Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Королев, О сходимости распределений случайных сумм независимых случайных величин к устойчивым законам, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 4, 818–820

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2609>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 07:44:32

З а м е ч а н и е 5. Было бы интересно получить утверждение, аналогичное нашему, для так называемых адаптивных оценок плотности распределения, т.е. оценок, не зависящих от априорного класса гладкости $\Sigma(\beta, L)$. Ядерная оценка таковой не является, однако в последнее время такие оценки начали появляться (см. [6]–[8]), причем их скорость сходимости совпадает с оптимальной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979, 528 с.
2. *Козаченко Ю. В., Островский Е. И.* Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских. — Теория вероятн. и матем. статист., (Киев, КГУ) 1985, в. 32, с. 43–52.
3. *Казбарас А.* Неравенства экспоненциального типа для некоторых статистических оценок плотности распределения. — Литов. матем. сб., 1981, т. 21, в. 4, с. 149–158.
4. *Рудзис Р.* О распределении функционалов типа супремума от непараметрических оценок плотности распределения и спектральной плотности. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 2, с. 254–267.
5. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1986, 492 с.
6. *Бобров П. Б., Островский Е. И.* Адаптивное оценивание регрессии, плотности и спектра. — Заводская лаборатория, 1996, № 7, с. 55–57.
7. *Островский Е. И.* Алгоритмизация процесса обработки статистических данных о надежности элементов. — В сб.: Доклады 4 Международной конференции «Безопасность АЭС и подготовка кадров» (Обнинск, 1995 г.), с. 100–102.
8. *Donoho D., Johnstone I., Kerkycharian G., Picard D.* Density Estimation by Wavelet Thresholding. — Stanford Univ., Technical Report № 426, 1993, p. 1–26.

Поступила в редакцию
13.IV.1995

Исправленный вариант
10.X.1996

© 1997 г.

КОРОЛЕВ В. Ю.*

О СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН К УСТОЙЧИВЫМ ЗАКОНАМ¹⁾

Приводятся необходимые и достаточные условия сходимости распределений случайных сумм независимых случайных величин к строго устойчивым законам.

Ключевые слова и фразы: устойчивые распределения, условие Линдберга, случайные суммы.

*Московский государственный университет, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра математической статистики, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 96-010-1919 и 96-01-01920.

Рассмотрим последовательность независимых не обязательно одинаково распределенных случайных величин (с.в.) $\{X_i\}_{i \geq 1}$. Будем считать, что $EX_i = 0$, $EX_i^2 = \sigma_i^2 < \infty$, $i \geq 1$. Более того, предположим, что с.в. $\{X_i\}_{i \geq 1}$ удовлетворяют условию Линдеберга: для любого $\tau > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|x| > \tau B_n} x^2 dF_i(x) = 0,$$

где $B_n^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$, $F_i(x) = P\{X_i < x\}$. Пусть $\{N_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность таких целочисленных положительных с.в., что при каждом n с.в. N_n и $\{X_i\}_{i \geq 1}$ независимы. Для натурального k положим $S_k = X_1 + \dots + X_k$. Хорошо известно, что в сделанных выше предположениях $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{S_n/B_n < x\} = \Phi(x)$ равномерно по x , где $\Phi(x)$ — стандартная нормальная функция распределения (ф.р.). Наша цель — показать, что несмотря на такое «хорошее» поведение слагаемых, гарантирующее очень легкие (нормальные) хвосты предельного закона для сумм S_n , случайные суммы S_{N_n} за счет «плохого» поведения индекса N_n могут иметь предельные распределения с тяжелыми хвостами, например, устойчивые, и тем самым поколебать устоявшееся представление, бытующее среди специалистов-прикладников, согласно которому тяжелые хвосты закона, предельного для сумм независимых случайных величин (присущие, например, устойчивым распределениям), непременно обусловлены наличием тяжелых хвостов у слагаемых (например, отсутствием у них моментов порядка меньше второго). Это представление основано на хорошо известных результатах (см., например, [1, гл. 7, раздел 35, теорема 2]). Конечно же, мы не пытаемся подвергнуть сомнению справедливость этих классических результатов. Мы просто обращаем внимание на то, что при решении прикладных задач (особенно в финансовой и актуарной математике, где в последнее время устойчивые законы находят весьма широкое применение) очень важен правильный выбор структурной модели. Из приводимых ниже результатов вытекает, что тяжелые хвосты распределения, предельного для сумм, могут возникать за счет случайности числа слагаемых в сумме. Мы показываем, что случайные суммы независимых слагаемых с описанными выше свойствами асимптотически строго устойчивы тогда и только тогда, когда асимптотически строго устойчивы их индексы.

Пусть $G_{\alpha, \theta}(x)$ — строго устойчивая ф.р. с показателем α и параметром θ , которой соответствует характеристическая функция

$$g_{\alpha, \theta}(t) = \exp \left\{ -|t|^\alpha \exp \left\{ -i \frac{\pi \theta \alpha}{2} \operatorname{sign} t \right\} \right\},$$

где $t \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha \leq 2$, $|\theta| \leq \theta_\alpha = \min(1, 2/\alpha - 1)$. Пусть $\{D_n\}_{n \geq 1}$ — такая последовательность положительных чисел, что $D_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Символ $\Rightarrow$ будет обозначать слабую сходимость.

Теорема. Предположим, что $N_n \rightarrow \infty$ по вероятности при $n \rightarrow \infty$. Для того чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{S_{N_n}}{D_n} < x \right\} = G_{\alpha, 0}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{B_{N_n}^2}{D_n^2} < x \right\} = G_{\alpha/2, 1}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство состоит в последовательном применении теоремы 16

из [2], согласно которой для того чтобы в сделанных предположениях

$$P\left\{\frac{S_{N_n}}{D_n} < x\right\} \Rightarrow P\{Z < x\}, \quad n \rightarrow \infty,$$

(где Z — некоторая с.в.), необходимо и достаточно, чтобы существовала такая с.в. $U \geq 0$, что, во-первых,

$$P\{Z < x\} = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{u}\right) dP\{U < u\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

и, во-вторых, $B_{N_n}/D_n \Rightarrow U$, $n \rightarrow \infty$, и теоремы 3.3.1 в [3], согласно которой

$$G_{\alpha,0}(x) = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{u}}\right) dG_{\alpha/2,1}(u), \quad x \in \mathbb{R},$$

с использованием свойства идентифицируемости масштабных смесей нормальных законов и абсолютной непрерывности устойчивых распределений.

Следствие. Если, в дополнение к условиям теоремы, слагаемые $\{X_j\}_{j \geq 1}$ одинаково распределены, то для того чтобы имела место сходимость (1), необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{N_n}{D_n^2} < x\right\} = G_{\alpha/2,1}(\sigma_1^2 x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.
2. Королев В. Ю. Сходимость случайных последовательностей с независимыми случайными индексами. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 2, с. 313–333.
3. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1985.

Поступила в редакцию
10.VI.1997

© 1997 г.

МАЗАЛОВ В. В.*, КОЧЕТОВ Э. А.*

ИГРА С ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКОЙ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ¹⁾

Рассматривается игра Γ двух игроков, определенная на случайных блужданиях следующего вида. Пусть x_n и y_n — независимые симметричные случайные блуждания на множестве $E = \{0, 1, \dots, K\}$, начинающиеся из состояний a и b соответственно ($1 \leq a < b \leq K-1$), поглощающиеся на концах с вероятностью

*Читинский институт природных ресурсов СО РАН, 672090 Чита, ул. Бутина, 26, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 96-01-01600.