Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Медницкий, О существовании сильных решений линейных стохастических дифференциальных уравнений на R^∞ , *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 4, 826–831

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2615>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:21:45

3. Пресман Э. Л., Сонин И. М. Точки равновесия в обобщенной игровой задаче наилучшего выбора. — Теория вероятн. и ее примен., 1975, т. XX, в. 4, с. 770–781.
4. Fushimi M. The secretary problem in a competitive situation. — J. Oper. Res. Soc. Japan, 1981, v. 24, p. 350–358.
5. Enns E. G., Ferenstein E. The horse game. — J. Oper. Res. Soc. Japan, 1985, v. 28, p. 51–62.
6. Sakaguchi M. Some two person bilateral games in the generalized secretary problem. — Math. Japon., 1989, v. 34, p. 637–654.

Поступила в редакцию
31.VII.1996

© 1997 г.

МЕДНИЦКИЙ Ю. В.*

О СУЩЕСТВОВАНИИ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА $\mathbf{R}^\infty$

В работе доказывается существование сильного решения линейного стохастического дифференциального уравнения на $\mathbf{R}^\infty$. Используется бесконечномерная модификация метода последовательных приближений для решения систем частного вида, а также аналог метода Жордана приведения матрицы к клеточному виду. Показывается неединственность построенного решения.

Ключевые слова и фразы: стохастические уравнения.

Хорошо известно, что для всякого непрерывного линейного оператора A в банаховом пространстве X однозначно разрешимы обыкновенное дифференциальное уравнение

$$x'(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

и стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = Ax(t)dt + dw(t), \quad x(0) = x_0, \quad (2)$$

где $w(t)$ — произвольный винеровский процесс в X (см. определение ниже).

Однако ситуация кардинально меняется для небанаховых локально выпуклых пространств (даже для пространств Фреше). Может случиться, что уравнения (1) и (2) не имеют никаких решений (кроме нулевого решения уравнения (1)), а также, что они разрешимы неоднозначно (см. примеры в [1]).

Пример 1. Уравнение (1) в пространстве $\mathbf{R}^\infty$, соответствующее системе $x'_n(t) = x_{n+1}(t)$, $n \in \mathbf{N}$, имеет бесконечно много решений при любых начальных условиях. Действительно, пусть $x_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, тогда для любой бесконечно дифференцируемой функции φ на прямой такой, что $\varphi^{(n-1)}(0) = \alpha_n$, отображение $t \mapsto (x_n(t)) = (\varphi^{(n-1)}(t))$ будет являться решением этой системы. Ясно, что это решение всегда неединственно.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, непрерывно и плотно вложенное в локально выпуклое пространство X . Тогда для всякого $k \in X^*$, где X^* —

*Московский государственный университет, механико-математический факультет, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия.

топологически сопряженное к X , ограничение k на H задается через представление Рисса в виде $\langle k, h \rangle = (j(k), h)_H$, где $j(k) \in H$.

О п р е д е л е н и е. Случайный процесс $w(t)$, $t \geq 0$, со значениями в X (определенный на некотором вероятностном пространстве Ω) называют винеровским процессом, ассоциированным с H , если для всякого $k \in X^*$ с $\|j(k)\|_H = 1$ процесс $\langle k, w(t) \rangle$ является винеровским в обычном смысле (см. [2]).

Напомним, что процесс $x(t)$, являющийся решением уравнения (2), называют его сильным решением, если для каждого фиксированного $t \geq 0$ случайный элемент $x(t)$ измерим относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_t$, порожденной элементами $w(s)$, $s \leq t$. В случае, когда X — банахово пространство, решение уравнения (2) будет сильным.

Мы будем рассматривать линейное стохастическое дифференциальное уравнение на $\mathbf{R}^\infty$ вида

$$dx(t) = [Ax(t) + f(t)]dt + dw(t), \quad (3)$$

иногда записывая его в координатной форме, подразумевая при этом соответствующее интегральное уравнение

$$x(t) = x(0) + \int_0^t (Ax(s) + f(s))ds + dw(t),$$

где A — элемент пространства $L(\mathbf{R}^\infty)$ линейных непрерывных операторов из $\mathbf{R}^\infty$ в $\mathbf{R}^\infty$, $f(t)$ — непрерывное отображение из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}^\infty$.

В интересующем нас случае $X = \mathbf{R}^\infty$ полагаем $H = l^2$. Тогда для всякой последовательности независимых винеровских процессов $w_n(t)$ процесс $w(t) = (w_n(t))_{n=1}^\infty$ является винеровским в смысле приведенного выше определения.

В [3] показано, что в пространстве $\mathbf{R}^\infty$ разрешимо всякое обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение вида

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad x(0) = x_0,$$

где A и f подразумеваются теми же, что и для уравнения (3).

Основной результат настоящей работы состоит в том, что уравнение (3) имеет сильное решение (однако, в отличие от банахова случая, такое решение не единственно). При доказательстве этого используется схема, аналогичная предложенной в [3], а при доказательстве предварительной леммы проводится бесконечномерная модификация метода последовательных приближений для решения системы частного вида.

Теорема. Уравнение (3) имеет сильное решение для произвольных оператора A из $L(\mathbf{R}^\infty)$ и функции f из $C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^\infty)$.

З а м е ч а н и е 1. Предположение о справедливости данного утверждения было высказано в замечании 6.6 работы [1].

Лемма. Уравнение, имеющее в координатной форме вид

$$dx_n(t) = x_{n+1}(t)dt + dw_n(t) + f_n(t)dt, \quad x(0) = x_0, \quad (4)$$

имеет сильное решение для произвольной функции f из $C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^\infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для упрощения выкладок, производимых в ходе дальнейших рассуждений, процессы $x(t)$ и $w(t)$ предполагаются выходящими из нуля. Решение будем искать методом последовательных приближений, строя его по аналогии с конечномерным вариантом, описанным, например, в [2]. Для начала перепишем уравнение (4) в виде

$$x_n(t) = \int_0^t (x_{n+1}(s) + f_n(s))ds + w_n(t). \quad (5)$$

Последовательные приближения определим индуктивной формулой

$$x_n^{(k+1)}(t) = \int_0^t \left(x_{n+1}^{(k)}(s) + f_n(s) \right) ds + w_n(t). \quad (6)$$

При этом в качестве нулевого приближения возьмем решение обыкновенного неоднородного дифференциального уравнения $[x_n^{(0)}(t)]' = x_{n+1}^{(0)}(t) + f_n(t)$ с нулевым начальным условием. Существование этого решения доказано в [3].

Теперь оценим $E|x_n^{(k+1)}(t) - x_n^{(k)}(t)|^2$. При $k = 0$ имеем $E|x_n^{(1)}(t) - x_n^{(0)}(t)|^2 = E|w_n(t)|^2 = t$. При $k > 0$, применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем:

$$\begin{aligned} E|x_n^{(k+1)}(t) - x_n^{(k)}(t)|^2 &= E\left| \int_0^t \left(x_{n+1}^{(k)}(s) - x_{n+1}^{(k-1)}(s) \right) ds \right|^2 \\ &\leq t \cdot E\left[\int_0^t \left(x_{n+1}^{(k)}(s) - x_{n+1}^{(k-1)}(s) \right)^2 ds \right] = t \cdot \int_0^t E|x_{n+1}^{(k)}(s) - x_{n+1}^{(k-1)}(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

Из этих оценок вытекает, что

$$E|x_n^{(k+1)}(t) - x_n^{(k)}(t)|^2 \leq \frac{t^{2k+1}}{2^k k!}. \quad (7)$$

и $x_n^{(k)}(t)$ сходится в среднем квадратичном к некоторому $x_n(t)$, причем равномерно на любом конечном отрезке, поскольку ряд из правых частей оценок (7) сходится. Докажем, что $x(t) = (x_n(t))$ является решением уравнения (4) (эквивалентного (5)). Заметим, что процесс $x(t)$ прогрессивно измерим как предел прогрессивно измеримых случайных функций. Теперь перейдем к пределу в формуле (6). Левая часть будет сходиться к $x_n(t)$, а интеграл в правой части сходится в среднем квадратичном к соответствующему интегралу с $x_{n+1}(s)$ вместо $x_{n+1}^{(k)}(s)$:

$$\begin{aligned} E\left| \int_0^t \left(x_{n+1}^{(k)}(s) + f_n(s) \right) ds - \int_0^t \left(x_{n+1}(s) + f_n(s) \right) ds \right|^2 \\ = E\left| \int_0^t \left(x_{n+1}^{(k)}(s) - x_{n+1}(s) \right) ds \right|^2 \leq t \cdot \int_0^t E|x_{n+1}^{(k)}(s) - x_{n+1}(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

Последнее стремится к нулю в силу равномерной сходимости в среднем квадратичном $x_{n+1}^{(k)}(s)$ к $x_{n+1}(s)$ на отрезке $[0, t]$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 2. Уравнение (5) при каждом ω можно рассматривать как обыкновенное интегральное уравнение. В качестве такового оно будет иметь бесконечно много решений. Для того чтобы получить их, достаточно прибавить к построенному в лемме решению неоднородного уравнения любое решение однородного дифференциального уравнения из примера 1. Получаемые таким образом решения могут оказаться, не согласованными с $\mathcal{F}_t$, т.е. не являющимися решениями стохастического уравнения. Таковыми, в частности, будут решения вида $x_n(\omega, t) = w_1(\omega, 1) \varphi^{(n-1)}(t)$, где $\varphi(t)$ берется из примера 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Пусть $A \in L(\mathbf{R}^\infty)$. Тогда этот оператор задается матрицей $\{a_{i,j}\}$ ($i, j \in \mathbf{N}$), причем k -я строка матрицы a_k есть элемент R_∞ — пространства последовательностей с конечным числом ненулевых членов. Пусть $e_k \in R_\infty$ — стандартные базисные векторы, а φ_k — соответствующие координатные функционалы. Рассмотрим следующий итеративный процесс, аналогичный описанному в [3].

Шаг 1. Положим $v_1^1 = e_1$. Если $a_1 \in \text{Lin}(v_1^1)$, то полагаем $\xi_1^1(t) = w_1(t)$, $g_1^1 = f_1$, $\lambda_{1,i}^1 = 0$ при $i \neq 1$, $\lambda_{1,1}^1$ таково, что $a_1 = \lambda_{1,1}^1 v_1^1$, и считаем, что шаг

закончен. Если же $a_1 \notin \text{Lin}(v_1^1)$, то полагаем $\xi_1^1(t) = w_1(t)$, $g_1^1 = f_1$, $\lambda_{1,2}^1 = 1$, $\lambda_{1,i}^1 = 0$ при $i \neq 2$ и $v_2^1 = \sum_{k=1}^\infty \varphi_k(v_1^1) a_k = a_1$.

В этом случае шаг продолжается. Опишем индуктивно его продолжение. Пусть шаг не закончен и векторы v_i^1 , числа $\lambda_{j,k}^1$, процессы $\xi_j^1(t)$, функции g_j^1 при $i \leq n$, $j \leq n-1$, $k \in \mathbb{N}$ построены. Если

$$\sum_{k=1}^\infty \varphi_k(v_n^1) a_k \in M = \text{Lin}(v_1^1, \dots, v_n^1),$$

то полагаем $\xi_n^1(t) = \sum_{k=1}^\infty \varphi_k(v_n^1) w_k(t)$, $g_n^1(t) = \sum_{k=1}^\infty \varphi_k(v_n^1) f_k(t)$, $\lambda_{n,i}^1 = 0$ при $i \geq n+1$, а при $i \leq n$ числа $\lambda_{n,i}^1$ таковы, что

$$\sum_{k=1}^\infty \varphi_k(v_n^1) a_k = \sum_{i=1}^n \lambda_{n,i}^1 \cdot v_i^1.$$

В этом случае считаем, что шаг окончен.

Если $\sum_{k=1}^\infty \varphi_k(v_n^1) a_k \notin M$, то полагаем $\lambda_{n,n+1}^1 = 1$, $\lambda_{n,i}^1 = 0$ при $i \neq n+1$, $\xi_n^1(t) = \sum_{k=1}^\infty \varphi_k(v_n^1) w_k(t)$, $g_n^1(t) = \sum_{k=1}^\infty \varphi_k(v_n^1) f_k(t)$ и $v_{n+1}^1 = \sum_{k=1}^\infty \varphi_k(v_n^1) a_k$. В этом случае шаг продолжается.

Пусть $N_1 = \{n \in \mathbb{N}: v_n^1 \text{ определено}\}$. Рассмотрим уравнения:

$$dy_n^1(t) = \sum_{j=1}^\infty \lambda_{n,j}^1 y_j^1(t) dt + d\xi_n^1(t) + g_n^1(t) dt \quad (n \in N_1).$$

Заметим, что эта система либо конечна, либо удовлетворяет условиям леммы и, следовательно, имеет решение $\{y_n^1(t): n \in N_1\}$. Она получена из исходной заменой переменных $y_n^1 = \sum_{k=1}^\infty \varphi_k(v_n^1) x_k$.

Положим $L_1 = \text{Lin}\{v_n^1: n \in N_1\}$, $D_1 = \{n \in \mathbb{N}: e_n \in L_1\}$. Отметим, что v_n^1 линейно независимы и что $e_1 \in L_1$, $1 \in D_1$. Если $D_1 = \mathbb{N}$, то процесс заканчивается на первом шаге. В противном случае действуем дальше по той же схеме.

Опишем шаг процесса с номером n . Считаем, что перед его началом определены $N_j = \{i \in \mathbb{N}: v_i^j \text{ определено}\}$, $1 \leq j \leq n-1$, $L_{n-1} = \text{Lin}\{v_i^j: i \in N_j, 1 \leq j \leq n-1\}$, $\{v_i^j: i \in N_j, 1 \leq j \leq n-1\}$ — линейно независимое подмножество R_∞ , $D_{n-1} = \{i \in \mathbb{N}: e_i \in L_{n-1}\}$, причем $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\} \subset L_{n-1}$.

Шаг n . Положим $v_n^n = e_m$, где $m = \min\{k: k \notin D_{n-1}\}$. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и v_i^n , $\lambda_{j,p}^n$, $\xi_j^n(t)$, $g_j^n(t)$ при $i \leq k$, $j \leq k-1$ построены. Если

$$\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(v_k^n) a_j \in M = \text{Lin}(L_{n-1} \cup \{v_1^n, \dots, v_k^n\}),$$

то в силу линейной независимости всех уже построенных v_j^i найдутся единственные $\mu^1, \dots, \mu^{n-1} \in R_\infty$, $\lambda_{k,1}^n, \dots, \lambda_{k,k}^n \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(v_k^n) a_j = \sum_{i=1}^k \lambda_{k,i}^n v_i^n + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{p \in N_i} \varphi_p(\mu^i) v_p^i.$$

Полагаем $\lambda_{k,i}^n = 0$ при $i > k$, $\xi_k^n(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(v_k^n) w_j(t)$,

$$g_k^n(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(v_k^n) f_j(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{p \in N_i} \varphi_p(\mu^i) y_p^i(t) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ |N_i| = p < \infty}} \varphi_p(\mu^i) \left(g_p^i - \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(v_p^n) f_j \right)$$

и считаем, что шаг окончен.

Если $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(v_k^n) a_j \notin M$, то полагаем $\lambda_{k,k+1}^n = 1$, $\lambda_{k,i}^n = 0$ при $i \neq k+1$ и

$$v_{k+1}^n = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(v_k^n) a_j, \quad \xi_k^n(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(v_k^n) w_j(t), \\ g_k^n(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(v_k^n) f_j(t).$$

В этом случае шаг продолжается.

В итоге n -го шага мы получаем $N_n = \{k \in \mathbb{N}: v_k^n \text{ определено}\}$. Рассмотрим систему уравнений:

$$dy_k^n(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{k,j}^n y_j^n(t) dt + d\xi_k^n(t) + g_k^n(t) dt \quad (k \in N_n).$$

Эта система получается из исходной заменой переменных вида

$$y_k^n = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(v_k^n) x_i.$$

Она либо конечна (в этом случае g_k^n в последнем уравнении является некоторым случайным процессом), либо удовлетворяет условиям леммы и, следовательно, имеет решение $\{y_k^n(t): k \in N_n\}$. На этом шаг n оканчивается.

Весь процесс состоит из конечного или счетного числа шагов. В итоге мы получаем, что определены $P = \{(n, k): v_k^n \text{ определено}\} \subset \mathbb{N}^2$, $H = \{v_k^n: (n, k) \in P\}$ и $\{y_k^n: (n, k) \in P\}$. Очевидно, что H — алгебраический базис в R_{∞} , так как множество H линейно независимо и $\text{Lin}(H)$ содержит все e_m . Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется единственный элемент $\mu_m \in R_P$ такой, что $e_m = \sum_{(n,k) \in P} \mu_{m,k}^n v_k^n$. Положим

$$x_m(t) = \sum_{(n,k) \in P} \mu_{m,k}^n y_k^n(t).$$

Из построения y_k^n вытекает, что процесс $x(t) = (x_m(t))$ прогрессивно измерим и удовлетворяет уравнению (3). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. Доказанная теорема существования решения уравнения (3) не затрагивает вопроса о его единственности. Поскольку разность двух решений уравнения (3) является при каждом ω решением однородного уравнения (1) с нулевым начальным условием, то единственность решения уравнения (3) эквивалентна единственности решения уравнения (1) с $x_0 = 0$.

Пусть $x(\omega, t)$ — решение уравнения (3), $z(t)$ — решение уравнения (1) с $x_0 = 0$. Тогда для произвольной измеримой функции $\xi(\omega)$ решением (3) будет являться также и $x(\omega, t) + \xi(\omega) z(t)$. Таким образом могут быть получены и несогласованные решения,

например, при $\xi(\omega) = w_1(\omega, 1)$. Из этого вытекает, что однозначная разрешимость уравнения (3) равносильна однозначной разрешимости уравнения (1) и имеет место тогда и только тогда, когда все решения (3) являются согласованными. Отметим, что однозначная разрешимость (1) для $A \in L(\mathbf{R}^\infty)$ равносильна (см. [1, пр. 4.24]) существованию $\exp(tA)$ для всех t . Согласно [4], последнее имеет место, если спектр A в произведении комплексных прямых не более чем счетен.

З а м е ч а н и е 4. Доказанная теорема показывает разрешимость уравнения (3) для «естественного» винеровского процесса в $\mathbf{R}^\infty$. Однако остается открытым вопрос, верен ли этот результат для произвольного винеровского процесса в $\mathbf{R}^\infty$ (в смысле приведенного выше определения). «Естественность» винеровского процесса существенно используется лишь при выводе оценок (7). Это позволяет надеяться на то, что утверждение теоремы остается справедливым и в общем случае.

З а м е ч а н и е 5. Отметим, что в [1] приведены примеры неразрешимых линейных стохастических дифференциальных уравнений в пространствах Фреше. Неизвестно, вытекает ли из разрешимости всех уравнений (1) в пространстве X разрешимость каждого уравнения (2) (хотя бы при некотором выборе H и соответствующем выборе винеровского процесса). Аналогичный вопрос открыт и для индивидуальных операторов — влечет ли разрешимость уравнения (1) с фиксированным A (для всех x_0) разрешимость уравнения (2) для какого-нибудь выбора H и $w(t)$ (а может быть, и для любого их выбора). При некоторых дополнительных условиях (типа существования непрерывного разрешающего семейства $S_t: X \rightarrow X$ уравнения (1)) положительный ответ на последний вопрос дан в [1].

З а м е ч а н и е 6. Имеется ряд достаточных условий разрешимости нелинейных уравнений в $\mathbf{R}^\infty$ вида

$$dx(t) = dw(t) + a(t, x(t)) dt, \quad (8)$$

однако они не охватывают произвольных линейных уравнений (см. [1]). Например, в [5] требуется, чтобы a принимало значения в l^2 (и при этом существенно зависело лишь от начальных компонент вектора $x(t)$). При этих предположениях доказывалось существование слабого решения уравнения (8). Можно проверить, что всякий непрерывный линейный оператор $A: \mathbf{R}^\infty \rightarrow l^2$ конечномерен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bogachev V. I. Deterministic and stochastic differential equation in infinite-dimensional spaces. — Acta Appl. Math., 1995, v. 40, p. 25–93.
2. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1975, 319 с.
3. Шкарин С. А. Несколько результатов о разрешимости обыкновенных линейных дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах. — Матем. сб., 1990, т. 181, № 9, с. 1183–1195.
4. Lemmert R., Weckbach A. Charakterisierungen zeilenendlicher Matrizen mit abzählbaren Spektrum. — Math. Z., 1984, v. 188, № 1, p. 119–129.
5. Jerschow M. Infinite-dimensional Wiener processes with drift. — Stochastic Process. Appl., 1994, v. 52, p. 229–238.

Поступила в редакцию
24.IV.1996