$

$(\mathbf{E}\xi_1^{(r)})^2 = \beta^2(1 + O(N^{-1} \ln N))$. Заменяя в (12) x_r на x_0 и α на $\mathbf{E}\xi_1^{(r)}$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\xi_1^{(r)} &= (1 - p_r(x_0))^{-1} \left(x_0^2 A''(x_0) (A(x_0))^{-1} + \beta - r^2 p_r(x_0) \right) \\ &\quad - \beta^2 \left(1 + O\left(\frac{\ln N}{N}\right) \right) = \mathbf{D}\xi_1 \left(1 + O\left(\frac{\ln^2 N}{N}\right) \right). \end{aligned}$$

Кроме того, $(n - kr)/(N - k) = \beta(1 + O(N^{-1} \ln N))$. По локальной нормальной теореме получаем, согласно (26),

$$\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N \mathbf{D}\xi_1}} (1 + o(1)) = \mathbf{P}\{S_N = n\} (1 + o(1)),$$

что доказывает (25). Теорема 4 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Пусть ν_n — число компонент в отображении, выбираемом случайно равномерно из класса всех n^n однозначных отображений n -элементного множества в себя. Тогда

$$\mathbf{P}\{\nu_n = N\} = \frac{a(n, N)}{n^n}, \quad N = 1, \dots, n. \quad (27)$$

Если $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнено условие (8), то из (1), (26), (27) получаем, что равномерно относительно $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$

$$P\{\nu_n = N\} = \frac{n! (A(x_0))^N}{n^n N! x_0^n} \frac{1}{\sqrt{2\pi N D\xi_1}} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right), \quad (28)$$

где $x = x_0 \in (0, e^{-1})$ — единственный корень уравнения (23) и дисперсия $D\xi_1$ вычисляется по формуле, приведенной в процессе доказательства теоремы 4. Равенство (28) является локальной теоремой о больших отклонениях для случайной величины ν_n , справедливой в предположении, что $n, N \rightarrow \infty$ в центральной области, определяемой условиями (8).

Теорема 5. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$\frac{N}{\ln n} \rightarrow \frac{\lambda}{2\lambda_r}, \quad \lambda > 0, \quad (29)$$

где

$$\lambda_r = \frac{e^{-r}}{r} \sum_{m=0}^{r-1} \frac{r^m}{m!}. \quad (30)$$

Тогда случайная пара $\kappa_r(n, N)$ распределена в пределе по закону Пуассона с параметром λ , $r = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Из равенства (1) нетрудно получить, что

$$a(n, N) = \frac{n!}{N!} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(A(z))^N}{z^{n+1}} dz. \quad (31)$$

Интегрирование в (31) осуществляется по окружности $0 < |z| = z_0 < e^{-1}$, пробегаемой в положительном направлении.

Полагая $z_0 = x_0$, будем интегрировать по окружности $|z| = x_0$, где $x = x_0$ — единственный корень уравнения (23), принадлежащий интервалу $(0, e^{-1})$. Если формулу (31) представить в виде

$$a(n, N) = \frac{n!}{N!} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{z} \exp(N\omega(z)) dz,$$

то из равенства $\beta = n_j/N \rightarrow \infty$ получаем: $\omega(z) = \ln(A(z)) - \beta \ln z$, $\omega'(z) = A'(z)(A(z))^{-1} - \beta z^{-1} = 0$, если $z = x_0$ — корень уравнения (23). При этом $\omega''(x_0) > 0$, и поэтому $z = x_0$ — точка перегиба первого порядка функции ω . Применяя метод перегиба к оценке интеграла в формуле (31), можно утверждать, что при условии $(r-1)j \leq n - N$

$$\frac{a(n - rj, N - j)}{a(n, N)} = \frac{N^j e^{-rj}}{n^{rj} (A(x_0))^j} (1 + o(1)), \quad (32)$$

поскольку из (23) следует, что $x_0 \rightarrow e^{-1}$ при $\beta \rightarrow \infty$. Чтобы найти асимптотику $A(x_0)$, поступим следующим образом. Положим $B(x) = \exp(A(x))$, тогда, согласно (3),

$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{k!} x^k \quad \text{при } 0 < x < e^{-1}$$

и если $\theta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (k^{k-1}/k!) x^k$, то (см. [1, с. 155]) $\theta(x) \exp(-\theta(x)) = x$, и поэтому

$$\theta'(x) = \frac{B(x) - 1}{x} = \frac{\theta(x)}{x(1 - \theta(x))}.$$

Следовательно, $A(x) = \ln(B(x)) = -\ln(1 - \theta(x))$,

$$x A'(x) (A(x))^{-1} = -\frac{\theta(x)}{(1 - \theta(x))^2 \ln(1 - \theta(x))}.$$

Полагая $x = x_0$, получаем

$$\beta = -\frac{1}{(1 - \theta(x_0))^2 \ln(1 - \theta(x_0))} (1 + o(1)),$$

поскольку $\lim_{x \rightarrow e^{-1}} \theta(x) = \theta(e^{-1}) = 1$. Таким образом, $(B(x_0))^2 (\ln B(x_0))^{-1} (1 + o(1)) = \beta \rightarrow \infty$, и поэтому

$$B(x_0) = \sqrt{\frac{\beta \ln \beta}{2}} (1 + o(1)), \quad A(x_0) = \ln B(x_0) = \frac{\ln \beta}{2} (1 + o(1)).$$

Подставляя эту оценку в (32), получаем, что при $(r - 1)j \leq n - N$

$$\frac{a(n - rj, N - j)}{a(n, N)} = \frac{(2N)^j e^{-rj}}{n^{rj} (\ln \beta)^j} (1 + o(1)), \quad r = 1, 2, \dots \quad (33)$$

С помощью несложных комбинаторных рассуждений нетрудно проверить, что при условии $(r - 1)j \leq n - N$ факториальные моменты случайной величины $\kappa_r(n, N)$ определяются из соотношений

$$\mathbf{E}(\kappa_r(n, N))_j = \frac{n! (a(r, 1))^j}{(n - rj)! (r!)^j} \frac{a(n - rj, N - j)}{a(n, N)}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (34)$$

Подставляя (33) в (34), выводим, что

$$\mathbf{E}(\kappa_r(n, N))_j = \frac{(2N)^j a_r^j e^{-rj}}{(\ln(n/N))^j} (1 + o(1)), \quad r, j = 1, 2, \dots,$$

поскольку из (29) следует, что $n - N \rightarrow \infty$.

В частности, при $j = 1$

$$\mathbf{E}\kappa_r(n, N) = \frac{2N\lambda_r}{\ln(n/N)} (1 + o(1)),$$

поскольку, согласно (2) и (30), $\lambda_r = e^{-r} a_r$, $r = 1, 2, \dots$.

Но тогда условие $\mathbf{E}\kappa_r(n, N) \rightarrow \lambda > 0$ равносильно (29), так как $\ln N = o(\ln n)$.

Таким образом, из (29) и (30) следует, что

$$\mathbf{E}(\kappa_r(n, N))_j = \lambda^j (1 + o(1)), \quad r, j = 1, 2, \dots$$

Теорема 5 доказана.

З а м е ч а н и е 2. Известно (см. [1, с. 85]), что если α_r — число компонент объема r в отображении, выбираемом случайно равновероятно из класса всех n^n однозначных отображений n -элементного множества в себя, то при $n \rightarrow \infty$ случайная величина α_r распределена в пределе по закону Пуассона с параметром λ_r , $r = 1, 2, \dots$. Это обстоятельство соответствует условиям теоремы 5, поскольку при $\lambda = \lambda_r$ (29) означает, что $N \sim (\ln n)/2$. Действительно, если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $N = (\ln n)/2 + y(\ln n)^{7/12}$, $|y| \leq C = \text{const}$, то (см. [1, с. 85])

$$a(n, N) = \frac{n^n}{\sqrt{\pi \ln n}} \exp(-y^2 (\ln n)^{1/6}) (1 + o(1)),$$

и поэтому

$$\frac{a(n - rj, N - j)}{a(n, N)} = \frac{(n - rj)^{n - rj}}{n^n} (1 + o(1)) = e^{-rj} n^{-rj} (1 + o(1)), \quad r, j = 1, 2, \dots$$

Отсюда так же, как и выше, заключаем, что

$$\mathbf{E}(\kappa_r(n, N))_j = e^{-rj} a_r^j (1 + o(1)) = \lambda_r^j (1 + o(1)), \quad r, j = 1, 2, \dots,$$

что означает, что при таких условиях случайная величина $\kappa_r(n, N)$ имеет в пределе распределение Пуассона с параметром λ_r , $r = 1, 2, \dots$.

З а м е ч а н и е 3. Чтобы решить уравнения (10) и (23) с любой заданной степенью точности, следует положить $\theta(x) = t$, $\theta(x_r) = t_r$, $\theta(x_0) = t_0$. В этих обозначениях, в силу (10) и условий теоремы 1, $t = t_r$ — единственный корень уравнения

$$t(1-t)^{-2} + \alpha \ln(1-t) = (r-\alpha) a_r t^r e^{-rt},$$

принадлежащий интервалу $(0, 1)$. Аналогично, согласно (23) $t = t_0$ — единственный корень уравнения $-t(1-t)^{-2}(\ln(1-t))^{-1} = \beta > 1$, принадлежащий тому же интервалу. Найдя значения $t = t_r$ и $t = t_0$ стандартными методами, далее используем соотношения $x_r = t_r e^{-t_r}$, $x_0 = t_0 e^{-t_0}$. Если учесть, что

$$A(x) = -\ln(1-t), \quad x A'(x) (A(x))^{-1} = -\frac{t}{(1-t)^2 \ln(1-t)},$$

$$x^2 A''(x) (A(x))^{-1} = -\frac{t^2(3-t)}{(1-t)^4 \ln(1-t)},$$

и положить в этих соотношениях $t = t_r$ или $t = t_0$, то можно вычислить дисперсии в формулах (12), (17), (18), а также дисперсию $D\xi_1$ в (26) и (28), поскольку

$$p_r(x) = -\frac{a_r t^r e^{-rt}}{\ln(1-t)}, \quad r = 1, 2, \dots$$

Так, например, если $n = 10$, $N = 8$, $\beta = \frac{5}{4}$, то $x_0 \cong 0.119987$ с точностью до 10^{-6} , и вычисления по формуле (28) дают оценку $0.807 \cdot 10^{-6}$ вместо точного значения $P\{\nu_{10} = 8\} = 0.771 \cdot 10^{-6}$. В то же время попытка использовать нормальное приближение для случайной величины ν_{10} (см. замечание 2) приводит к весьма грубой оценке $0.053 \cdot 10^{-8}$.

Теорема 6. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$N \left(\frac{n}{N} - 1 \right)^{r-1} \rightarrow \left(\frac{3}{2} \right)^{r-1} \frac{\lambda}{a_r}, \quad \lambda > 0, \quad (35)$$

где a_r определяется согласно (2). Тогда случайная величина $\kappa_r(n, N)$ имеет в пределе распределение Пуассона с параметром λ , $r = 3, 4, \dots$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем тот же метод, с помощью которого доказывалась теорема 5. При условиях (35) $\beta = n/N = 1 + o(1)$, $x_0 = o(1)$, $\theta(x_0) = o(1)$, и поэтому

$$\frac{1}{\beta} = -\frac{(1-\theta(x_0))^2 \ln(1-\theta(x_0))}{\theta(x_0)} = 1 - \frac{3}{2} \theta(x_0) + O((\theta(x_0))^2).$$

Следовательно, $\beta - 1 = \frac{3}{2} \theta(x_0) (1 + o(1))$, т.е.

$$\theta(x_0) = \frac{2}{3} (\beta - 1) (1 + o(1)).$$

При $x_0 \rightarrow 0$ имеем $\theta(x_0) \sim x_0$, и отсюда получаем, что

$$x_0 = \frac{2}{3} (\beta - 1) (1 + o(1)),$$

$$A(x_0) = -\ln(1-\theta(x_0)) = x_0 (1 + o(1)).$$

Заметим, что при $r \geq 3$ из (35) следует, что $n - N \rightarrow \infty$.

Используя соображения, приведенные при доказательстве теоремы 5, выводим, что при $r \geq 3$

$$\frac{a(n - rj, N - j)}{a(n, N)} = \frac{N^j x_0^{(r-1)j}}{n^{rj}} (1 + o(1)), \quad (36)$$

$$\mathbf{E}(\kappa_r(n, N))_j = N^j x_0^{(r-1)j} a_r^j (1 + o(1)), \quad j = 1, 2, \dots$$

В частности, при $j = 1$

$$\mathbf{E}\kappa_r(n, N) = N x_0^{r-1} a_r (1 + o(1)) = N \left(\frac{2}{3} \right)^{r-1} \left(\frac{n}{N} - 1 \right)^{r-1} a_r (1 + o(1)),$$

и условие $\mathbf{E}\kappa_r(n, N) \rightarrow \lambda > 0$ равносильно (35). При $r \geq 3$ отсюда следует, что $\mathbf{E}(\kappa_r(n, N))_j = \lambda^j (1 + o(1))$, $j = 1, 2, \dots$. Теорема 6 доказана.

З а м е ч а н и е 4. При $r = 2$ условие (35) означает, что $n - N = \lambda \in \mathbf{N}$ при всех достаточно больших значениях n и N . Но тогда $\mathbf{P}\{\kappa_2(n, N) \leq \lambda\} = 1$ и случайная величина $\kappa_2(n, N)$ асимптотически вырождена в точке λ . В этом случае формулы, аналогичные (36), выглядят следующим образом:

$$\mathbf{E}(\kappa_2(n, N))_j = \frac{\lambda!}{(\lambda - j)!} (1 + o(1)), \quad j = 1, \dots, \lambda;$$

$\mathbf{E}(\kappa_2(n, N))_j = 0$ при $j > \lambda$ и всех достаточно больших значениях n и N .

З а м е ч а н и е 5. Асимптотика чисел $a(n, N)$ при $n, N \rightarrow \infty$ и выполнении условий (8) дается соотношениями (27), (28). Если $N = (\ln n)/2 + O((\ln n)^{7/12})$, то эта асимптотика приведена в [1, с. 85] (см. замечание 2).

Пусть теперь $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$n - N = o(\sqrt{n}) \geq 0. \quad (37)$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 7. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнено условие (37). Тогда

$$a(n, N) = \frac{1}{(n - N)!} \left(\frac{3}{2} n^2 \right)^{n - N} (1 + o(1)). \quad (38)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулы (31) следует, что при $n - N \rightarrow \infty$

$$a(n, N) = \frac{n!}{N!} \frac{(A(x_0))^N}{x_0^n} \frac{1}{\sqrt{2\pi N \mathbf{D}\xi_1}} (1 + o(1)), \quad (39)$$

где величина $x = x_0 = t_0 e^{-t_0}$ определяется согласно (23), $\beta = n/N = 1 + o(1/\sqrt{N})$,

$$\mathbf{D}\xi_1 = \beta(1 - \beta) - \frac{t_0^2(3 - t_0)}{(1 - t_0)^4 \ln(1 - t_0)} > 0$$

(см. замечание 3).

В процессе доказательства теоремы 6 было установлено, что при $\beta = 1 + o(1)$

$$x_0 = \frac{2(\beta - 1)}{3} (1 + o(\beta - 1)) = \frac{2(n - N)}{3N} \left(1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \right).$$

Поэтому при условии (37)

$$\frac{(A(x_0))^N}{x_0^n} = \left(\frac{3eN}{2(n - N)} \right)^{n - N} (1 + o(1)). \quad (40)$$

Кроме того,

$$\mathbf{D}\xi_1 = \frac{n - N}{N} \left(1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \right),$$

поскольку $t_0 = x_0(1 + O(\beta - 1))$. Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi N \mathbf{D}\xi_1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(n - N)}} (1 + o(1)). \quad (41)$$

Наконец, из (37) следует, что

$$\frac{n!}{N!} = n^{n - N} (1 + o(1)) = N^{n - N} (1 + o(1)). \quad (42)$$

Из формул (39)–(42) получаем оценку (38) по формуле Стирлинга, если $n - N \rightarrow \infty$. Если же $n - N = O(1)$, то эта оценка следует из соотношений [7, с. 239]

$$a(n, N) = \sum_{k=N}^n C_{n-1}^{k-1} n^{n-k} |s(k, N)|, \quad N = 1, \dots, n,$$

а также второй формулы Мозера–Вимана для чисел Стирлинга первого рода $s(k, N)$ [8, с. 150], имеющей вид:

$$|s(k, N)| = C_k^N \left(\frac{N}{2} \right)^{k-N} (1 + o(1)), \quad k = N, \dots, n.$$

Теорема 7 доказана.

Следствие. При условиях теоремы 7

$$\mathbf{P}\{\nu_n = N\} = \frac{n^{-N}}{(n-N)!} \left(\frac{3n}{2} \right)^{n-N} (1 + o(1)).$$

Пусть теперь $\mu(n, N)$ — случайная величина, равная объему компоненты, содержащей фиксированный элемент, в случайном отображении n -элементного множества в себя, имеющем N компонент связности.

Теорема 8. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнены условия (8). Тогда

$$\mathbf{P}\{\mu(n, N) = k\} = \frac{k a_k x_0^{k-1}}{A'(x_0)} (1 + o(1)), \quad (43)$$

где x_0 определяется так же, как и в теореме 4.

Оценка (43) следует из теоремы 4 и формул (27), (28), если воспользоваться очевидными равенствами

$$\mathbf{P}\{\mu(n, N) = k\} = \frac{C_{n-1}^{k-1} a(k, 1) a(n-k, N-1)}{a(n, N)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

З а м е ч а н и е 6. В условиях теоремы 8 математическое ожидание для предельного распределения равно $(B(x_0) - 1)(2B(x_0) + 1)$, $B(x_0) = (1 - \theta(x_0))^{-1}$. При $\beta \rightarrow \infty$

$$(B(x_0) - 1)(2B(x_0) + 1) = \beta \ln \beta (1 + o(1)).$$

З а м е ч а н и е 7. Если ξ_n — случайная величина, равная объему компоненты, содержащей фиксированный элемент, в случайном отображении n -элементного множества в себя, то при $n \rightarrow \infty$ распределение ξ_n/n слабо сходится к распределению с плотностью $(4(1-x))^{-1/2}$, $0 < x < 1$ (см. [9]). Это означает, что значения ξ_n при больших n сосредоточены в окрестности точки $2n/3$, в то время как значения $\mu(n, N)$ при условиях теоремы 8 лежат в окрестности точки

$$\frac{\theta(x_0)(3 - \theta(x_0))}{(1 - \theta(x_0))^2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колчин В. Ф. Случайные отображения. М.: Наука, 1984, 208 с.
2. Колчин В. Ф. Задача о размещении частиц по ячейкам и случайные отображения. — Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. 21, в. 1, с. 48–62.
3. Багаев Г. Н. Предельные распределения метрических характеристик случайного неразложимого отображения. — Комбинаторный и асимптотический анализ, № 2. Красноярск: Красноярск. гос. ун-т, 1977, с. 55–61.
4. Багаев Г. Н. Распределение числа вершин в компоненте неразложимого отображения. — Докл. БССР, 1977, т. 21, № 12, с. 1061–1063.
5. Павлов Ю. Л. Предельные распределения некоторых характеристик случайных отображений с одним циклом. — Математические вопросы моделирования сложных объектов. Петрозаводск: Карельский филиал АН СССР, 1979, с. 48–55.
6. Павлов Ю. Л. Предельные распределения одной характеристики случайного отображения. — Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. 26, в. 4, с. 841–847.
7. Сачков В. Н. Вероятностные методы в комбинаторном анализе. М.: Наука, 1978, 288 с.

8. Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1977, 320 с.
9. Степанов В. Е. Случайные отображения с одним притягивающим центром. — Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. 16, в. 1, с. 148–157.

Поступила в редакцию
21.XI.2000

© 2003 г.

HESS K. T.*

CONDITIONAL ZERO-ONE LAWS

Мы говорим, что для некоторого класса событий выполняется условный закон нуля или единицы, если этот класс является подмножеством пополнения «обуславливающей» σ -алгебры. В этом случае условная вероятность события из этого класса есть индикаторная функция. Поэтому условная вероятность почти наверное принимает только значения нуля и единицы; в безусловном случае индикаторные функции суть почти наверное константы.

Рассматриваются два частных случая закона нуля или единицы: если последовательность случайных величин условно независима, то для ее хвостовой σ -алгебры выполняется закон нуля или единицы — это является обобщением закона нуля или единицы Колмогорова; если же последовательность дополнительно условно одинаково распределена, тогда для ее перестановочной σ -алгебры, содержащей хвостовую σ -алгебру, верен закон нуля или единицы — это обобщает закон нуля или единицы Хьюитта и Сэвиджа.

Ключевые слова и фразы: условная вероятность, условная независимость, законы нуля или единицы.

1. Introduction. In many situations we are interested in the properties of the events of special σ -algebras. E.g., for a sequence of random variables the limit of the sequence of its means is measurable with respect to the tail σ -algebra and the limit of the sequence of its partial sums is measurable with respect to the permutable σ -algebra.

In classical probability theory a class of events fulfills a Zero-One Law if the class is degenerate in the sense that every event of the class has either the probability zero or one. The Zero-One Laws by Kolmogorov and by Hewitt and Savage say that the tail σ -algebra and the permutable σ -algebra are degenerate if the sequence of random variables is independent or independent and identically distributed, respectively.

In many models we do not have independence but we have conditional independence, given a σ -algebra which may be supposed to be generated by a structure variable. Such an assumption is reasonable, e.g., in two-stage statistical models: The first stage is to realize the structure variable and the second stage is to realize a sequence of random variables with a given conditional distribution with respect to the structure variable.

For the case of conditional independence Hunt [9] proved a generalization of Kolmogorov's Zero-One Law. Combining this result with the consideration of conditional independence by Chow and Teicher [4] and Döhler [6] we are able to give a uniform theory of conditional Zero-One Laws.

It is well known that in general there is no implication between conditional independence and independence; however conditionally identically distributed random variables are identically distributed. Therefore we show a generalization of Hewitt–Savage Zero-One

* Institut für Mathematische Stochastik, Technische Universität Dresden, D-01062 Dresden, Germany; e-mail: hess@math.tu-dresden.de