Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Письма в редакцию, *Теория вероятн. и ее примен.*,
2003, том 48, выпуск 4, 840–841

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp263>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 18:10:38

© 2003 г.

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

Прямым следствием результатов в [2] и [3] является следующая эргодическая теорема для марковских процессов, которая по сравнению с теоремой Севастьянова [1] более удобна для применения.

1. Для эргодичности однородного марковского процесса со значениями в измеримом пространстве $[\mathcal{X}, \mathfrak{F}]$ достаточным, а в случае сепарабельной $\mathfrak{F}$ и необходимым, является следующее условие (все распределения определены на $\mathfrak{F}$, все множества измеримы): для каждого ε из $(0, 1)$ и каждого начального распределения $\mathbf{N}(\cdot)$ существуют вероятностное распределение $\mathbf{Q}$, множества C и B с положительной мерой $\mathbf{Q}(B)$ и положительные числа s, v, k такие, что

(i) для абсолютного распределения $\mathbf{P}_t^{\mathbf{N}}(\cdot)$ с $\mathbf{P}_0^{\mathbf{N}}(\cdot) = \mathbf{N}(\cdot)$ имеет место неравенство

$$\mathbf{P}_t^{\mathbf{N}}(C) \geq 1 - \varepsilon \quad \text{для всех } t \geq s,$$

(ii) для вероятности перехода $\mathbf{P}(x, t, \cdot)$ имеет место неравенство

$$\mathbf{P}(x, v, A) \geq k \mathbf{Q}(A)$$

для всех x из C и всех подмножеств A множества B .

2. Если условие (ii) выполняется при $C = \mathcal{X}$, то для расстояния по вариации $\mathcal{V}(t)$ между абсолютным и стационарным распределениями имеет место оценка

$$\mathcal{V}(t) \leq 2(1 - k \mathbf{Q}(B))^r, \quad \text{где } r = [v^{-1}t],$$

и сходимость к стационарному распределению равномерна по всем начальным распределениям марковского процесса.

Достаточность доказана в [3], необходимость вытекает из более сильного результата в [2]. Вторая часть теоремы доказывается повторным применением неравенства

$$\mathcal{V}(t + v) \leq \mathcal{V}(t)(1 - k \mathbf{Q}(B)),$$

которое получается из неравенства (5) в [3] при $C = \mathcal{X}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Севастьянов Б. А. Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами. — Теория вероятн. и ее примен., 1957, т. 2, в. 1, с. 106–116.
2. Смирнов С. Н. Обращение эргодической теоремы Б. А. Севастьянова. — Теория вероятн. и ее примен., 1989, т. 34, в. 2, с. 390–392.
3. Gillert H. Ein Ergodensatz für Markovsche Prozesse. — Math. Nachr., 1975, v. 67, p. 109–117.

29.XI.2002

Х. Гиллерт, Дрезден, Германия;
e-mail: HeinzGillert@mx.de

Моя статья «О существовании слабых решений для стохастических дифференциальных уравнений с ведущими L^0 -значными мерами» уже прошла в печать в журнале «Теория вероятностей и ее применения» (2002, т. 47, №4), когда я обнаружил пробел в формулировке теоремы 1. В ней условие 1) следует изложить следующим образом: «в обозначениях теоремы 1 из [2] функция $s_B^2(h)$ конечна $\mathbf{P} \times d\mathbf{B}$ -п.в. на

$\Omega \times \mathbf{R}_+$ при всех $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$, и справедливо неравенство...» (далее по тексту). Это дополнительное условие обеспечивает, чтобы для любого $\mathfrak{F}$ -прогрессивно измеримого процесса Y функция $h(Y)$ принадлежала $\hat{L}^2(\theta)$, что используется в доказательстве теоремы 1. Само же неравенство из условия 1) выражает ограниченность коэффициента h уравнения (5) по $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ в соответствующем смысле и, кроме того, обеспечивает безусловную сходимость в $\mathcal{S}^2$ ряда в правой части разложения (3) с $h(Y)$ вместо φ , но отсюда не вытекает, что $h(Y) \in \hat{L}^2(\theta)$, что можно показать следующим контрпримером.

Именно, пусть $E = [-1, 1]$, $\mathcal{E}$ — борелевская σ -алгебра на E , для $i = 3k - 1$ пусть X^i — независимые стандартные винеровские процессы, а для остальных i пусть $X^i \equiv 0$, также для $i = 3k - 1$ пусть $\rho_t^i(\omega, du) = k^{-1}|u|^{1/k} du$ и $\rho^i \equiv 0$ для остальных i , $B_t = t$, а $\mathcal{F}$ — фильтрация, порождаемая процессами X^{3k-1} , $k \in \mathbf{N}$. Определим для ограниченной $\mathcal{P} \otimes \mathcal{E}$ -измеримой функции φ на $\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E$

$$\theta_t(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E \varphi_{s,u}(\Omega) \rho^{3k-1}(du) \cdot X_t^{3k-1}.$$

Этот ряд сходится безусловно в $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$, и θ является конечной L^2 -значной случайной мерой на $(\Omega \times \mathbf{R}_+ \times E, \mathcal{P} \otimes \mathcal{E})$, ибо в обозначениях теоремы 1 из [2] $c_B^2(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} (\int_{-1}^1 |u|^{1/k} du)^2 < \infty$ и не зависит от t , так что $1 \in L^{1,2}(\theta)$. Пусть теперь $\varphi_{t,u}(\omega) = 1/u$ (и, скажем, $\varphi_{0,u}(\omega) = 0$). Тогда для $i = 3k - 1$ имеем $\int_E \varphi_{t,u} \rho^i(du) \equiv 0$, так что ряд в правой части (3) сходится безусловно в $\mathcal{S}^2$, ибо все его члены просто равны нулю, но $c_B^2(\varphi) = c_B^2(|\varphi|) = \sum_{k=1}^{\infty} (\int_{-1}^1 |u|^{1/k} du)^2 = \infty$ и тоже не зависит от t , так что $\varphi \notin \hat{L}^2(\theta)$. В этом и подобных случаях сумма ряда в правой части (3) не имеет смысла процесса стохастического интеграла вида $\varphi \times \theta$.

9.XII.2002

В. А. Лебедев