Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Мазалов, Э. А. Кочетов, Игра с оптимальной остановкой случайных блужданий, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 4, 820–826

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2611>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 06:57:44

из [2], согласно которой для того чтобы в сделанных предположениях

$$P\left\{\frac{S_{N_n}}{D_n} < x\right\} \Rightarrow P\{Z < x\}, \quad n \rightarrow \infty,$$

(где Z — некоторая с.в.), необходимо и достаточно, чтобы существовала такая с.в. $U \geq 0$, что, во-первых,

$$P\{Z < x\} = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{u}\right) dP\{U < u\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

и, во-вторых, $B_{N_n}/D_n \Rightarrow U$, $n \rightarrow \infty$, и теоремы 3.3.1 в [3], согласно которой

$$G_{\alpha,0}(x) = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{u}}\right) dG_{\alpha/2,1}(u), \quad x \in \mathbb{R},$$

с использованием свойства идентифицируемости масштабных смесей нормальных законов и абсолютной непрерывности устойчивых распределений.

Следствие. Если, в дополнение к условиям теоремы, слагаемые $\{X_j\}_{j \geq 1}$ одинаково распределены, то для того чтобы имела место сходимость (1), необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{N_n}{D_n^2} < x\right\} = G_{\alpha/2,1}(\sigma_1^2 x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.
2. Королев В. Ю. Сходимость случайных последовательностей с независимыми случайными индексами. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 2, с. 313–333.
3. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1985.

Поступила в редакцию
10.VI.1997

© 1997 г.

МАЗАЛОВ В. В.*, КОЧЕТОВ Э. А.*

ИГРА С ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКОЙ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ¹⁾

Рассматривается игра Γ двух игроков, определенная на случайных блужданиях следующего вида. Пусть x_n и y_n — независимые симметричные случайные блуждания на множестве $E = \{0, 1, \dots, K\}$, начинающиеся из состояний a и b соответственно ($1 \leq a < b \leq K-1$), поглощающиеся на концах с вероятностью

*Читинский институт природных ресурсов СО РАН, 672090 Чита, ул. Бутина, 26, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 96-01-01600.

0.5 и с такой же вероятностью отражающиеся из состояний 0 и K соответственно в состояния 1 и $K-1$. Игроки I и II наблюдают за случайными блужданиями x_n и y_n и останавливают их в марковские моменты τ и σ , являющиеся стратегиями в игре. Каждый игрок знает значения K, a и b , но не располагает информацией о поведении противника.

Тогда при $x_\tau > y_\sigma$ второй игрок уплачивает первому единицу; если $x_\tau < y_\sigma$, то первый уплачивает единицу второму; а если $x_\tau = y_\sigma$ — объявляется ничья. Целью каждого игрока является максимизация математического ожидания полученного дохода.

Найдены ситуация равновесия и значение игры.

Ключевые слова и фразы: случайное блуждание, отражающие границы, стратегия, момент остановки, спектр, ситуация равновесия.

1. Введение. Рассмотрим игру Γ двух игроков, определенную на случайных блужданиях следующего вида. Пусть x_n и y_n — независимые симметричные случайные блуждания на множестве $E = \{0, 1, \dots, K\}$, начинающиеся из состояний a и b соответственно ($1 \leq a < b \leq K-1$), поглощающиеся на концах с вероятностью p и с вероятностью $q = 1-p$ отражающиеся из состояний 0 и K соответственно в состояния 1 и $K-1$. Игроки I и II наблюдают за случайными блужданиями x_n и y_n и останавливают их в марковские моменты τ и σ (см. [1]), являющиеся стратегиями в игре. Каждый игрок знает значения K, a и b , но не располагает информацией о поведении противника.

Тогда при $x_\tau > y_\sigma$ второй игрок уплачивает первому единицу; если $x_\tau < y_\sigma$, то первый уплачивает единицу второму; а если $x_\tau = y_\sigma$ — объявляется ничья. Целью каждого игрока является максимизация математического ожидания полученного дохода.

В [2] такая задача решена в случае $p = 1$. Здесь мы находим ситуацию равновесия в случае $p = 0.5$ и $a < b$. Подобным задачам оптимальной остановки, но для других наблюдаемых процессов, были посвящены работы [3]–[6].

2. Сведение игровой задачи к задаче оптимальной остановки. Чтобы сделать процесс наблюдений марковским, введем фиктивные состояния: -1 и $K+1$, в которые с вероятностью 0.5 переходит блуждающая частица из состояний 0 и K соответственно и затем поглощается в них. Доопределим выигрыш, полученный в этих состояниях. Будем считать, что выигрыш, который получит игрок, остановивший наблюдения в поглощающих состояниях, будет равен выигрышу, полученному в состояниях 0 и K соответственно.

Тогда, согласно условиям игры Γ , функция выигрыша первого игрока имеет вид

$$H(\tau, \sigma) = E \left\{ I_{\{0 \leq y_\sigma < x_\tau \leq K\}} - I_{\{0 \leq x_\tau < y_\sigma \leq K\}} + I_{\{y_\sigma = -1, x_\tau > 0\}} + I_{\{x_\tau = K+1, y_\sigma < K\}} - I_{\{x_\tau = -1, y_\sigma > 0\}} - I_{\{y_\sigma = K+1, x_\tau < K\}} \right\}. \quad (1)$$

Покажем, что построение ситуации равновесия в игре Γ сводится к решению задачи оптимальной остановки (см. [1]) процессов x_n и y_n . В этой связи будет использован достаточно простой принцип [2]: если для некоторой пары стратегий τ^* и σ^* игроков I и II $\sup_\tau H(\tau, \sigma^*) = \inf_\sigma H(\tau^*, \sigma) = H^*$, то (τ^*, σ^*) — ситуация равновесия, H^* — значение игры Γ .

Введем в рассмотрение векторы $s = (s_{-1}, s_0, \dots, s_{K+1})$, $t = (t_{-1}, t_0, \dots, t_{K+1})$, где $s_i = P\{x_\tau = i\}$; $t_i = P\{y_\sigma = i\}$; $i = -1, 0, \dots, K+1$; которые назовем спектрами

стратегий τ и σ . Тогда функция выигрыша (1) может быть представлена в виде

$$H(\tau, \sigma) = E \left\{ \left[- \sum_{i=1}^{K+1} t_i \right] I_{\{x_\tau \leq 0\}} + \left[\sum_{i=-1}^{x_\tau-1} t_i - \sum_{i=x_\tau+1}^{K+1} t_i \right] I_{\{0 < x_\tau < K\}} + \left[\sum_{i=-1}^{K-1} t_i \right] I_{\{x_\tau \geq K\}} \right\}.$$

Итак, если стратегия σ зафиксирована, задача построения $\sup_\tau H(\tau, \sigma)$ сводится к задаче оптимальной остановки случайного блуждания x_n с функцией выигрыша $f_1(x) = f(x, t)$, где

$$f(x, u) = \begin{cases} -1 + u_{-1} + u_0; & x = -1, 0; \\ 2 \sum_{i=-1}^x u_i - u_x - 1; & x = 1, \dots, K-1; \\ \sum_{i=-1}^{K-1} u_i; & x = K, K+1, \end{cases} \quad (2)$$

$u = (u_{-1}, u_0, \dots, u_{K+1})$, $\sum_{i=-1}^{K+1} u_i = 1$, $u_i \geq 0$, $i = -1, \dots, K+1$.

Очевидно, что при фиксированном τ задача второго игрока $\inf_\sigma H(\tau, \sigma)$ сводится к задаче оптимальной остановки случайного блуждания y_n с функцией выигрыша $f_2(y) = f(y, s)$.

Как известно (см. [1]), наибольшее значение функции выигрыша (цена) $v_i(x)$ в задаче оптимальной остановки симметричного случайного блуждания с функцией выигрыша $f_i(x)$ в состоянии x совпадает со значением наименьшей выпуклой вверх функции, большей или равной $f_i(x)$; $i = 1, 2$. Итак, если найдены функции $v_1(x)$ и $v_2(y)$, то

$$\begin{aligned} \sup_\tau H(\tau, \sigma^*) &= \sup_\tau E f_1(x_\tau) = v_1(a); \\ \inf_\sigma H(\tau^*, \sigma) &= -\sup_\sigma E f_2(x_\sigma) = -v_2(b). \end{aligned}$$

Теперь, если для некоторого набора (τ^*, σ^*) имеет место равенство

$$v_1(a) = -v_2(b) = H^*, \quad (3)$$

то это означает равновесие ситуации (τ^*, σ^*) . Метод доказательства равновесия, использованный ниже, будет состоять из решения соответствующих задач оптимальной остановки с функциями выигрыша (2) и проверки условия (3).

3. Решение задачи. Приступим к нахождению ситуации равновесия (τ^*, σ^*) . Для этого понадобится следующая теорема, сформулированная и доказанная в [2].

Теорема 1. Для того чтобы вектор $s = (s_{-1}, s_0, \dots, s_{K+1})$ был спектром некоторой стратегии τ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\sum_{i=-1}^{K+1} i s_i = a; \quad \sum_{i=-1}^{K+1} s_i = 1; \quad s_i \geq 0; \quad i = -1, 0, \dots, K+1. \quad (4)$$

Из этой теоремы следует, что для решения нашей задачи достаточно найти спектры оптимальных стратегий (s^*, t^*) . Это векторы $s^* = (s_{-1}, s_0, \dots, s_{K+1})$,

$t^* = (t_{-1}, t_0, \dots, t_{K+1})$, удовлетворяющие условиям (4) и условиям

$$\sum_{i=-1}^{K+1} it_i = b; \quad \sum_{i=-1}^{K+1} t_i = 1; \quad t_i \geq 0; \quad i = -1, 0, \dots, K+1. \quad (5)$$

Определим векторы s^*, t^* соотношениями

$$s_i = \begin{cases} \frac{b-a+1}{b+2}; & i = -1; \\ \frac{a+1}{b(b+2)}; & i = 2r, 1 \leq r \leq \min\{K-b-1, b\}; \\ (a+1) \frac{\max\{2b-K+1, 0\}}{b(b+2)}; & i = K; \\ 0 & \text{для других } i \in E. \end{cases} \quad (6)$$

$$t_i = \begin{cases} \frac{1}{b}; & i = 1; \\ \frac{b-1}{b(b+2)}; & i = 2r, 1 \leq r \leq \min\{K-b-1, b\}; \\ \frac{2}{b(b+2)}; & i = 2r+1, 1 \leq r \leq \min\{K-b-1, b-1\}; \\ \frac{(b+1) \max\{2b-K, (1-b)/(b+1)\} + b-1}{b(b+2)}; & i = K; \\ 0 & \text{для других } i \in E. \end{cases} \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что векторы t^*, s^* вида (6), (7) удовлетворяют условиям (4), (5) соответственно и, следовательно, являются спектрами некоторых стратегий τ^*, σ^* . Покажем, что эти стратегии и образуют ситуацию равновесия в игре Γ .

Теорема 2. Если $x_n(w)$ и $y_n(w)$ — симметричные случайные блуждания на множестве E , тогда значение игры Γ равно

$$H^* = -\frac{(b-a)(b+1)-1}{b(b+2)}, \quad (8)$$

а ситуация равновесия состоит из стратегий вида (6)–(7).

Доказательство. Рассмотрим случай $b+1 < K \leq 2b$, случаи $K = b+1$ и $K > 2b$ исследуются аналогично.

Функция $f_1(x)$ в этом случае имеет вид:

$$f_1(x) = \begin{cases} -1; & x = -1, 0; \\ \frac{1-b}{b}; & x = 1; \\ -1 + \frac{(b+1)(x+1)}{b(b+2)}; & x = 2, 3, \dots, 2(K-b)-1; \\ -1 + 2 \frac{(b+1)(K-b)+1}{b(b+2)}; & x = 2(K-b), \dots, K-1; \\ -1 + \frac{(b+1)(K+1)}{b(b+2)}; & x = K, K+1. \end{cases}$$

На рис. 1 представлен график функции $y = f_1(x)$, который лежит под отрезком прямой линии, соединяющей на графике точки $(x = -1; y = -1)$ и $(x = K; y = -1 + (b+1)(K+1)/(b(b+2)))$. Уравнение такой прямой имеет вид $y = -1 + (x+1)(b+1)/(b(b+2))$.

Согласно [1], это и есть решение задачи оптимальной остановки, т.е.

$$v_1(x) = -1 + \frac{(x+1)(b+1)}{b(b+2)}. \quad (9)$$

Из (9) находим, что в состоянии $x = a$

$$v_1(a) = -1 + \frac{(a+1)(b+1)}{b(b+2)}, \quad (10)$$

что совпадает с (8).

Функция $f_2(x)$ в этом случае имеет вид

$$f_2(x) = \begin{cases} -\frac{a+1}{b+2}; & x = -1, 0; \\ \frac{(a+1)(x-1) + b(b-2a)}{b(b+2)}; & x = 1, 2, \dots, 2(K-b-1)+1; \\ \frac{2(a+1)(K-b-1) + b(b-2a)}{b(b+2)}; & x = 2(K-b-1)+1, \dots, K-1; \\ \frac{(a+1)(K-1) + b(b-2a)}{b(b+2)}; & x = K, K+1. \end{cases}$$

На рис. 2 представлен график функции $y = f_2(x)$, который лежит под отрезком прямой линии, соединяющей на графике точки $(x=1; y=-(b-2a)/(b+2))$ и $(x=K; y=((a+1)(K-1) + b(b-2a))/(b(b+2)))$.

Уравнение функции $v_2(x)$ на отрезке $[1; K]$ имеет вид $y = [(a+1)(x-1) + b(b-2a)]/[b(b+2)]$. Следовательно, это и есть решение задачи оптимальной остановки, т.е.

$$v_2(x) = \frac{(a+1)(x-1) + b(b-2a)}{b(b+2)} \quad (11)$$

при $x \in [1; K]$.

В состоянии $x = b$ из (11) находим

$$v_2(b) = \frac{(b-a)(b+1) - 1}{b(b+2)}. \quad (12)$$

Таким образом, если выбрать стратегии τ^* и σ^* так, как представлено в (6)–(7), то из соотношений (10) и (12) получаем:

$$\sup_{\tau} H(\tau, \sigma^*) = \inf_{\sigma} H(\tau^*, \sigma) = -\frac{(b-a)(b+1) - 1}{b(b+2)},$$

что и доказывает теорему для случая $1 < K \leq 2b$.

Разница в доказательстве для случаев $K = b+1$ и $K > 2b$ заключается в том, что в первом случае в графиках 1 и 2 отсутствует середина, а во втором случае — конец.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что стратегии, образующие ситуацию равновесия в этой игре, представляют собой рандомизированные моменты остановки. В [2] приведен способ их построения по заданным спектрам.

З а м е ч а н и е 2. Интересно сравнить выражение (8) с выигрышем в задаче без отражения от границ [2], где он равен $H^* = -(b-a)/b$. Заметим, что в обоих случаях значение игры не зависит от длины интервала K .

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

Рис. 1. График функции $y = f_1(x)$. Случай $b + 1 < K \leq 2b$ Рис. 2. График функции $y = f_2(x)$. Случай $b + 1 < K \leq 2b$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А. Задачи и теоремы о процессах Маркова. М.: Наука, 1979.
2. Мазалов В. В. Игровые моменты остановки. Новосибирск: Наука, 1987.

3. Пресман Э. Л., Сонин И. М. Точки равновесия в обобщенной игровой задаче наилучшего выбора. — Теория вероятн. и ее примен., 1975, т. XX, в. 4, с. 770–781.
4. Fushimi M. The secretary problem in a competitive situation. — J. Oper. Res. Soc. Japan, 1981, v. 24, p. 350–358.
5. Enns E. G., Ferenstein E. The horse game. — J. Oper. Res. Soc. Japan, 1985, v. 28, p. 51–62.
6. Sakaguchi M. Some two person bilateral games in the generalized secretary problem. — Math. Japon., 1989, v. 34, p. 637–654.

Поступила в редакцию
31.VII.1996

© 1997 г.

МЕДНИЦКИЙ Ю. В.*

О СУЩЕСТВОВАНИИ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА $\mathbf{R}^\infty$

В работе доказывается существование сильного решения линейного стохастического дифференциального уравнения на $\mathbf{R}^\infty$. Используется бесконечномерная модификация метода последовательных приближений для решения систем частного вида, а также аналог метода Жордана приведения матрицы к клеточному виду. Показывается неединственность построенного решения.

Ключевые слова и фразы: стохастические уравнения.

Хорошо известно, что для всякого непрерывного линейного оператора A в банаховом пространстве X однозначно разрешимы обыкновенное дифференциальное уравнение

$$x'(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

и стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = Ax(t)dt + dw(t), \quad x(0) = x_0, \quad (2)$$

где $w(t)$ — произвольный винеровский процесс в X (см. определение ниже).

Однако ситуация кардинально меняется для небанаховых локально выпуклых пространств (даже для пространств Фреше). Может случиться, что уравнения (1) и (2) не имеют никаких решений (кроме нулевого решения уравнения (1)), а также, что они разрешимы неоднозначно (см. примеры в [1]).

Пример 1. Уравнение (1) в пространстве $\mathbf{R}^\infty$, соответствующее системе $x'_n(t) = x_{n+1}(t)$, $n \in \mathbf{N}$, имеет бесконечно много решений при любых начальных условиях. Действительно, пусть $x_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, тогда для любой бесконечно дифференцируемой функции φ на прямой такой, что $\varphi^{(n-1)}(0) = \alpha_n$, отображение $t \mapsto (x_n(t)) = (\varphi^{(n-1)}(t))$ будет являться решением этой системы. Ясно, что это решение всегда неединственно.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, непрерывно и плотно вложенное в локально выпуклое пространство X . Тогда для всякого $k \in X^*$, где X^* —

*Московский государственный университет, механико-математический факультет, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия.