Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Хренников, p -адическое поведение бернуллиевских вероятностей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 4, 839–845

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2620>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:37:33

© 1997 г.

ХРЕННИКОВ А. Ю.*

***p*-АДИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ
БЕРНУЛЛИЕВСКИХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ¹⁾**

Мы изучаем стандартную бернуллиевскую вероятностную схему для независимых случайных величин (симметричный случай). Как всегда, изучаются пределы вероятностей, когда число испытаний стремится к бесконечности, причем пределы рассматриваются относительно *p*-адической метрики. Это довольно экзотическая метрика, и довольно неожиданно, что обычные (классические) вероятности имеют пределы в этой метрике. Таким образом, найдена новая асимптотика классических бернуллиевских вероятностей, которая до сих пор не была замечена.

Ключевые слова и фразы: бернуллиевская вероятность, схема Бернулли, *p*-адические числа, метрика, биномиальные коэффициенты.

1. Введение. Обычная бернуллиевская вероятностная схема для независимых одинаково распределенных случайных величин рассматривается с *p*-адической точки зрения. Представляется интересным, что вероятности некоторых (весьма естественных) событий имеют асимптотику в *p*-адической метрике. Эти вероятности являются рациональными числами. Поэтому возникает возможность изучения их асимптотики по отношению к произвольной метрике на поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и, в частности, в *p*-адической метрике. *p*-адическая теория вероятностей была построена в связи с проблемой статистической интерпретации *p*-адическизначных волновых функций в неархимедовой квантовой физике (основы неархимедовой физики изложены в работах [1], [9]–[11], [3]–[6]). В этой теории возникают *p*-адические коэффициенты, которые должны быть вероятностями с физической точки зрения (матрица плотности), но принадлежат полю *p*-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Таким образом, эти коэффициенты не могут быть вероятностями в рамках аксиоматики Колмогорова. Эта проблема стимулировала интерес к анализу оснований современной теории вероятностей. Была предложена новая (более общая) теория вероятностей, специальным случаем которой является обычная теория вероятностей.

p-адические вероятности были определены как пределы относительных частот по отношению к *p*-адической метрике (см. [3]–[6], ср. [12]).

В данной статье изучается следующая проблема. Рассматривается стандартная бернуллиевская схема для случайных величин $\xi_j(\omega)$, принимающих значения 0, 1 с вероятностями $\frac{1}{2}$, $j = 1, 2, \dots$. Рассмотрим сначала конечное число n случайных величин $\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$. Вероятностное пространство, соответствующее этим случайным величинам, — это пространство $\Omega_n = \{0, 1\}^n$, состоящее из всех векторов длины n с координатами 0 и 1. События определяются как подмножества Ω_n . Вероятность события A определяется (и это классическое определение вероятности) как $P_n(A) = |A|/|\Omega_n| = |A|/2^n$, где символ $|B|$ используется для обозначения числа элементов в множестве B . Типичная проблема обычной теории вероятностей состоит в нахождении асимптотики вероятностей $P_n(A)$, $n \rightarrow \infty$. Но вероятности $P_n(A)$ принадлежат полю рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Поэтому асимптотика $P_n(A)$, $n \rightarrow \infty$, может изучаться не только по отношению к обычной вещественной метрике $\rho_\infty(x, y)$ на $\mathbb{Q}$, но также по отношению к произвольной метрике $\rho(x, y)$ на $\mathbb{Q}$. Мы будем изучать

*Mathematical Institute, Bochum University, D-44780, Bochum, Germany; Московский институт электронной техники, 103498 Москва, Россия.

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Александра фон Гумбольдта.

случай p -адической метрики на $\mathbf{Q}$ (основные определения, касающиеся p -адических чисел, могут быть найдены в п. 2 статьи).

Какие события A будут изучаться? Конечно, эти события должны зависеть от простого числа p .

Как обычно, рассматриваются суммы $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^n \xi_k(\omega)$. Мы хотим найти ответ на вопрос: делится ли сумма $S_n(\omega)$ на p ? Положим

$$A(p, n) = \left\{ \omega \in \Omega_n : \text{сумма } S_n(\omega) \text{ делится на } p \right\}.$$

Тогда

$$P_n(A(p, n)) = \frac{L(p, n)}{2^n},$$

где $L(p, n)$ — число векторов $\omega \in \Omega_n$, для которых величина $|\omega| = \sum_{j=1}^n \omega_j$ делится на p .

Дополнение множества A обозначается символом $\bar{A}$. Таким образом, $\bar{A}(p, n)$ — это множество векторов $\omega \in \Omega_n$ таких, что сумма $S_n(\omega)$ не делится на p . Мы покажем, что с p -адической точки зрения множества $A(p, n)$ и $\bar{A}(p, n)$ являются асимптотически симметричными:

$$P_n(A(p, n)) \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad P_n(\bar{A}(p, n)) \rightarrow \frac{1}{2}$$

в p -адической метрике. Как уже отмечалось, бернуллиевские вероятности $P_n(A(p, n))$ и $P_n(\bar{A}(p, n))$ являются рациональными числами. Следовательно, мы можем ограничиться рассмотрением поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$, но с новой метрикой $\rho_p(x, y)$ на нем.

Вероятности $P_n(A(p, n))$ и $P_n(\bar{A}(p, n))$ — это классические объекты, но их p -адическая асимптотика не была замечена.

2. p -адические числа. Поле вещественных чисел $\mathbf{R}$ строится как пополнение поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$ по отношению к метрике $\rho(x, y) = |x - y|$, где $|\cdot|$ — обычная норма (метрика), соответствующая абсолютному значению разности. Для каждого простого числа p поле p -адических чисел $\mathbf{Q}_p$ строится аналогично, но с другой (p -адической) нормой $|\cdot|_p$, определяемой следующим образом. Сначала мы определим ее для натуральных чисел. Каждое натуральное число может быть представлено как произведение степеней простых сомножителей: $n = 2^{r_2} 3^{r_3} \times \dots \times p^{r_p} \times \dots$. По определению $|n|_p = p^{-r_p}$, $|0|_p = 0$ и $|-n|_p = |n|_p$. Далее $|\cdot|_p$ продолжается на рациональные числа как $|n/m|_p = |n|_p/|m|_p$ для $m \neq 0$. Пополнение поля $\mathbf{Q}$ по отношению к норме $\rho_p(x, y) = |x - y|_p$ является локально компактным полем $\mathbf{Q}_p$. Хорошо известно, что $|\cdot|$ и $|\cdot|_p$ — единственные (с точностью до эквивалентности) метрики на $\mathbf{Q}$. p -адическая норма удовлетворяет усиленному неравенству треугольника $|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$. Положим $\mathcal{U}_r(a) = \{x \in \mathbf{Q}_p : |x - a|_p \leq r\}$, $a \in \mathbf{Q}_p$, $r = p^n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Это по определению шар в $\mathbf{Q}_p$ с центром в точке a и радиусом r . Шары являются одновременно открытыми и замкнутыми. Положим $\mathcal{S}_r(a) = \{x \in \mathbf{Q}_p : |x - a|_p = r\}$. Это сфера в $\mathbf{Q}_p$ с центром a и радиусом r .

Любой элемент $x \in \mathbf{Q}_p$ имеет единственное (сходящееся по норме $|\cdot|_p$) каноническое разложение вида

$$x = \frac{a_{-n}}{p^n} + \dots + a_0 + \dots + a_k p^k + \dots, \quad (1)$$

где $a_j = 0, 1, \dots, p-1$ — «цифры» p -адического разложения. Мы будем использовать следующее обозначение: если $|x|_p = |y|_p$, $x, y \in \mathbf{Q}_p$, то мы записываем это как $x \sim y$ в $\mathbf{Q}_p$. Если x, y — рациональные числа, то запись $x \sim y$ означает, что x и y делятся в точности на одну и ту же степень p .

3. Предельные теоремы. В действительности асимптотика вероятностей $P_n(A(p, n))$ и $P_n(\bar{A}(p, n))$ также зависит от *p*-адической асимптотики *n*. Симметрия между $P_n(A(p, n))$ и $P_n(\bar{A}(p, n))$ соответствует случаю $n \rightarrow 1$ в $\mathbb{Q}_p$. Это эквивалентно рассмотрению подпоследовательностей последовательности случайных сумм $S_n(\omega)$ для $n = n_k \rightarrow 1$ в $\mathbb{Q}_p$. Следовательно, n_k должны иметь вид $n_k = 1 + j_k p^{m_k}$, где j_k и m_k — натуральные числа, причем j_k не делится на *p* и $m_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ (стремление к бесконечности в смысле обычной порядковой структуры). В частности, мы можем выбрать $n_k = 1 + p^k$, $k = 1, 2, \dots$.

Теорема 1. Пусть $p \neq 2$. Тогда вероятности $P_{n_k}(A(p, n_k))$ и $P_{n_k}(\bar{A}(p, n_k))$ стремятся к $\frac{1}{2}$ в *p*-адической метрике, когда n стремится к 1 в той же метрике.

Доказательство. Рассмотрим сначала простейший случай $n_k = 1 + p^k$, $k = 1, 2, \dots$. Очевидно, что

$$P_{n_k}(A(p, n_k)) = \sum_{j=1}^{p^k-1} \frac{C_{1+p^k}^{jp}}{2^{1+p^k}}$$

и

$$P_{n_k}(\bar{A}(p, n_k)) = \sum_{|j|_p=1} \frac{C_{1+p^k}^j}{2^{1+p^k}},$$

где $C_n^k = n!/(k!(n-k)!)$ — биномиальные коэффициенты. Далее мы будем использовать элементарный факт $C_n^m = C_n^{n-m}$. Обозначим через $N(p, k)$ множество натуральных чисел s , $0 \leq s \leq p^k$, делящихся на *p*, а через $\bar{N}(p, k)$ множество всех s , которые не делятся на *p*.

Если $s \in N(p, k)$, то число $\tilde{s} = n_k - s \in \bar{N}(p, k)$. Обозначим через $\bar{N}(p, k)$ множество всех таких чисел. Имеем:

$$\begin{aligned} 2^{n_k} &= \sum_{j=0}^{n_k} C_{n_k}^j = \sum_{s \in N(p, k)} C_{n_k}^s + \sum_{s \in \bar{N}(p, k)} C_{n_k}^s + \sum_{s \in \bar{N}(p, k) \setminus \bar{N}(p, k)} C_{n_k}^s \\ &= L_k + \tilde{L}_k + L_k^-. \end{aligned} \quad (2)$$

Мы получим следующую оценку:

$$|L_k^-|_p \leq p^{-k}. \quad (3)$$

Очевидно, что $\bar{N}(p, k) = \{s: s = 1 + pi\}$. Следовательно, $\bar{N} \setminus \tilde{N} = \{s: s = pi + l, l = 2, \dots, p-1\}$.

Таким образом, мы должны только оценить величину

$$C_{1+p^k}^{pi+l} = \frac{(1+p^k)p^k \times \dots \times (p^k - pi - l + 2)}{(pi+l)!}, \quad l = 2, \dots, p-1,$$

а затем применить усиленное неравенство треугольника. В этой дроби нас интересуют только числа, которые делятся на *p*. Таким образом, мы имеем:

$$\left| C_{1+p^k}^{pi+l} \right|_p = \left| p^k \frac{p^k - p}{p} \frac{p^k - 2p}{2p} \times \dots \times \frac{p^k - ip}{ip} \times \dots \times \frac{p^k - ip}{ip} \right|_p = \frac{1}{p^k}.$$

Равенство (2) может быть записано как

$$1 = \frac{L_k}{2^{n_k}} + \frac{\tilde{L}_k}{2^{n_k}} + \frac{L_k^-}{2^{n_k}}.$$

Используя равенство $L_k = \tilde{L}_k$, получаем:

$$2P_{n_k}(A(p, n_k)) + \frac{L_k^-}{2^{n_k}} = 1,$$

или

$$\frac{1}{2} - P_{n_k}(A(p, n_k)) = \frac{L_k^-}{2^{n_k+1}},$$

и

$$\left| P_{n_k}(A(p, n_k)) - \frac{1}{2} \right|_p \leq \frac{1}{p^k}.$$

Здесь были использованы оценка (3) и равенство $|2|_p = 1$, $p \neq 2$.

Доказательство в общем случае $n_k = 1 + j_k p^{m_k}$ практически такое же. Надо только использовать оценку

$$|L_{n_k}^-| \leq p^{-m_k},$$

которая может быть получена непосредственно с помощью факториального представления биномиальных коэффициентов.

Таким образом,

$$P_{n_k} \left\{ \omega \in \Omega_n: \text{сумма } S_{n_k}(\omega) \text{ делится на } p \right\} \rightarrow \frac{1}{2}$$

в p -адической топологии на $\mathbf{Q}$, где $n_k = 1 + j_k p^{m_k}$, $m_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ (в обычном смысле), и

$$P_{n_k} \left\{ \omega \in \Omega_n: \text{сумма } S_{n_k}(\omega) \text{ не делится на } p \right\} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Существуют также другие асимптотики в p -адической метрике.

Рассмотрим события

$$B(p, n, l) = \left\{ \omega \in \Omega_n: \text{сумма } S_n(\omega) \text{ в точности делится на } p^l \right\}.$$

Здесь «в точности» означает, что сумма $S_n(\omega)$ на p^{l+1} уже не делится.

Теорема 2. Пусть $p \neq 2$, $l = 1, 2, \dots$. Тогда вероятности $P_n(B(p, n, l))$ стремятся к нулю в p -адической метрике, когда n стремится к 1 в той же метрике.

Доказательство. Рассмотрим простейший случай: $l = 1$ и $n_k = 1 + p^k$. Используя усиленное неравенство треугольника, мы можем все свести к оценке $|C_{1+p^k}^{jp}|_p$. Легко видеть, что эта величина равна $1/p^{k-1}$. Аналогично, если $n_k = 1 + j_k p^{m_k}$, то $|C_{n_k}^{jp}|_p = 1/p^{m_k-1}$.

Положим $A(p, n, r) = \{\omega \in \Omega_n: S_n(\omega) = pi + r\}$ для $r = 0, 1, \dots, p-1$. Это событие состоит из всех таких ω , что остаток от деления $S_n(\omega)$ на p равен r . В частности,

$$A(p, n) \equiv A(p, n, 0) \quad \text{и} \quad \overline{A}(p, n) = \bigcup_{r=1}^{p-1} A(p, n, r).$$

Фактически в теореме 1 было доказано, что

$$P_n(A(p, n, r)) \rightarrow 0 \tag{4}$$

для $r = 2, \dots, p-1$ и $n \rightarrow 1$.

Что можно сказать о случае $p = 2$? В этом случае мы имеем:

$$\begin{aligned} A(2, n) &= \left\{ \omega \in \Omega_n: S_n(\omega) - \text{четное число} \right\}, \\ \overline{A}(2, n) &= \left\{ \omega \in \Omega_n: S_n(\omega) - \text{нечетное число} \right\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $P_n(A(2, n)) = P_n(\bar{A}(2, n))$. Следовательно, эти вероятности равны $\frac{1}{2}$. Конечно, предел постоянной вероятности один и тот же для всех $p = 2, 3, \dots$ и для вещественной метрики.

4. Более сложные предельные законы. Всюду далее мы рассматриваем случай $p \neq 2$. Сначала мы переформулируем наши результаты, используя язык *p*-адической топологии. Теорема 1 означает:

$$\lim_{n \rightarrow 1} P_n \{ \omega: S_n(\omega) \in \mathcal{U}_{1/p}(0) \} = \lim_{n \rightarrow 1} P_n \{ \omega: S_n(\omega) \in \mathcal{U}_{1/p}(1) \} = \frac{1}{2}.$$

Теорема 2 означает, что

$$\lim_{n \rightarrow 1} P_n \{ \omega: S_n(\omega) \in \mathcal{S}_{1/p^l}(0) \} = 0, \quad l = 1, 2, \dots.$$

Но $\mathcal{U}_1(0) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{S}_{1/p^i}(0)$, и, следовательно, мы имеем для $l = 1, 2, \dots$:

$$\lim_{n \rightarrow 1} P_n \{ \omega: S_n(\omega) \in \mathcal{U}_{1/p^l}(0) \} = \frac{1}{2}.$$

Далее, изучим асимптотику сумм $S_n(\omega)$ при $n \rightarrow m$ в $\mathbb{Q}_p$, где m — произвольное натуральное число.

Лемма 1. Пусть $m = 0, 1, \dots, p^s - 1$ ($s = 1, 2, \dots$), $r = 0, \dots, m$ и $l \geq s$. Тогда для всех $j = 1, 2, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow m-1} C_n^{m+jp^l} = 0.$$

Доказательство. Мы можем ограничиться рассмотрением случая, когда n имеют вид $n = (m-1) + p^k$, $k \rightarrow \infty$. В общем случае доказательство аналогично. Таким образом, мы имеем:

$$\begin{aligned} C_n^{m+jp^l} &\sim \frac{(p^k + (m-1)) \cdots p^k (p^k - p) \cdots (p^k - jp^l)}{p \cdots jp^l (jp^l + 1) \cdots (jp^l + m)} \\ &= \left[\frac{p^k + (m-1)}{jp^l + (m-1)} \cdots \frac{p^k + 1}{jp^l + 1} \right] \left[\frac{p^k - p}{p} \cdots \frac{p^k - jp^l}{jp^l} \right] \left[\frac{p^k}{jp^l + m} \right] \\ &= T_1 T_2 T_3. \end{aligned}$$

Очевидно, что $T_2 \sim 1$ в $\mathbb{Q}_p$.

Рассмотрим T_1 . Пусть $t = 1, \dots, m-1$. Мы можем записать $m-t$ в виде $m-t = p^{\alpha(t)} \gamma(t)$, где $\gamma(t)$ не делится на p . Тогда, так как $\alpha(t) < k$, для достаточно больших k мы имеем, что $p^k + m-t \sim p^{\alpha(t)}$ в $\mathbb{Q}_p$. Но $\alpha(t) < s \leq l$. Следовательно, $jp^l + m-t \sim p^{\alpha(t)}$ в $\mathbb{Q}_p$. Итак, $T_1 \sim 1$ в $\mathbb{Q}_p$.

Наконец, рассмотрим T_3 . Пусть $m = p^\beta \sigma$, $(p, \sigma) = 1$. Тогда $T_3 \sim p^{k-\beta}$ (это опять следствие неравенства $\beta < l$). Но $\beta \leq s-1$, и, следовательно, мы получаем оценку $|T_3|_p \leq p^{-k+s-1} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Теорема 3. Пусть m, r, s и l те же, что и в лемме 1. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow m} P_n \{ \omega: S_n(\omega) \in \mathcal{U}_{1/p^l}(r) \} = \frac{C_m^r}{2^m}.$$

Доказательство. В случае $r = 0, \dots, m-1$.

$$\begin{aligned} P_n \{ \omega: S_n(\omega) \in \mathcal{U}_{1/p^l}(r) \} &= \frac{1}{2^n} \sum_j C_n^{r+jp^l} = \frac{1}{2^n} \sum C_{m-1}^{r+jp^l} + \frac{1}{2^n} \sum C_{m-1}^{r-1+jp^l} \\ &= \frac{1}{2} \left(P_{n-1} \{ \omega: S_{n-1}(\omega) \in \mathcal{U}_{1/p^l}(r) \} + P_{n-1} \{ \omega: S_{n-1}(\omega) \in \mathcal{U}_{1/p^l}(r-1) \} \right) \\ &\rightarrow \frac{1}{2^n} [C_{m-1}^r + C_{m-1}^{r-1}] = \frac{C_m^r}{2^m}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали индукцию по m .

Теперь пусть $r = m$. Здесь мы имеем:

$$P_n \{ \omega: S_n(\omega) \in \mathcal{U}_{1/p^l}(m) \} = \frac{1}{2} P_{n-1} \{ \omega: S_{n-1}(\omega) \in \mathcal{U}_{1/p^l}(m-1) \} + \frac{1}{2^n} \sum C_{n-1}^{m+jp^l}.$$

Используя лемму 1, получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow m} P_n \{ \omega: S_n(\omega) \in \mathcal{U}_{1/p^l}(m) \} \\ = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow m-1} P_{n-1} \{ \omega: S_{n-1}(\omega) \in \mathcal{U}_{1/p^l}(m-1) \} = \frac{1}{2^m}. \end{aligned}$$

Мы опять использовали индукцию.

Формально эта теорема может быть переформулирована как следующий результат о сходимости вероятностных распределений:

Предельным распределением на $\mathbf{Q}_p$ последовательности сумм $S_n(\omega)$ при $n \rightarrow m$ в $\mathbf{Q}_p$ является дискретная мера $\kappa = 2^{-m} \sum_{r=0}^m C_m^r \delta_m$.

Следствие 1. Пусть m, r, s и l те же, что и в лемме 1. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow m} P_n \{ \omega: S_n(\omega) \in \mathcal{S}_{1/p^l}(r) \} = 0.$$

Заметим, что множество $A(p, n, r)$ совпадает с множеством $\{ \omega \in \Omega_n: S_n(\omega) \in \mathcal{U}_{1/p^l}(r) \} = C_m^r / 2^m$. Используя это топологическое описание, мы получаем

Следствие 2. Пусть $n \rightarrow m$ в $\mathbf{Q}_p$, где $m = 0, 1, \dots, p-1$. Тогда вероятности $P_n(A(p, n, r))$ стремятся к $C_m^r / 2^m$ для всех остатков $r = 0, \dots, m$.

Что можно сказать о случае $m \geq p$? В этом случае мы не можем получить аналог этого следствия, используя теорему 3. Общих результатов в этом направлении получить не удалось. Получен только следующий результат.

Теорема 4. Пусть $n \rightarrow p$ в $\mathbf{Q}_p$ и $r = 0, 1, \dots, p$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow p} P_n \{ \omega: S_n(\omega) \in \mathcal{U}_{1/p^l}(r) \} = \frac{C_p^r}{2^p},$$

где $s \geq 2$ для $r = 0, p$ и $s \geq 1$ для $r = 1, \dots, p-1$.

Доказательство. В случае $r = 0, p$ этот результат является следствием теоремы 3. В случае $r = 1, \dots, p-1$ мы опять можем использовать индукцию, основываясь на следствии 2.

Возможность получения p -адических аналогов стандартных предельных теорем теории вероятностей обсуждалась во время доклада автора на семинаре отдела теории вероятностей Математического института АН в ноябре 1993 г. Автор выражает глубокую благодарность Ю. В. Прохорову и В. М. Максимова за эту дискуссию и советы. Автор также глубоко признателен В. Альбеверию и Ю. А. Розанову за плодотворные обсуждения p -адической теории вероятностей, а также Л. Герритцену,

В. Шихову и А. Эскассуту за их помощь в p -адическом анализе. Настоящая форма p -адических предельных законов была получена под влиянием плодотворных обсуждений (о возможности использовать подпоследовательности последовательности сумм случайных величин) с Ю. В. Прохоровым, Ф. Гётце и А. В. Булинским во время Всемирного конгресса Общества Бернулли (Вена, август 1996 г.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Beltrametti E., Cassinelli G.* Quantum mechanics and p -adic numbers. — *Found. Phys.*, 1972, v. 2, p. 1–7.
2. *Borevich Z. I., Schafarevich I. R.* Number Theory. New York: Academic Press, 1966.
3. *Khrennikov A. Yu.* p -adic Valued Distributions in Mathematical Physics. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994.
4. *Хренников А. Ю.* p -адическая вероятность и статистика. — Докл. АН СССР, 1992, т. 322, № 6, с. 1075–1079.
5. *Хренников А. Ю.* Аксиоматика p -адической теории вероятностей. — Докл. АН СССР, 1992, т. 326, № 5, с. 796–800.
6. *Khrennikov A.* p -adic probability interpretation of Bell's inequality. — *Phys. Lett. A*, 1995, v. 200, p. 219–223.
7. *Koblitz N.* p -adic Analysis. A Short Course on Recent Work. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980.
8. *Mahler K.* Introduction to p -adic Numbers and Their Functions. (Cambridge Tracts in Math., V. 64.) Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1973.
9. *Vladimirov V. S., Volovich I. V.* p -adic quantum mechanics. — *Comm. Math. Phys.*, 1989, v. 123, p. 659–676.
10. *Vladimirov V. S., Volovich I. V., Zelenov E. I.* p -adic Numbers in Mathematical Physics. Singapore: World Scientific Publ., 1994.
11. *Vladimirov I. V.* p -adic string. — *Classical Quantum Gravity*, 1987, v. 4, p. 83–87.
12. *von Mises R.* The Mathematical Theory of Probability and Statistics. London: Academic Press, 1964.

Поступила в редакцию
26.IX.1996