Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Нагаев, Некоторые уточнения вероятностных и моментных неравенств, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 4, 832–838

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2617>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 16:33:33

© 1997 г.

НАГАЕВ С. В.*

НЕКОТОРЫЕ УТОЧНЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ И МОМЕНТНЫХ НЕРАВЕНСТВ¹⁾

Получено вероятностное неравенство для суммы независимых случайных величин, которое уточняет одну из оценок, содержащихся в статье Д. Х. Фука и С. В. Нагаева [4].

Из этого неравенства, в частности, следуют недавние результаты И. Ф. Пинелиса [5] относительно оценки постоянных в неравенстве Розенталя.

Ключевые слова и фразы: функция Эйлера, неравенство Розенталя, неравенство Чебышева, абсолютная постоянная, абсолютный момент.

Пусть X_j , $j = 1, \dots, n$, — независимые случайные величины с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией $\sigma_j^2 = EX_j^2$. Положим

$$S = \sum_{j=1}^n X_j, \quad B^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2,$$

$$A_t = \sum_{j=1}^n E|X_j|^t, \quad A_t^+ = \sum_{j=1}^n E\{X_j^t; X_j \geq 0\}.$$

В [1] (см. также [2]) было доказано, что для $t > 2$

$$\frac{1}{2} \max\{A_t^{1/t}, B\} < (E|S|^t)^{1/t} < K_t \max\{A_t^{1/t}, B\}, \quad (1)$$

где $K_t < 2^t$.

В [3] верхняя оценка была получена в несколько другой форме:

$$E|S|^t < c_1(t) A_t + c_2(t) B^t, \quad t > 2, \quad (2)$$

где

$$c_1(t) = c^t, \quad c_2(t) = tc^{t/2} e^{cB} \left(\frac{t}{2}, c - \frac{t}{2} \right), \quad (3)$$

($B(\alpha, \beta)$ — функция Эйлера), а c — любая постоянная, удовлетворяющая условию $c > t/2$.

Доказательство основывалось на одном из неравенств работы [4].

С тех пор появилось довольно много статей, посвященных оценке постоянных в неравенствах (1) и (2) (см., например, работу [5] и библиографию к ней). Одно из возможных применений неравенства Розенталя — это оценка вероятности $P\{|S| \geq x\}$. Действительно, из неравенства (2) вытекает следующее обобщение неравенства Чебышева:

$$P\{|S| \geq x\} \leq c_1(t) \frac{A_t}{x^t} + c_2(t) \frac{B^t}{x^t}. \quad (4)$$

Следует однако заметить, что неравенство (4), вообще говоря, уступает в точности неравенствам, полученным в [4] (см. также [6]).

*Институт математики им. С. Л. Соболева, Университетский пр., 4, 630090 Новосибирск, Россия.

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01529).

Обратим внимание читателя на то, что из рассуждений, использовавшихся в [3] при выводе (2), следует более сильный результат:

$$E\{S^t; S \geq 0\} < c_1(t) A_t^+ + 2^{-1} c_2(t) B^t, \quad (5)$$

где $c_1(t)$ и $c_2(t)$ определяются равенствами (3).

Теперь выведем неравенство (5) другим способом и для других значений $c_1(t)$ и $c_2(t)$.

Теорема 1. Для любого $t > 2$ имеет место неравенство (5) с

$$c_1(t) = 3 \cdot 2^t \left(1 + \frac{2}{t}\right)^t, \quad c_2(t) = 2^{-t/2-1} t(t+2)^t \Gamma\left(\frac{t}{2}\right) e^{t^2/2}, \quad (6)$$

где Γ — функция Эйлера.

Доказательство. Очевидно,

$$E\{S^t; S \geq 0\} = t \int_0^\infty x^{t-1} P\{S \geq x\} dx. \quad (7)$$

Мы воспользуемся следующим неравенством:

$$P\{S \geq x\} < \sum_{i=1}^n P\{X_i > y\} + \exp\left\{-\frac{\alpha^2 x^2}{2e^t B^2}\right\} + \left(\frac{A_t^+}{\beta x y^{t-1}}\right)^{\beta x/y}, \quad (8)$$

где $\beta = t/(t+2)$, $\alpha = 1 - \beta$, $x > 0$, $y > 0$ (см. [6, следствие 1.7]). Положим $y = \beta x/2$. Очевидно,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{t-1} P\{S \geq x\} dx &= \int_0^\gamma + \int_\gamma^\infty < 2^t \left(1 + \frac{2}{t}\right)^t \frac{A_t^+}{t} \\ &+ \int_\gamma^\infty x^{t-1} \left(\sum_{i=1}^n P\left\{X_i > \frac{\beta x}{2}\right\} + \exp\left\{-\frac{\alpha^2 x^2}{2e^t B^2}\right\} + \left(\frac{2^{t-1} A_t^+}{(\beta x)^t}\right)^2 \right) dx, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\gamma = 2(A_t^+)^{1/t}/\beta$.

Далее,

$$\begin{aligned} \int_\gamma^\infty x^{t-1} \sum_{i=1}^n P\left(X_i > \frac{\beta x}{2}\right) dx &< \int_0^\infty x^{t-1} \sum_{i=1}^n P\left\{X_i > \frac{\beta x}{2}\right\} dx \\ &= 2^t \left(1 + \frac{2}{t}\right)^t \frac{A_t^+}{t}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \int_\gamma^\infty x^{t-1} \exp\left\{-\frac{\alpha^2 x^2}{2e^t B^2}\right\} dx &< e^{t^2/2} \left(\frac{t}{2} + 1\right)^t B^t \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x^2/2} dx \\ &= 2^{-t/2-1} e^{t^2/2} (t+2)^t \Gamma\left(\frac{t}{2}\right) B^t. \end{aligned} \quad (11)$$

Наконец,

$$(A_t^+)^2 \int_\gamma^\infty x^{1-t} dx = \left(\frac{\beta}{2}\right)^t \frac{A_t^+}{t}. \quad (12)$$

Из оценок (9)–(12) в силу равенства (7) следует утверждение теоремы.

Сравнивая значения постоянных в (5) и теореме 1, мы видим, что с ростом t $c_1(t)$ в теореме 1 растет медленнее, а $c_2(t)$ соответственно быстрее, чем в (5).

Разумеется, из неравенства (5) следует оценка для полного момента $E|S|^t$.

В цитированной выше работе Пинелиса [5] доказано, что для любых $t \geq 2$, $1 \leq c \leq t$

$$(E|S|^t)^{1/t} < K(cA_t^{1/t} + \sqrt{ce^{t/c}B}), \quad (13)$$

где K — абсолютная постоянная (на самом деле Пинелис получил неравенство (13) для независимых случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве). Что касается постоянной K в (13), то из заключительного неравенства в доказательстве теоремы 4.1 (с. 1689) можно заключить, что $K \leq 60$, если слагаемые симметричны.

Из неравенства (2) с постоянными (3) следует, что при $c \geq t/2 + 1$

$$(E|S|^t)^{1/t} < cA_t^{1/t} + \sqrt{2ce^{t/c}B}.$$

Это неравенство точнее, чем (13), в интервале $t/2 + 1 \leq c \leq t$.

При $c = t$ мы получаем неравенство

$$(E|S|^t)^{1/t} < tA_t^{1/t} + e\sqrt{2t}B,$$

более точное, чем неравенство (5.8) в работе [5].

Что касается теоремы 1, то она соответствует значению $c = 2/(1 + 3t^{-1} \ln t)$ в неравенстве (13). Действительно, если $c_1(t)$ и $c_2(t)$ задаются равенствами (6), то

$$(E|S|^t)^{1/t} < 4\sqrt{6}A_t^{1/t} + \sqrt{2t^{3/2}}e^{t/2}B.$$

Мы использовали здесь оценки

$$\Gamma\left(\frac{t}{2}\right) < \begin{cases} \sqrt{2\pi} \left(\frac{t-2}{2}\right)^{(t-1)/2} e^{-t/2+1/(3t)+1}, & t > 4, \\ 1, & 2 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

В работе [5] используется метод, восходящий к Буркхолдеру [7].

Наш дальнейший план состоит в том, чтобы, опираясь на модификацию неравенства (8) (см. ниже теорему 2), которая заключается во введении дополнительного свободного параметра c , получить для $c_1(t)$ и $c_2(t)$ в (5) оценку, зависящую от c . Это дает нам возможность вывести в качестве следствия неравенство (13).

Для доказательства теоремы 2 понадобится следующая

Лемма. Пусть $F(x)$ — любая функция распределения с $\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \leq 0$. Тогда для любых неотрицательных b , h , $t \geq 1$ и $0 < c \leq t$

$$\int_{x < b} e^{hx} dF(x) \leq 1 + e^c \sigma^2(b) \frac{h^2}{2} + \left(\left(\frac{t}{c} \right)^t + 1 \right) \alpha_t^+(b) \frac{e^{hb}}{b^t}, \quad (14)$$

где $\sigma^2(b) = \int_{x < b} x^2 dF(x)$, $\alpha_t^+(b) = \int_{0 < x < b} x^t dF(x)$, $\tilde{b} = \max(b, t/h)$.

Доказательство. Прежде всего,

$$\begin{aligned} \int_{x < b} e^{hx} dF(x) &= \int_{x < b} (e^{hx} - 1 - hx) dF(x) + \int_{x < b} (1 + hx) dF(x) \\ &< 1 + \int_{x < b} (e^{hx} - 1 - hx) dF(x). \end{aligned} \quad (15)$$

Не нарушая общности, можно считать, что $c/h < b$. Тогда

$$\int_{x < b} (e^{hx} - 1 - hx) dF(x) \equiv \int_{x < c/h} + \int_{c/h < x < b} \quad (16)$$

Нетрудно проверить, что

$$\int_{x < c/h} < \frac{e^c \sigma^2(b) h^2}{2}. \quad (17)$$

Функция $(e^{hx} - 1 - hx)$ возрастает по x при $x > t/h$ и убывает при $x < t/h$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{c/h < x < t/h} &< (e^c - 1 - c) c^{-t} h^t \alpha_t^+(t/h), \\ \int_{t/h < x < b} &< (e^{hb} - 1 - hb) b^{-t} \alpha_t^+(b). \end{aligned} \quad (18)$$

Заметим, что

$$h^t < \left(\frac{t}{e^b}\right)^t e^{hb}. \quad (19)$$

Из (18) и (19) следует, что

$$\int_{c/h < x < b} < \left(e^c \left(\frac{t}{ce}\right)^t + 1\right) \frac{\alpha_t^+(b) e^{hb}}{b^t} < \left(\left(\frac{t}{c}\right)^t + 1\right) \frac{\alpha_t^+(b) e^{hb}}{b^t}. \quad (20)$$

Собирая (15)–(17) и (20), мы приходим к (14).

Пусть $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ — любая совокупность из n неотрицательных чисел. Введем обозначения:

$$B^2(Y) = \sum_{j=1}^n \mathbf{E}\{X_j^2; X_j \leq y_j\}, \quad A_t^+(Y) = \sum_{j=1}^n \mathbf{E}\{X_j^t; 0 \leq X_j \leq y_j\}.$$

Теорема 2. Для любых $t \geq 1$, $0 < \alpha < 1$, $0 < c \leq t$, $y \geq \max_{1 \leq j \leq n} y_j$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_n \geq x\} &< \sum_{j=1}^n \mathbf{P}\{X_j \geq y_j\} + \exp\left\{\frac{\beta x}{y} - \frac{\alpha^2 x^2}{2e^c B^2(Y)}\right\} \\ &+ \exp\left\{\frac{\beta x}{y}\right\} \left(\left(\left(\frac{t}{c}\right)^t + 1\right) \frac{A_t^+(Y)}{\beta x y^{t-1}}\right)^{\beta x/y}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\beta = 1 - \alpha$.

Доказательство. Пусть $F_k(x) = \mathbf{P}\{X_k < x\}$. Положим

$$F_{ky}(x) = \begin{cases} F_k(x), & x < y, \\ F_k(y), & x \geq y. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что

$$F_1 * F_2 * \dots * F_n(x) - F_{1y_1} * F_{2y_2} * \dots * F_{ny_n}(x) \leq \sum_{j=1}^n \mathbf{P}\{X_k \geq y_k\}. \quad (22)$$

Далее, в силу (14),

$$\Pi_n(x) := e^{-hx} \Pi_1^n \int_{x < y_k} e^{hx} dF_k(x) < \exp\left\{\frac{e^c B^2(Y) h^2}{2} + \frac{\omega A_t^+(Y) e^{hy}}{y^t} - hx\right\},$$

где $\omega = (t/c)^t + 1$.

Полагая

$$f_1(h) = \frac{e^c h^2 B^2(Y)}{2} - \alpha h x,$$

$$f_2(h) = \frac{\omega A_t^+(Y) e^{h y}}{y^t} - \beta h x, \quad \beta = 1 - \alpha,$$

мы можем переписать последнее неравенство в виде

$$\Pi_n(x) < \exp \{f_1(h) + f_2(h)\}. \quad (23)$$

Без потери общности $\omega A_t^+(Y)/\beta x y^{t-1} < 1$. Пусть h_1 и h_2 есть соответственно, корни уравнений $f_1'(h) = 0$ и $f_2'(h) = 0$. Очевидно,

$$h_1 = \frac{\alpha x}{2B^2(Y)e^c}, \quad \frac{\omega A_t^+(Y) e^{h_2 y}}{y^{t-1}} = \beta x. \quad (24)$$

Пусть $h_1 \leq h_2$. Функция $f_2(h)$ убывает при $h < h_2$. Поэтому

$$f_2(h_1) < f_2(0) = \frac{\omega A_t^+(Y)}{y^t} < \frac{\omega A_t^+(Y) e^{h_2 y}}{y^t} = \frac{\beta x}{y}. \quad (25)$$

С другой стороны,

$$f_1(h_1) = -\frac{\alpha^2 x^2}{2e^c B^2(Y)}. \quad (26)$$

Полагая в (23) $h = h_1$ из равенства (24), мы находим, что при $h_1 \leq h_2$

$$\Pi_n(x) \leq \exp \left\{ \frac{\beta x}{y} - \frac{\alpha^2 x^2}{2e^c B^2(Y)} \right\}. \quad (27)$$

Пусть теперь $h_1 \geq h_2$. Функция $f_1(h)$ убывает при $h < h_1$. Поэтому $f_1(h_2) < f_1(0) = 0$.

С другой стороны, вследствие (24)

$$f_2(h_2) = \frac{\beta x}{y} - \beta x h_2.$$

Полагая теперь в (23) $h = h_2$ и используя второе из равенств (24), имеем:

$$\Pi_n(x) < \exp \left\{ \frac{\beta x}{y} - \beta x h_2 \right\} < \exp \left\{ \frac{\beta x}{y} \right\} \left(\frac{\omega A_t^+(Y)}{\beta x y^{t-1}} \right)^{\beta x/y}. \quad (28)$$

Заметим, что

$$F_{1y_1} * F_{2y_2} * \dots * F_{ny_n}(\infty) - F_{1y_1} * F_{2y_2} * \dots * F_{ny_n}(x) < \Pi_n(x). \quad (29)$$

Комбинируя (22) и (27)–(29), мы получаем желаемый результат.

Основным преимуществом оценки (21) по сравнению с (8) является то, что она в большей степени позволяет варьировать коэффициент при $-x^2/B^2(Y)$ в нормальной компоненте. В частности, мы можем выбрать α и c так, чтобы этот коэффициент был сколь угодно близок к $\frac{1}{2}$. Именно это свойство оценки (21) позволяет получить из него неравенство типа (13), чем мы сейчас и займемся.

Теорема 3. При любых $t \geq 2$, $0 < \alpha < 1$, $0 < c \leq t$

$$\mathbf{E}\{S^t; S \geq 0\} \leq e^2 \left(2^{t+1} \beta^{-t} \left(\left(\frac{t}{c} \right)^t + 1 \right) A_t^+ + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{e^c}{\alpha^2} \right)^{t/2} t \mu_{t-1} B^t \right), \quad (30)$$

$$\beta = 1 - \alpha,$$

где μ_t — абсолютный момент порядка t стандартного гауссовского закона.

Доказательство. Мы будем рассуждать так же, как при доказательстве теоремы 1, но на этот раз воспользуемся неравенством (21), полагая в нем $y_j \equiv y = \beta x/2$. Кроме того, мы заменим $B^2(Y)$ и $A_t^+(Y)$ соответственно на B^2 и A_t^+ . Очевидно,

$$\int_0^\infty x^{t-1} \exp \left\{ -\frac{\alpha^2 x^2}{2e^c B^2} \right\} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{e^c}{\alpha^2} \right)^{t/2} \mu_{t-1} B^t. \quad (31)$$

Полагая $\gamma = 2^{1-1/t} (\omega A_t^+)^{1/t} / \beta$, где $\omega = (t/c)^t + 1$, имеем:

$$\int_0^\gamma x^{t-1} dx < \frac{2^{t-1} \beta^{-t} \omega A_t^+}{t}, \quad (32)$$

$$(\omega A_t^+)^2 \int_\gamma^\infty \frac{x^{t-1}}{(\beta x y^{t-1})^2} dx = \frac{2^{t-1} \omega A_t^+}{t \beta^t}, \quad (33)$$

где $y = y(x) = \beta x/2$. Далее,

$$\int_\gamma^\infty x^{t-1} \sum_{j=1}^n \mathbf{P} \left\{ X_j > \frac{\beta x}{2} \right\} dx < \frac{2^t A_t^+}{t \beta^t}. \quad (34)$$

Записывая $\mathbf{E}\{S^t; S \geq 0\}$ в виде $t \left(\int_0^\gamma + \int_\gamma^\infty \right) x^{t-1} \mathbf{P}\{S \geq x\} dx$ и используя при оценке $\int_0^\gamma$ неравенство (32), а при оценке $\int_\gamma^\infty$ — теорему 2 и неравенства (31), (33), (34), мы приходим к желаемому результату.

Следствие. Для любых $t \geq 2$, $0 < \alpha < 1$, $0 < c \leq t$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{1/t} |S|^t &< 4e^{2/t} \left(\frac{t}{\beta c} \right) (A_t)^{1/t} \\ &+ (2\pi)^{1/2t} \exp \left\{ \frac{c}{2} + \frac{2}{t} \right\} \frac{t^{1/t} \mu_{t-1}^{1/t} B}{\alpha}, \quad \beta = 1 - \alpha. \end{aligned} \quad (35)$$

Заметим, что при $t \geq 2$

$$(2\pi)^{1/2t} \mu_{t-1}^{1/t} < 1.414 \sqrt{t}.$$

Полагая теперь в (35) $\alpha = 0.26$, мы получаем

$$\mathbf{E}^{1/t} |S|^t < 15 \left(\left(\frac{t}{c} \right) A_t^{1/t} + \sqrt{t} e^{c/2} B \right), \quad 0 < c \leq t. \quad (36)$$

Произведя замену $c' = t/c$, мы можем переписать сумму в правой части этого неравенства в виде

$$c' A_t^{1/t} + \sqrt{t} e^{c'/2} B,$$

причем $c' > t$. Таким образом, неравенство (36) несколько сильнее, нежели (13), поскольку $\sqrt{t} e^{c'/2} \leq \sqrt{c'}$ при $c' \leq t$.

Полагая в (36) $c = \ln t - 2 \ln \ln t$, имеем:

$$(E|S|^t)^{1/t} \leq \frac{15t}{\ln t - 2 \ln \ln t} (A_t^{1/t} + B)$$

(ср. [8, теорема 4.1]).

Используя редукцию бесконечномерного случая к одномерному (см. [9, теорема 2]), нетрудно распространить двусторонний вариант оценки (30), а значит, и неравенство (35) на гильбертово пространство.

Неравенство вида

$$E\{S^t; S \geq 0\} > c(t) \max\{A_t^+, B^t\},$$

где $c(t)$ зависит только от t , невозможно.

Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть случайную величину X , которая принимает значение 1 с вероятностью $1 - p$ и $(p - 1)/p$ с вероятностью p . Считая, что $S = X$, мы видим, что в данном случае $A_t^+ = 1 - p$, $B^2 > (1 - p)^2/p$, $E\{S^t; S \geq 0\} = A_t^+$, т.е. $E\{S^t; S \geq 0\} < p^{t/2} B^t / (1 - p)^t$.

Неравенство типа

$$E|S|^t > c(t) \max\{A_t, B^t\}$$

для банаховых пространств, где $|\cdot|$ означает норму, получено в [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rosenthal H. P. On the subspaces of L_p ($p > 2$) spanned by sequences of independent random variables. — Israel J. Math., 1970, v. 8, p. 273–303.
2. Rosenthal H. P. On the span in L_p ($p > 2$) sequences of independent random variables. — In: Proceeding of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Vol. 2. Berkeley: Univ. California Press, 1972, p. 149–168.
3. Нагаев С. В., Пинелис И. Ф. Некоторые неравенства для сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, № 2, с. 254–263.
4. Фук Д. Х., Нагаев С. В. Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. 16, в. 4, с. 660–675.
5. Pinelis I. Optimum bounds for the distributions of martingales in Banach spaces. — Ann. Probab., 1994, v. 22, p. 1679–1706.
6. Nagaev S. V. Large deviations of sums of independent random variables. — Ann. Probab., 1979, v. 7, № 5, p. 745–789.
7. Burkholder D. L. Distribution function inequalities for martingales. — Ann. Probab., 1973, v. 1, p. 19–42.
8. Johnson W. B., Schechtman G., Zinn J. Best constants in moment inequalities for linear combination of independent and exchangeable random variables. — Ann. Probab., 1985, v. 13, p. 234–253.
9. Nagaev S. V. On a new approach to the study of the distribution of a norm of a random element in Hilbert space. — Probability Theory and Mathematical Statistics. Vol. 2. (Proceeding of the Fifth Vilnius Conference.)/Ed. by B. Grigelionis et al. Vilnius/Utrecht: Moksas/VSP, 1990, p. 214–226.
10. Нагаев С. В. О вероятностях больших уклонений в банаховых пространствах. — Матем. заметки, 1983, т. 34, № 2, с. 309–313.

Поступила в редакцию
12.V.1996