Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Афанасьев, О соотношении максимального и общего числа частиц в критическом ветвящемся процессе в случайной среде, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 3, 435–452

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp264>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 14:11:29

© 2003 г.

АФАНАСЬЕВ В. И.*

О СООТНОШЕНИИ МАКСИМАЛЬНОГО И ОБЩЕГО ЧИСЛА ЧАСТИЦ В КРИТИЧЕСКОМ ВЕТВЯЩЕМСЯ ПРОЦЕССЕ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ¹⁾

Пусть $\{\xi_n\}$ — критический ветвящийся процесс в случайной среде. Доказано, что при некоторых условиях отношение $\sum_{i=0}^n \xi_i$ к $\max_{0 \leq i \leq n} \xi_i$, рассматриваемое при условии $\{\xi_n > 0\}$, сходится по распределению при $n \rightarrow \infty$ к некоторой случайной величине, принимающей значения из $(1, +\infty)$.

Ключевые слова и фразы: ветвящийся процесс в случайной среде, условное случайное блуждание, условные предельные теоремы.

1. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ — ветвящийся процесс в случайной среде $\{\pi_n, n \in \mathbf{N}_0\}$, где $\pi_n = \{\pi_n(0), \pi_n(1), \pi_n(2), \dots\}$, $\pi_n(i) \geq 0$, $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_n(i) = 1$, $n \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, причем последовательности π_n независимы и одинаково распределены при разных n . По определению это означает, что случайные величины ξ_n являются неотрицательными целочисленными и

$$\xi_0 = 1, \quad \mathbf{E}(s^{\xi_{n+1}} \mid \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n) = (f_n(s))^{\xi_n},$$

где $f_n(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_n(i) s^i$, $s \in [-1, 1]$, $n \in \mathbf{N}_0$. Положим

$$X_i = \ln f'_{i-1}(1), \quad \eta_i = \frac{f''_{i-1}(1)}{2f'_{i-1}(1)^2}, \quad i \in \mathbf{N}.$$

Будем предполагать, что процесс $\{\xi_n\}$ является критическим, т.е. $\mathbf{E}X_1 = 0$, и выполнены условия: (а) конечны $\mathbf{E}X_1^2$, $\mathbf{E}\eta_1$, $\mathbf{E}X_1\eta_1$, причем $\mathbf{E}X_1^2 = \sigma^2 > 0$; (б) $\mathbf{E} \exp(-X_1) < +\infty$.

Пусть $T = \inf\{n: \xi_n = 0\}$ — момент вырождения $\{\xi_n\}$. Положим $m_n = \mathbf{E}_\pi \xi_n$ (символы $\mathbf{E}_\pi$ и $\mathbf{P}_\pi$ означают математическое ожидание и вероятность, вычисленные при условии, что среда $\{\pi_n\}$ фиксирована).

В работе автора [1] доказана следующая функциональная предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде.

* Московский энергетический институт, ул. Красноказарменная, 14, 105835 Москва, Россия; e-mail: viafan@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ, код проекта 01-01-00649, и RFBR-DFG, код проекта 02-01-04002.

Теорема 1. Пусть $\{\xi_n\}$ — критический ветвящийся процесс в случайной среде и выполнены условия (а), (b), тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\xi_{[nt]}}{m_{[nt]}}, t \in [0, 1] \mid T > n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu, \quad (1)$$

где μ — случайный процесс с неотрицательными постоянными реализациями на $(0, 1]$, причем $\mathbf{P}\{\mu > 0\} > 0$; сходимость в (1) надо понимать как сходимость по распределению в пространстве $D[u, 1]$ с топологией Скорохода при любом фиксированном $u \in (0, 1)$.

В частном случае, когда производящие функции $f_n(s)$, $n \in \mathbf{N}_0$, являются дробно-линейными, в работе автора [2] показано, что $\mu > 0$ п.н.

Из теоремы 1 вытекает следующая функциональная предельная теорема для логарифма критического ветвящегося процесса в случайной среде.

Теорема 2. Пусть $\{\xi_n\}$ — критический ветвящийся процесс в случайной среде, выполнены условия (а), (b) и $\mu > 0$ п.н. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\ln \xi_{[nt]}}{\sigma \sqrt{n}}, t \in [0, 1] \mid T > n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W^+(t), t \in [0, 1]\}, \quad (2)$$

где $\{W^+(t)\}$ — броуновская извилина; сходимость в (2) надо понимать как сходимость по распределению в пространстве $D[0, 1]$ с топологией Скорохода.

Доказательство. В работе [2] приведен вывод соотношения (2) из соотношения (1) для случая, когда производящие функции $f_n(s)$, $n \in \mathbf{N}_0$, дробно-линейны. Точно так же этот вывод осуществляется и в условиях теоремы 2. При этом надо использовать, во-первых, полученную Керстингом и Гейгером [3] асимптотическую формулу: при выполнении условия (а) и $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{T > n\} \sim \frac{c_2}{\sqrt{n}}, \quad (3)$$

где c_2 — положительная постоянная; и, во-вторых, следующие леммы 1 и 2, обобщающие соответственно леммы 6 и 7 из [2].

Чтобы сформулировать эти леммы, введем так называемое сопровождающее случайное блуждание $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbf{N}$. Оно имеет нулевой снос, поскольку процесс $\{\xi_n\}$ является критическим. Пусть $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots$ — строгие нижние лестничные моменты этого блуждания, т.е.

$$\tau_1 = \inf\{n: S_n < 0\}, \quad \tau_2 = \inf\{n > \tau_1: S_n < S_{\tau_1}\}, \dots$$

В работе М. В. Козлова [4] установлено, что если $\mathbf{E}X_1 = 0$, $0 < \mathbf{E}X_1^2 < +\infty$, то при любом $j \in \mathbf{N}_0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\tau_j \leq n < \tau_{j+1}\} \sim \frac{c_1}{\sqrt{n}}, \quad (4)$$

где c_1 — положительная постоянная. Следующее утверждение доказано в [1, лемма 10].

Лемма 1. Пусть $\{\xi_n\}$ — критический ветвящийся процесс в случайной среде и выполнено условие (а). Если $\{A_n\}$ — такая последовательность случайных событий, что при любом $j \in \mathbf{N}_0$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{A_n, T > n \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\} = l_j$, то существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{A_n \mid T > n\} = \frac{c_1}{c_2} \sum_{j=0}^{\infty} l_j,$$

где c_1, c_2 — постоянные из соотношений (4) и (3) соответственно.

Положим

$$Y_n(t) = \frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}, \quad t \in [0, +\infty), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Лемма 2. Пусть $\{\xi_n\}$ — критический ветвящийся процесс в случайной среде и выполнено условие (а), тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\{Y_n(t), t \in [0, +\infty) \mid T > n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W^+(t), t \in [0, +\infty)\}, \quad (5)$$

причем сходимость в (5) надо понимать как сходимость по распределению в пространстве $D[0, +\infty)$ с топологией Скорохода.

Сходимость конечномерных распределений в (5) установлена В. А. Ватутиным [5, лемма 5]. Плотность соответствующих вероятностных мер доказывается так же, как в [2, лемма 7].

З а м е ч а н и е 1. Другой вариант условий, при которых выполняется соотношение (2), приведен в работе М. В. Козлова [6]. Там предполагается, что выполнены условия (а), (b) и $\mathbf{E}X_1^4 < +\infty$.

З а м е ч а н и е 2. Из соотношений (2), (3) вытекают многочисленные следствия, установленные автором в работах [7]–[9]. В силу вышесказанного используемое в этих работах предположение о том, что производящие функции $f_n(s)$, $n \in \mathbf{N}_0$, дробно-линейны, оказывается излишним.

Цель настоящей работы — изучение соотношения максимального числа частиц $\max_{0 \leq i \leq n} \xi_i$ и общего числа частиц $\sum_{i=0}^n \xi_i$ в критическом ветвящемся процессе в случайной среде $\{\xi_n\}$, рассматриваемом при условии $\{T > n\}$. Оказывается, с ростом числа поколений n роль максимального поколения не уменьшается и доля числа частиц из максимального поколения в общем числе частиц стабилизируется и является положительной.

Более точно, имеет место следующий результат.

Теорема 3. Пусть $\{\xi_n\}$ — критический ветвящийся процесс в случайной среде, выполнены условия (а), (b) и $\mu > 0$ п.н., тогда

при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\sum_{i=0}^n \xi_i}{\max_{0 \leq i \leq n} \xi_i} \mid T > n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi, \quad (6)$$

где φ — случайная величина, принимающая значения из $(1, +\infty)$, причем φ есть сумма двух независимых случайных величин $\hat{\varphi}$ и $\check{\varphi}$ с функциями распределения соответственно

$$\hat{F}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n e^{-S_i} \leq x \mid S_1 > 0, \dots, S_n > 0 \right\}, \quad (7)$$

$$\check{F}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n e^{S_i} \leq x \mid S_1 \leq 0, \dots, S_n \leq 0 \right\}. \quad (8)$$

З а м е ч а н и е 3. Доказательство того, что пределы (7) и (8) существуют и задают собственные распределения на $(\frac{1}{2}, +\infty)$, можно найти в работе автора [10].

З а м е ч а н и е 4. Теорема 3 доставляет пока единственный пример результата, который доказывается с применением теоремы 1, но не может быть выведен из теоремы 2.

2. Доказательству теоремы 3 предположим ряд лемм. Следующий результат, доказанный в [1, лемма 12], существенно дополняет теорему 1 и играет важную роль в дальнейшем.

Лемма 3. Если $\{\xi_n\}$ — критический ветвящийся процесс в случайной среде и выполнены условия (а), (b), то при любом фиксированном $\delta \in (0, 1)$ и $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \sup_{\delta \leq t \leq 1} \left| \frac{\xi_{[nt]}}{m_{[nt]}} - \frac{\xi_n}{m_n} \right| \mid T > n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} 0.$$

Лемма 4. В условиях леммы 3 при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\sum_{i=0}^n \xi_i}{\sum_{i=0}^n m_i} - \frac{\xi_n}{m_n} \mid T > n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} 0.$$

Доказательство. В силу леммы 3 при фиксированных $\delta \in (0, 1)$ и $\varepsilon \in (0, +\infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{\xi_i}{m_i} - \frac{\xi_n}{m_n} \right| \leq \varepsilon, \forall i \in (\delta n, n] \mid T > n \right\} = 1. \quad (9)$$

Положим $a_n = \xi_n/m_n$. Если $|\xi_i/m_i - \xi_n/m_n| \leq \varepsilon$ при любом $i \in (\delta n, n]$, то $a_n - \varepsilon \leq \xi_i/m_i \leq a_n + \varepsilon$ при любом $i \in (\delta n, n]$, и поэтому

$$\begin{aligned} a_n - \varepsilon &= \frac{\sum_{i=[\delta n]+1}^n (a_n - \varepsilon) m_i}{\sum_{i=[\delta n]+1}^n m_i} \leq \frac{\sum_{i=[\delta n]+1}^n \xi_i}{\sum_{i=[\delta n]+1}^n m_i} \\ &\leq \frac{\sum_{i=[\delta n]+1}^n (a_n + \varepsilon) m_i}{\sum_{i=[\delta n]+1}^n m_i} = a_n + \varepsilon. \end{aligned} \quad (10)$$

Из соотношений (9) и (10) следует, что при фиксированных $\delta \in (0, 1)$ и $\varepsilon \in (0, +\infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{\sum_{i=[\delta n]+1}^n \xi_i}{\sum_{i=[\delta n]+1}^n m_i} - a_n \right| \leq \varepsilon \mid T > n \right\} = 1. \quad (11)$$

Далее, поскольку при фиксированном $t \in [0, 1]$ справедливы неравенства $\max_{0 \leq i \leq tn} \xi_i \leq \sum_{i=0}^{[tn]} \xi_i \leq (1 + tn) \max_{0 \leq i \leq tn} \xi_i$, то ввиду теоремы 2 при фиксированном $\delta \in (0, 1)$ и $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\ln \sum_{i=0}^{[\delta n]} \xi_i}{\sigma \sqrt{n}}, \frac{\ln \sum_{i=[\delta n]+1}^n \xi_i}{\sigma \sqrt{n}} \mid T > n \right\} \\ & \xrightarrow{\mathcal{D}} \left\{ \max_{0 \leq t \leq \delta} W^+(t), \max_{\delta \leq t \leq 1} W^+(t) \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Следовательно, при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\ln \sum_{i=0}^{[\delta n]} \xi_i}{\ln \sum_{i=[\delta n]+1}^n \xi_i} \mid T > n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{\max_{0 \leq t \leq \delta} W^+(t)}{\max_{\delta \leq t \leq 1} W^+(t)}.$$

Поскольку случайная величина в правой части сходится п.н. к нулю при $\delta \rightarrow 0$, то при фиксированном $\varepsilon_0 \in (0, +\infty)$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\ln \sum_{i=0}^{[\delta n]} \xi_i}{\ln \sum_{i=[\delta n]+1}^n \xi_i} > \varepsilon_0 \mid T > n \right\} = 0. \quad (13)$$

Очевидно, что

$$\frac{\ln \sum_{i=0}^{[\delta n]} \xi_i}{\ln \sum_{i=[\delta n]+1}^n \xi_i} > \varepsilon_0 \iff \frac{\sum_{i=0}^{[\delta n]} \xi_i}{\sum_{i=[\delta n]+1}^n \xi_i} > \frac{1}{(\sum_{i=[\delta n]+1}^n \xi_i)^{1-\varepsilon_0}}. \quad (14)$$

В силу соотношения (12) при фиксированных $\delta, \varepsilon_0 \in (0, 1)$ и $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{1}{(\sum_{i=[\delta n]+1}^n \xi_i)^{1-\varepsilon_0}} \mid T > n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} 0. \quad (15)$$

Из соотношений (13)–(15) находим, что при фиксированном $\varepsilon \in (0, +\infty)$

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\sum_{i=0}^{[\delta n]} \xi_i}{\sum_{i=[\delta n]+1}^n \xi_i} > \varepsilon \mid T > n \right\} = 0. \quad (16)$$

Заметим что $m_i = \exp S_i$, $i \in \mathbf{N}_0$, поэтому аналогично соотношению (16) получаем из леммы 2, что при фиксированном $\varepsilon \in (0, +\infty)$

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\sum_{i=0}^{[\delta n]} m_i}{\sum_{i=[\delta n]+1}^n m_i} > \varepsilon \mid T > n \right\} = 0. \quad (17)$$

Из представления

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=0}^n \xi_i}{\sum_{i=0}^n m_i} &= \frac{\sum_{i=0}^{[\delta n]} \xi_i + \sum_{i=[\delta n]+1}^n \xi_i}{\sum_{i=0}^{[\delta n]} m_i + \sum_{i=[\delta n]+1}^n m_i} \\ &= \frac{\sum_{i=[\delta n]+1}^n \xi_i}{\sum_{i=[\delta n]+1}^n m_i} \frac{1 + \sum_{i=1}^{[\delta n]} \xi_i / \sum_{i=[\delta n]+1}^n \xi_i}{1 + \sum_{i=1}^{[\delta n]} m_i / \sum_{i=[\delta n]+1}^n m_i} \end{aligned}$$

и соотношений (11), (16), (17) следует утверждение леммы 4.

Лемма 5. В условиях леммы 3 при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\max_{0 \leq i \leq n} \xi_i}{\max_{0 \leq i \leq n} m_i} - \frac{\xi_n}{m_n} \mid T > n \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} 0.$$

Доказательство. В силу леммы 3 при фиксированных $\delta \in (0, 1)$ и $\varepsilon \in (0, +\infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ |\xi_i m_i^{-1} - a_n| < \varepsilon \text{ при любом } i \in (\delta n, n] \mid T > n \right\} = 1, \quad (18)$$

где $a_n = \xi_n / m_n$. Если $|\xi_i / m_i - a_n| \leq \varepsilon$ при любом $i \in (\delta n, n]$ и $\max_{\delta n < i \leq n} \xi_i$ достигается при $i = i_0$, то $\xi_i \leq \xi_{i_0}$, $i \in (\delta n, n]$;

$$(a_n - \varepsilon) m_{i_0} \leq \xi_{i_0} \leq (a_n + \varepsilon) m_{i_0}; \quad (a_n - \varepsilon) m_i \leq \xi_i \leq (a_n + \varepsilon) m_i, \quad i \in (\delta n, n].$$

Поэтому при $i \in (\delta n, n]$

$$m_{i_0} \geq \frac{\xi_{i_0}}{a_n + \varepsilon} \geq \frac{\xi_i}{a_n + \varepsilon} \geq \frac{(a_n - \varepsilon) m_i}{a_n + \varepsilon}$$

и, следовательно,

$$m_{i_0} \geq \frac{a_n - \varepsilon}{a_n + \varepsilon} \max_{\delta n < i \leq n} m_i.$$

С другой стороны, $m_{i_0} \leq \max_{\delta n < i \leq n} m_i$. Таким образом,

$$\frac{(a_n - \varepsilon)^2}{a_n + \varepsilon} \leq \frac{a_n - \varepsilon}{a_n + \varepsilon} \frac{\xi_{i_0}}{m_{i_0}} \leq \frac{\xi_{i_0}}{\max_{\delta n < i \leq n} m_i} \leq \frac{\xi_{i_0}}{m_{i_0}} \leq a_n + \varepsilon,$$

но это означает, что $(a_n - \varepsilon)^2 / (a_n + \varepsilon) \leq \max_{\delta n < i \leq n} \xi_i / \max_{\delta n < i \leq n} m_i \leq a_n + \varepsilon$. Откуда, учитывая, что

$$\frac{(a_n - \varepsilon)^2}{a_n + \varepsilon} - a_n = \frac{\varepsilon^2 - 3\varepsilon a_n}{a_n + \varepsilon} \geq -3\varepsilon,$$

получаем, что

$$a_n - 3\varepsilon \leq \frac{\max_{\delta n < i \leq n} \xi_i}{\max_{\delta n < i \leq n} m_i} \leq a_n + 3\varepsilon. \quad (19)$$

Из соотношений (18), (19) следует, что при фиксированных $\delta \in (0, 1)$ и $\varepsilon \in (0, +\infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{\max_{\delta n < i \leq n} \xi_i}{\max_{\delta n < i \leq n} m_i} - a_n \right| \leq 3\varepsilon \mid T > n \right\} = 1. \quad (20)$$

Далее, ввиду теоремы 2 при фиксированном $\delta \in (0, 1)$ и $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{\ln \max_{0 \leq i \leq \delta n} \xi_i}{\sigma \sqrt{n}}, \frac{\ln \max_{\delta n < i \leq n} \xi_i}{\sigma \sqrt{n}} \mid T > n \right\} \\ \xrightarrow{\mathcal{D}} \left\{ \max_{0 \leq t \leq \delta} W^+(t), \max_{\delta \leq t \leq 1} W^+(t) \right\}.$$

Откуда вытекает, что при $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \max_{0 \leq i \leq \delta n} \xi_i < \max_{\delta n < i \leq n} \xi_i \mid T > n \right\} = \mathbf{P} \left\{ \max_{0 \leq t \leq \delta} W^+(t) < \max_{\delta \leq t \leq 1} W^+(t) \right\}.$$

Поскольку вероятность в правой части стремится к 1 при $\delta \rightarrow 0$, получаем, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \max_{0 \leq i \leq \delta n} \xi_i < \max_{\delta n < i \leq n} \xi_i \mid T > n \right\} = 1. \quad (21)$$

Аналогично из леммы 2 находим, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \max_{0 \leq i \leq \delta n} m_i < \max_{\delta n < i \leq n} m_i \mid T > n \right\} = 1. \quad (22)$$

Из соотношений (20)–(22) следует утверждение леммы 5.

Положим при $\delta \in [0, 1)$ и $n \in \mathbf{N}_0$

$$\varphi_n(\delta) = \frac{\sum_{i=[\delta n]}^n e^{S_i}}{\max_{[\delta n] \leq i \leq n} e^{S_i}}$$

и вместо $\varphi_n(0)$ будем писать φ_n .

Лемма 6. Если $\mathbf{E}X_1 = 0$, $0 < \mathbf{E}X_1^2 < +\infty$, то при любом $x \in (0, +\infty)$ и любом φ -непрерывном борелевском множестве $B \subset \mathbf{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \varphi_n \in B \mid \min_{0 \leq i \leq n} \frac{S_i}{\sigma \sqrt{n}} \geq -x \right\} = \mathbf{P}\{\varphi \in B\}, \quad (23)$$

где φ — та же случайная величина, что и в соотношении (6); сходимость в (23) равномерна по x на любом отрезке $[a, b] \subset (0, +\infty)$.

Доказательство. Пусть T_M — момент первого достижения максимума для случайной последовательности $S_0, S_1, \dots, S_n$, т.е.

$$T_M = \inf \left\{ i: S_i = \max_{0 \leq k \leq n} S_k \right\}.$$

Положим $\hat{S}_i = S_{T_M} - S_{T_M-i}$, $\check{S}_i = S_{T_M+i} - S_{T_M}$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Очевидно, что $\varphi_n = \hat{\varphi}_n + \check{\varphi}_n$, где $\hat{\varphi}_n = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{T_M} e^{-\hat{S}_i}$, $\check{\varphi}_n = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n-T_M} e^{\check{S}_i}$. Рассмотрим совместное распределение случайных величин $\hat{\varphi}_n$ и $\check{\varphi}_n$ при условии $\{\min_{0 \leq i \leq n} S_i / (\sigma \sqrt{n}) \geq -x\}$. Пусть B_1 — $\hat{\varphi}$ -непрерывное, а B_2 —

$\hat{\varphi}$ -непрерывные борелевские множества на прямой (по поводу $\hat{\varphi}$, $\check{\varphi}$ см. формулировку теоремы 3). Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \hat{\varphi}_n \in B_1, \check{\varphi}_n \in B_2 \mid \min_{0 \leq i \leq n} \frac{S_i}{\sigma \sqrt{n}} \geq -x \right\} = \mathbf{P} \{ \hat{\varphi} \in B_1 \} \mathbf{P} \{ \check{\varphi} \in B_2 \}, \quad (24)$$

откуда будет следовать утверждение доказываемой леммы.

При условии $\{ \min_{0 \leq i \leq n} S_i / (\sigma \sqrt{n}) \geq -x \}$ и достаточно больших n с вероятностью, близкой к единице, $T_M/n \in (\alpha, 1 - \alpha]$, $S_{T_M} / (\sigma \sqrt{n}) \in (\beta, 1/\beta]$, где α и β положительны и достаточно малы. Это следует из принципа инвариантности Донскера-Прохорова: в условиях доказываемой леммы при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{S_{[nt]}}{\sigma \sqrt{n}}, t \in [0, +\infty) \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W(t), t \in [0, +\infty)\},$$

где $\{W(t)\}$ — стандартное броуновское движение, выходящее из нуля. Поэтому вместо $\mathbf{P} \{ \hat{\varphi}_n \in B_1, \check{\varphi}_n \in B_2 \mid \min_{0 \leq i \leq n} S_i / (\sigma \sqrt{n}) \geq -x \}$ рассмотрим близкую к ней вероятность

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \hat{\varphi}_n \in B_1, \check{\varphi}_n \in B_2, \frac{T_M}{n} \in (\alpha, 1 - \alpha], \frac{S_{T_M}}{\sigma \sqrt{n}} \in \left(\beta, \frac{1}{\beta} \right] \mid \min_{0 \leq i \leq n} \frac{S_i}{\sigma \sqrt{n}} \geq -x \right\} \\ &= \frac{P_n(\alpha, \beta)}{\mathbf{P} \{ \min_{0 \leq i \leq n} S_i / (\sigma \sqrt{n}) \geq -x \}}, \end{aligned} \quad (25)$$

где $P_n(\alpha, \beta) = \mathbf{P} \{ \hat{\varphi}_n \in B_1, \check{\varphi}_n \in B_2, T_M/n \in (\alpha, 1 - \alpha], S_{T_M} / (\sigma \sqrt{n}) \in (\beta, 1/\beta], \min_{0 \leq i \leq n} S_i / (\sigma \sqrt{n}) \geq -x \}$. Очевидно, что

$$P_n(\alpha, \beta) = \sum_{k=[\alpha n]+1}^{[(1-\alpha)n]} \mathbf{P} \left\{ \hat{\varphi}_n \in B_1, \check{\varphi}_n \in B_2, T_M = k, \frac{S_k}{\sigma \sqrt{n}} \in \left(\beta, \frac{1}{\beta} \right], \min_{0 \leq i \leq n} \frac{S_i}{\sigma \sqrt{n}} \geq -x \right\}.$$

Разобьем промежутки $(\alpha, 1 - \alpha]$ точками $t_0 = \alpha < t_1 < t_2 < \dots < t_l = 1 - \alpha$, а промежутки $(\beta, 1/\beta]$ точками $y_0 = \beta < y_1 < y_2 < \dots < y_m = 1/\beta$. Положим

$$Q_n(k, j) = \mathbf{P} \left\{ \hat{\varphi}_n \in B_1, \check{\varphi}_n \in B_2, T_M = k, \frac{S_k}{\sigma \sqrt{n}} \in (y_j, y_{j+1}], \min_{0 \leq i \leq n} \frac{S_i}{\sigma \sqrt{n}} \geq -x \right\}.$$

Тогда

$$P_n(\alpha, \beta) = \sum_{k=[\alpha n]+1}^{[(1-\alpha)n]} \sum_{j=0}^{m-1} Q_n(k, j). \quad (26)$$

Разбивая траекторию случайного блуждания $\{S_i\}$ на участки до момента T_M и после него, получаем, что

$$Q_n(k, j) \leq \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{i=0}^k e^{-\hat{S}_i} \in B_1, \frac{\hat{S}_k}{\sigma\sqrt{n}} \in (y_j, y_{j+1}], \hat{\tau}_1 > k, \right. \\ \left. \max_{0 \leq i \leq k} \frac{\hat{S}_i}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{\hat{S}_k}{\sigma\sqrt{n}} + x \right\} \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n-k} e^{\check{S}_i} \in B_2, \check{\tau}_1 > n-k, \right. \\ \left. \min_{0 \leq i \leq n-k} \frac{\check{S}_i}{\sigma\sqrt{n}} \geq -(y_{j+1} + x) \right\},$$

где в правой части на случайные последовательности $\{\hat{S}_i\}$ и $\{\check{S}_i\}$ можно смотреть как на две точные вероятностные копии случайного блуждания $\{S_i\}$ и $\hat{\tau}_1 = \inf\{i > 0: \hat{S}_i \leq 0\}$, $\check{\tau}_1 = \inf\{i > 0: \check{S}_i > 0\}$.

В работе автора [10] показано, что при условии $\{S_1 > 0, \dots, S_n > 0\}$ случайная величина $\frac{1}{2} + \sum_{i=0}^n \exp(-S_i)$ и случайный процесс $\{S_{[nt]}/(\sigma\sqrt{n}), t \in [0, +\infty)\}$ при $n \rightarrow \infty$ асимптотически независимы (в смысле конечномерных распределений). Аналогичный результат справедлив для случайной величины $\frac{1}{2} + \sum_{i=0}^n \exp S_i$ и случайного процесса $\{-S_{[nt]}/(\sigma\sqrt{n}), t \in [0, +\infty)\}$, рассматриваемых при условии $\{S_1 \leq 0, \dots, S_n \leq 0\}$. В [10] также показано, что случайные величины

$$\left\{ \frac{1}{2} + \sum_{i=0}^n e^{-S_i} \mid S_1 > 0, \dots, S_n > 0 \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{i=0}^n e^{S_i} \mid S_1 \leq 0, \dots, S_n \leq 0 \right\}$$

сходятся по распределению при $n \rightarrow \infty$ (к случайным величинам $\hat{\varphi}$ и $\check{\varphi}$ соответственно). Далее, в условиях доказываемой леммы справедлив условный принцип инвариантности Иглхарта (см. [11]): при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}}, t \in [0, +\infty) \mid S_1 > 0, \dots, S_n > 0 \right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{W^+(t), t \in [0, +\infty)\}.$$

Аналогичный результат справедлив для процесса $\{-S_{[nt]}/(\sigma\sqrt{n}), t \in [0, +\infty)\}$ при условии $\{S_1 \leq 0, \dots, S_n \leq 0\}$. Наконец (см. (4) при $j = 0$), при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\hat{\tau}_1 > n\} \sim \frac{\hat{c}}{\sqrt{n}}, \quad \mathbf{P}\{\check{\tau}_1 > n\} \sim \frac{\check{c}}{\sqrt{n}}.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, тогда в силу сказанного существует такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что при всех $n \geq N(\varepsilon)$

$$Q_n(k, j) \leq (1 + \varepsilon) \mathbf{P}\{\hat{\varphi} \in B_1\} \mathbf{P}\{\check{\varphi} \in B_2\} \frac{\hat{c}}{\sqrt{nt_r}} \frac{\check{c}}{\sqrt{n(1-t_{r+1})}} \\ \times \mathbf{P} \left\{ W^+(1) \in \left(\frac{y_j}{\sqrt{t_{r+1}}}, \frac{y_{j+1}}{\sqrt{t_r}} \right], \sup_{0 \leq t \leq 1} [W^+(t) - W^+(1)] \leq \frac{x}{\sqrt{t_r}} \right\} \\ \times \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} W^+(t) \geq \frac{y_{j+1} + x}{\sqrt{1-t_{r+1}}} \right\}, \quad (27)$$

если $k \in (t_r n, t_{r+1} n]$, $r = 0, 1, \dots, l-1$; $j = 0, 1, \dots, m-1$ ($N(\varepsilon)$ можно считать не зависящим от r, j и $x \in [a, b]$, где $[a, b] \subset (0, +\infty)$). Из соотношений (26), (27) следует, что при $n \geq N(\varepsilon)$

$$P_n(\alpha, \beta) \leq (1 + \varepsilon) \mathbf{P}\{\hat{\varphi} \in B_1\} \mathbf{P}\{\check{\varphi} \in B_2\} \hat{c} \check{c} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{l-1} \frac{t_{r+1} - t_r + 1/n}{\sqrt{t_r(1 - t_{r+1})}} \\ \times \mathbf{P}\left\{W^+(1) \in \left(\frac{y_j}{\sqrt{t_{r+1}}}, \frac{y_{j+1}}{\sqrt{t_r}}\right], \sup_{0 \leq t \leq 1} [W^+(t) - W^+(1)] \leq \frac{x}{\sqrt{t_r}}\right\} \\ \times \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq 1} W^+(t) \geq \frac{y_{j+1} + x}{\sqrt{1 - t_{r+1}}}\right\}.$$

Откуда, переходя к пределу сначала при $n \rightarrow \infty$, а затем при $\max_{0 \leq r \leq l-1} (t_{r+1} - t_r) \rightarrow 0$, получаем, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P_n(\alpha, \beta) \leq (1 + \varepsilon) \mathbf{P}\{\hat{\varphi} \in B_1\} \mathbf{P}\{\check{\varphi} \in B_2\} \hat{c} \check{c} \\ \times \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\alpha}^{1-\alpha} \mathbf{P}\left\{W^+(1) \in \left(\frac{y_j}{\sqrt{t}}, \frac{y_{j+1}}{\sqrt{t}}\right], \sup_{0 \leq t \leq 1} [W^+(t) - W^+(1)] \leq \frac{x}{\sqrt{t}}\right\} \\ \times \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq 1} W^+(t) \geq \frac{y_{j+1} + x}{\sqrt{1 - t}}\right\} dt.$$

Наконец, переходя к пределу при $\max_{0 \leq j \leq m-1} (y_{j+1} - y_j) \rightarrow 0$, находим, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P_n(\alpha, \beta) \leq (1 + \varepsilon) \mathbf{P}\{\hat{\varphi} \in B_1\} \mathbf{P}\{\check{\varphi} \in B_2\} \hat{c} \check{c} I(\alpha, \beta), \quad (28)$$

где

$$I(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{1-\alpha} dt \int_{\beta}^{1/\beta} \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq 1} W^+(t) \geq \frac{y+x}{\sqrt{1-t}}\right\} d_y \mathbf{P}\left\{W^+(1) \leq \frac{y}{\sqrt{t}}, \right. \\ \left. \sup_{0 \leq t \leq 1} [W^+(t) - W^+(1)] \leq \frac{x}{\sqrt{t}}\right\}.$$

Аналогично (28) устанавливается, что

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P_n(\alpha, \beta) \geq (1 - \varepsilon) \mathbf{P}\{\hat{\varphi} \in B_1\} \mathbf{P}\{\check{\varphi} \in B_2\} \hat{c} \check{c} I(\alpha, \beta). \quad (29)$$

Ввиду произвольности ε из (28), (29) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\alpha, \beta) = \mathbf{P}\{\hat{\varphi} \in B_1\} \mathbf{P}\{\check{\varphi} \in B_2\} \hat{c} \check{c} I(\alpha, \beta). \quad (30)$$

Из принципа инвариантности Донскера–Прохорова вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\min_{0 \leq i \leq n} \frac{S_i}{\sigma \sqrt{n}} \geq -x\right\} = \mathbf{P}\left\{\inf_{0 \leq t \leq 1} W(t) \geq -x\right\}, \quad (31)$$

причем эта сходимость равномерна по x на любом отрезке. Из соотношений (25), (30), (31) находим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \hat{\varphi}_n \in B_1, \check{\varphi}_n \in B_2, \frac{T_M}{n} \in (\alpha, 1 - \alpha], \frac{S_{T_M}}{\sigma\sqrt{n}} \in \left(\beta, \frac{1}{\beta} \right] \mid \min_{0 \leq i \leq n} \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} \geq -x \right\} = \frac{\mathbf{P}\{\hat{\varphi} \in B_1\} \mathbf{P}\{\check{\varphi} \in B_2\} \hat{c} \check{c} I(\alpha, \beta)}{\mathbf{P}\{\inf_{0 \leq t \leq 1} W(t) \geq -x\}}.$$

Откуда, переходя к пределу при $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$, получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \hat{\varphi}_n \in B_1, \check{\varphi}_n \in B_2 \mid \min_{0 \leq i \leq n} \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} \geq -x \right\} \\ = \frac{\mathbf{P}\{\hat{\varphi} \in B_1\} \mathbf{P}\{\check{\varphi} \in B_2\} \hat{c} \check{c} I(0+, 0+)}{\mathbf{P}\{\inf_{0 \leq t \leq 1} W(t) \geq -x\}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Точно так же показывается, что

$$\begin{aligned} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{T_M}{n} \in [0, 1], \frac{S_{T_M}}{\sigma\sqrt{n}} \in [0, +\infty) \mid \min_{0 \leq i \leq n} \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} \geq -x \right\} \\ = \frac{\hat{c} \check{c} I(0+, 0+)}{\mathbf{P}\{\inf_{0 \leq t \leq 1} W(t) \geq -x\}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Из соотношений (32), (33) следуют соотношение (24) и утверждение леммы 6.

Лемма 7. Если $\mathbf{E}X_1 = 0, 0 < \mathbf{E}X_1^2 < +\infty$, то при любом $\delta \in [0, 1)$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{\varphi_n(\delta) \mid \tau_1 > n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi. \quad (34)$$

Доказательство. Для произвольного φ -непрерывного борелевского множества $B \subset \mathbf{R}$ и произвольного $\delta \in (0, 1)$ запишем представление:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\varphi_n(\delta) \in B \mid \tau_1 > n\} &= \frac{\mathbf{P}\{\tau_1 > [n\delta]\}}{\mathbf{P}\{\tau_1 > n\}} \\ &\times \int_{0+}^{+\infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\sum_{i=0}^{n-[n\delta]} e^{S'_i}}{\max_{0 \leq i \leq n-[n\delta]} e^{S'_i}} \in B \mid \min_{0 \leq i \leq n-[n\delta]} \frac{S'_i}{\sigma\sqrt{n}} \geq -x \right\} \\ &\times \mathbf{P} \left\{ \min_{0 \leq i \leq n-[n\delta]} \frac{S_i}{\sigma\sqrt{n}} \geq -x \right\} d_x \mathbf{P} \left\{ \frac{S_{[n\delta]}}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \mid \tau_1 > [n\delta] \right\}, \end{aligned} \quad (35)$$

где $S'_i = S_{[n\delta]+i} - S_{[n\delta]}$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Случайная последовательность $\{S'_i\}$ есть точная вероятностная копия блуждания $\{S_i\}$. По принципу инвариантности Донскера–Прохорова при любом $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \min_{0 \leq i \leq n-[n\delta]} \frac{S'_i}{\sigma\sqrt{n}} \geq -x \right\} = \mathbf{P} \left\{ \inf_{0 \leq t \leq 1} W(t) \geq \frac{-x}{\sqrt{1-\delta}} \right\}, \quad (36)$$

причем сходимость равномерна на любом отрезке. В силу условного принципа инвариантности Иглхарта при любом $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{S_{[n\delta]}}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \mid \tau_1 > [n\delta] \right\} = \mathbf{P} \left\{ W^+(1) \leq \frac{x}{\sqrt{\delta}} \right\}. \quad (37)$$

Ввиду соотношения (4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{\tau_1 > [n\delta]\}}{\mathbf{P}\{\tau_1 > n\}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}. \quad (38)$$

В силу леммы 6 при любом $x \in (0, +\infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\sum_{i=0}^{n-[n\delta]} e^{S'_i}}{\max_{0 \leq i \leq n-[n\delta]} e^{S'_i}} \in B \mid \min_{0 \leq i \leq n-[n\delta]} \frac{S'_i}{\sigma\sqrt{n}} \geq -x \right\} = \mathbf{P}\{\varphi \in B\}, \quad (39)$$

причем эта сходимость равномерна по x на любом отрезке $[a, b] \subset (0, +\infty)$. Из соотношений (35)–(39) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\varphi_n(\delta) \in B \mid \tau_1 > n\} &= \mathbf{P}\{\varphi \in B\} \delta^{-1/2} \\ &\times \int_0^{+\infty} \mathbf{P} \left\{ \inf_{t \in [0,1]} W(t) \geq -\frac{x}{\sqrt{1-\delta}} \right\} d_x \mathbf{P} \left\{ W^+(1) \leq \frac{x}{\sqrt{\delta}} \right\}. \end{aligned} \quad (40)$$

Точно так же можно доказать, что при любом $\delta \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\tau_1 > n \mid \tau_1 > n\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P} \left\{ \inf_{t \in [0,1]} W(t) \geq -\frac{x}{\sqrt{1-\delta}} \right\} d_x \mathbf{P} \left\{ W^+(1) \leq \frac{x}{\sqrt{\delta}} \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

Из соотношений (40), (41) видно, что при любом $\delta \in (0, 1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\varphi_n(\delta) \in B \mid \tau_1 > n\} = \mathbf{P}\{\varphi \in B\}. \quad (42)$$

Осталось доказать (42) при $\delta = 0$. Аналогично соотношению (17) можно показать, что при фиксированном $\varepsilon \in (0, +\infty)$

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\sum_{i=0}^{[\delta n]-1} e^{S_i}}{\sum_{i=[\delta n]}^n e^{S_i}} > \varepsilon \mid \tau_1 > n \right\} = 0. \quad (43)$$

Аналогично соотношению (22) показывается, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \max_{0 \leq i \leq [\delta n]-1} e^{S_i} < \max_{[\delta n] \leq i \leq n} e^{S_i} \mid \tau_1 > n \right\} = 1. \quad (44)$$

Из (42)–(44) следует, что соотношение (42) справедливо и при $\delta = 0$. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. Если $\mathbf{E}X_1 = 0$, $0 < \mathbf{E}X_1^2 < +\infty$, то при любых $\delta \in [0, 1]$, $j \in \mathbf{N}_0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{\varphi_n(\delta) \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi. \quad (45)$$

Доказательство. При $j = 0$ соотношение (45) составляет содержание леммы 7. Рассмотрим $j \in \mathbf{N}$ и $\delta \in (0, 1)$. В работе [4] показано, что в условиях доказываемой леммы при любом фиксированном $\lambda \in (0, 1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{\tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}\}}{\mathbf{P}\{\tau_j \leq n < \tau_{j+1}\}} = 1. \quad (46)$$

Поэтому с учетом соотношения (4) достаточно показать, что для произвольного φ -непрерывного борелевского множества $B \subset \mathbf{R}$ и $\lambda \in (0, \delta)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\varphi_n(\delta) \in B \mid \tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}\} = \mathbf{P}\{\varphi \in B\}. \quad (47)$$

Справедливо представление:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\varphi_n(\delta) \in B \mid \tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}\} &= (\mathbf{P}\{\tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}\})^{-1} \\ &\times \sum_{k=1}^{[\lambda n]} \mathbf{P}\left\{ \frac{\sum_{i=[\delta n]-k}^{n-k} e^{S'_i}}{\max_{[\delta n]-k \leq i \leq n-k} e^{S'_i}} \in B, \tau_j = k, \tau'_1 > n - k \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{[\lambda n]} \frac{\mathbf{P}\{\tau_j = k\} \mathbf{P}\{\tau'_1 > n - k\}}{\mathbf{P}\{\tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}\}} \\ &\times \mathbf{P}\left\{ \frac{\sum_{i=[\delta n]-k}^{n-k} e^{S'_i}}{\max_{[\delta n]-k \leq i \leq n-k} e^{S'_i}} \in B \mid \tau'_1 > n - k \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{[\lambda n]} \frac{\mathbf{P}\{\tau_j = k\} \mathbf{P}\{\tau_1 > n - k\}}{\mathbf{P}\{\tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}\}} \\ &\times \mathbf{P}\left\{ \frac{\sum_{i=[\delta n]-k}^{n-k} e^{S_i}}{\max_{[\delta n]-k \leq i \leq n-k} e^{S_i}} \in B \mid \tau_1 > n - k \right\}, \end{aligned} \quad (48)$$

где в случае $\{\tau_j = k\}$ $S'_i = S_{k+i} - S_k$, $i = 0, 1, \dots$; $\tau'_1 = \tau_{j+1} - \tau_j$. Мы воспользовались тем, что случайная последовательность $\{S'_i\}$ является точной вероятностной копией блуждания $\{S_i\}$; τ'_1 оказывается первым строгим нижним лестничным моментом блуждания $\{S'_i\}$; блуждания $\{S'_i\}$ и $\{S_i\}$ являются независимыми. При произвольном фиксированном $k \in \mathbf{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\sum_{i=[\delta n]-k}^{n-k} e^{S_i}}{\max_{[\delta n]-k \leq i \leq n-k} e^{S_i}} \in B \mid \tau_1 > n - k \right\} = \mathbf{P}\{\varphi \in B\}. \quad (49)$$

Действительно, соотношение (49) равносильно утверждению, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\sum_{i=[\delta(n+k)]-k}^n e^{S_i}}{\max_{[\delta(n+k)]-k \leq i \leq n} e^{S_i}} \in B \mid \tau_1 > n \right\} = \mathbf{P}\{\varphi \in B\},$$

которое вытекает из леммы 7 и следующих соотношений: при $\varepsilon \in (0, +\infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\sum_{i=[\delta(n+k)]-k}^{[\delta n]-1} e^{S_i}}{\sum_{i=[\delta n]}^n e^{S_i}} > \varepsilon \mid \tau_1 > n \right\} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \max_{[\delta(n+k)]-k \leq i \leq [\delta n]-1} e^{S_i} < \max_{[\delta n] \leq i \leq n} e^{S_i} \mid \tau_1 > n \right\} = 1,$$

доказывающихся аналогично соотношениям (17) и (22). Из соотношений (4), (46) и (49) следует, что предел при $n \rightarrow \infty$ отдельного слагаемого в правой части соотношения (48) равен $\mathbf{P}\{\tau_j = k\} \mathbf{P}\{\varphi \in B\}$. Более того, при достаточно больших n и всех $k = 1, 2, \dots, [\lambda n]$

$$\frac{\mathbf{P}\{\tau_j = k\} \mathbf{P}\{\tau_1 > n - k\}}{\mathbf{P}\{\tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}\}} \mathbf{P} \left\{ \frac{\sum_{i=[\delta n]-k}^{n-k} e^{S_i}}{\max_{[\delta n]-k \leq i \leq n-k} e^{S_i}} \in B \mid \tau_1 > n - k \right\} \\ \leq \frac{\mathbf{P}\{\tau_j = k\} (1 + \varepsilon)}{\sqrt{1 - \lambda}}.$$

Следовательно, предел правой части соотношения (48) равен $\mathbf{P}\{\varphi \in B\}$. Итак, соотношение (47) и, значит, (45) при $\delta \in (0, 1)$ доказаны. Отсюда получаем соотношение (45) при $\delta = 0$ (см. окончание доказательства леммы 7, при этом нужно использовать обобщение условного принципа инвариантности Иглхарта с заменой условия $\{\tau_1 > n\}$ на условие $\{\tau_j \leq n < \tau_{j+1}\}$ (см. [2])). Лемма 8 доказана.

Пусть $\{\bar{Y}_i, i \in \mathbf{N}\}$ — последовательность случайных векторов одинаковой размерности такая, что случайные векторы $(X_1, \bar{Y}_1), (X_2, \bar{Y}_2), \dots$ независимы и одинаково распределены. В работе [1] установлен следующий результат.

Лемма 9. Если $\mathbf{E}X_1 = 0$ и $0 < \mathbf{E}X_1^2 < +\infty$, то при любом $j \in \mathbf{N}_0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{(S_i, \bar{Y}_i), i \in \mathbf{N} \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{(S_i^{(j)}, \bar{Y}_i^{(j)}), i \in \mathbf{N}\},$$

где справа стоит некоторая последовательность случайных векторов.

Лемма 10. Если $\mathbf{E}X_1 = 0$ и $0 < \mathbf{E}X_1^2 < +\infty$, то при любых $j \in \mathbf{N}_0$, $\delta \in [0, 1)$ и $n \rightarrow \infty$ случайная последовательность $\{(S_i, \bar{Y}_i), i \in \mathbf{N}\}$ и случайная величина $\varphi_n(\delta)$, рассматриваемые при условии $\{\tau_j \leq n < \tau_{j+1}\}$, асимптотически независимы (в смысле конечномерных распределений).

Доказательство. Пусть размерность вектора $\bar{Y}_1$ равна l . Рассмотрим сначала случай, когда $j = 0$. Для $\delta \in (0, 1)$, произвольного $m \in \mathbf{N}$ и произвольных борелевских множеств $B \subset \mathbf{R}$, $B_i \in \mathbf{R}^{l+1}$,

$i = 1, \dots, m$, запишем при достаточно больших n представление:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{(S_i, \bar{Y}_i) \in B_i, i = 1, \dots, m; \varphi_n(\delta) \in B \mid \tau_1 > n\} \\ &= \frac{\mathbf{P}\{\tau_1 > [n\delta]\}}{\mathbf{P}\{\tau_1 > n\}} \int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\sum_{i=0}^{n-[n\delta]} e^{S'_i}}{\max_{0 \leq i \leq n-[n\delta]} e^{S'_i}} \in B \mid \min_{0 \leq i \leq n-[n\delta]} \frac{S'_i}{\sigma\sqrt{n}} \geq -x\right\} \\ & \times \mathbf{P}\left\{\min_{0 \leq i \leq n-[n\delta]} \frac{S'_i}{\sigma\sqrt{n}} \geq -x\right\} d_x \mathbf{P}\left\{(S_i, \bar{Y}_i) \in B_i, i = 1, \dots, m; \right. \\ & \left. \frac{S_{[n\delta]}}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \mid \tau_1 > [n\delta]\right\}, \end{aligned}$$

где $S'_i = S_{[n\delta]+i} - S_{[n\delta]}$, $i = 0, 1, \dots$. Из этого представления выводится утверждение доказываемой леммы при $j = 0$ точно так же, как утверждение леммы 7 выводится из представления (35), при этом надо использовать доказанную в работе [10] асимптотическую независимость при $n \rightarrow \infty$ (в смысле конечномерных распределений) случайной последовательности $\{(S_i, \bar{Y}_i), i \in \mathbf{N}\}$ и случайного процесса $\{S_{[nt]}/(\sigma\sqrt{n}), t \in [0, +\infty)\}$, рассматриваемых при условии $\{\tau_1 > n\}$.

Пусть теперь $j \in \mathbf{N}$. При $\delta \in (0, 1)$, $\lambda \in (0, \delta)$ и достаточно больших n запишем представление:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{(S_i, \bar{Y}_i) \in B_i, i = 1, \dots, m; \varphi_n(\delta) \in B \mid \tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}\} \\ &= \sum_{k=1}^{[\lambda n]} \mathbf{P}\left\{(S_r, \bar{Y}_r) \in B_r, r = 1, \dots, k \wedge m; (S_k + S'_i, Y'_i) \in B_{k+i}, \right. \\ & \quad i = 1, \dots, m - k \wedge m; \frac{\sum_{i=[\delta n]-k}^{n-k} e^{S'_i}}{\max_{[\delta n]-k \leq i \leq n-k} e^{S'_i}} \in B; \\ & \quad \left. \tau_j = k \mid \tau'_1 > n - k\right\} \frac{\mathbf{P}\{\tau'_1 > n - k\}}{\mathbf{P}\{\tau_j \leq \lambda n, n < \tau_{j+1}\}}, \end{aligned}$$

где в случае $\{\tau_j = k\}$ $S'_i = S_{k+i} - S_k$, $Y'_i = Y_{k+i}$, $i = 0, 1, \dots$; $\tau'_1 = \tau_{j+1} - \tau_j$. Из этого представления, учитывая независимость блужданий $\{S_i\}$ и $\{S'_i\}$, а также уже полученное при $j = 0$ утверждение рассматриваемой леммы, можно получить это утверждение при $j \in \mathbf{N}$ точно так же, как лемма 8 получается из представления (48). Лемма 10 доказана.

Лемма 11. В условиях теоремы 3 при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{\varphi_n, \frac{\xi_n}{m_n} \mid T > n\right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} (\varphi, \mu),$$

где случайные величины φ и μ (те же, что и в соотношениях (6) и (1) соответственно) предполагаются независимыми.

Доказательство. Пусть B — φ -непрерывное борелевское множество на числовой прямой, $x \in (0, +\infty)$. Для нахождения предела

вероятности $\mathbf{P}\{\varphi_n \in B, \xi_n/m_n > x \mid T > n\}$ при $n \rightarrow \infty$ в силу леммы 1 достаточно при каждом $j \in \mathbf{N}_0$ найти предел вероятности $\mathbf{P}\{\varphi_n \in B, \xi_n/m_n > x, T > n \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\}$ или, что то же самое, $\mathbf{P}\{\varphi_n \in B, \xi_n/m_n > x \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\}$. В работе [1] показано, что в условиях теоремы 1 при любых $j \in \mathbf{N}_0$ и $\varepsilon \in (0, +\infty)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{\xi_n}{m_n} - \frac{\xi_k}{m_k} \right| \geq \varepsilon \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1} \right\} = 0. \quad (50)$$

Из этого соотношения вытекает, что достаточно найти

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \varphi_n \in B, \frac{\xi_k}{m_k} > x \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1} \right\}. \quad (51)$$

В работе [1] показано, что в условиях теоремы 1 при любом $j \in \mathbf{N}_0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\{\xi_k, k \in \mathbf{N}_0 \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1}\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{\xi_k^{(j)}, k \in \mathbf{N}\}, \quad (52)$$

где $\{\xi_k^{(j)}\}$ является ветвящимся процессом в некоторой случайной среде $\{\pi_k^{(j)}\}$. Ввиду этого для нахождения предела (51) достаточно найти при достаточно больших $L \in \mathbf{R}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \varphi_n \in B, \frac{\xi_k}{m_k} > x, \max_{0 \leq i \leq k} \xi_i \leq L \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1} \right\}.$$

Очевидно, что

$$\mathbf{P}_\pi \left\{ \frac{\xi_k}{m_k} > x, \max_{0 \leq i \leq k} \xi_i \leq L \right\} = f_k(S_1, \bar{Y}_1, \dots, S_k, \bar{Y}_k),$$

где f_k — некоторая измеримая ограниченная функция, $\bar{Y}_i = (\pi_{i-1}(0), \pi_{i-1}(1), \dots, \pi_{i-1}([L]))$, $i = 1, \dots, k$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \varphi_n \in B, \frac{\xi_k}{m_k} > x, \max_{0 \leq i \leq k} \xi_i \leq L \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1} \right\} \\ &= \mathbf{E} \left(\chi_{\{\varphi_n \in B\}} f_k(S_1, \bar{Y}_1, \dots, S_k, \bar{Y}_k) \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1} \right), \end{aligned}$$

где χ_A — индикатор множества A . Откуда в силу лемм 8–10 при почти всех x, L

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \varphi_n \in B, \frac{\xi_k}{m_k} > x, \max_{0 \leq i \leq k} \xi_i \leq L \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1} \right\} \\ &= \mathbf{P}\{\varphi \in B\} \mathbf{E} f_k(S_1^{(j)}, \bar{Y}_1^{(j)}, \dots, S_k^{(j)}, \bar{Y}_k^{(j)}). \end{aligned}$$

Из результатов работы [1] следует, что в условиях теоремы 1

$$f_k(S_1^{(j)}, \bar{Y}_1^{(j)}, \dots, S_k^{(j)}, \bar{Y}_k^{(j)}) = \mathbf{P}_{\pi^{(j)}} \left\{ \frac{\xi_k^{(j)}}{m_k^{(j)}} > x, \max_{0 \leq i \leq k} \xi_i^{(j)} \leq L \right\},$$

где $m_k^{(j)} = \mathbf{E}_{\pi^{(j)}} \xi_k^{(j)} = \exp S_k^{(j)}$. Итак, доказано, что если x — точка непрерывности функции распределения случайной величины $\xi_k^{(j)}/m_k^{(j)}$, а L — точка непрерывности функции распределения случайной величины $\max_{0 \leq i \leq k} \xi_i^{(j)}$, то

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \varphi_n \in B, \frac{\xi_k}{m_k} > x, \max_{0 \leq i \leq k} \xi_i \leq L \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1} \right\} \\ = \mathbf{P}\{\varphi \in B\} \mathbf{P} \left\{ \frac{\xi_k^{(j)}}{m_k^{(j)}} > x, \max_{0 \leq i \leq n} \xi_i^{(j)} \leq L \right\}. \end{aligned}$$

Ввиду соотношения (52) отсюда вытекает, что если x — точка непрерывности функции распределения случайной величины $\xi_k^{(j)}/m_k^{(j)}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \varphi_n \in B, \frac{\xi_k}{m_k} > x \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1} \right\} = \mathbf{P}\{\varphi \in B\} \mathbf{P} \left\{ \frac{\xi_k^{(j)}}{m_k^{(j)}} > x \right\}. \quad (53)$$

В работе [1] показано, что в условиях теоремы 1 при $k \rightarrow \infty$

$$\frac{\xi_k^{(j)}}{m_k^{(j)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu^{(j)}, \quad (54)$$

где $\mu^{(j)}$ — некоторая неотрицательная случайная величина. Из соотношений (50), (53) и (54) получаем, что если x — точка непрерывности функции распределения случайной величины $\mu^{(j)}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \varphi_n \in B, \frac{\xi_n}{m_n} > x \mid \tau_j \leq n < \tau_{j+1} \right\} = \mathbf{P}\{\varphi \in B\} \mathbf{P}\{\mu^{(j)} > x\}. \quad (55)$$

Пусть D — множество точек, являющихся точками непрерывности сразу всех функций распределения случайных величин $\mu^{(j)}$. Очевидно, множество D всюду плотно на числовой прямой. При $x \in D \cap (0, +\infty)$ в силу леммы 1 из соотношения (55) находим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \varphi_n \in B, \frac{\xi_n}{m_n} > x \mid T > n \right\} = \mathbf{P}\{\varphi \in B\} \frac{c_1}{c_2} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\mu^{(j)} > x\}.$$

В работе [1] показано, что в условиях теоремы 1 при $x \in D \cap (0, +\infty)$ $c_2^{-1} c_1 \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\mu^{(j)} > x\} = \mathbf{P}\{\mu > x\}$. Из двух последних соотношений получаем, что в условиях теоремы 1 при $x \in D \cap (0, +\infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \varphi_n \in B, \frac{\xi_n}{m_n} > x \mid T > n \right\} = \mathbf{P}\{\varphi \in B\} \mathbf{P}\{\mu > x\}. \quad (56)$$

Чтобы доказать это соотношение при $x \in (-\infty, 0]$, впервые воспользуемся условием $\mu > 0$ п.н., из которого следует, что

$$\lim_{x \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\xi_n}{m_n} > x \mid T > n \right\} = 1. \quad (57)$$

Из соотношений (56), (57) вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\varphi_n \in B \mid T > n\} = \lim_{x \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\varphi_n \in B, \frac{\xi_n}{m_n} > x \mid T > n\right\} \\ = \mathbf{P}\{\varphi \in B\}.$$

Таким образом, соотношение (56) доказано при $x = 0$ и, следовательно, при $x \in (-\infty, 0)$. Лемма 11 доказана.

Доказательство теоремы 3. В силу лемм 4, 5 и 11 при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{\varphi_n, \frac{\sum_{i=0}^n \xi_i}{\sum_{i=0}^n m_i}, \frac{\max_{0 \leq i \leq n} \xi_i}{\max_{0 \leq i \leq n} m_i} \mid T > n\right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{\varphi, \mu, \mu\},$$

где случайные величины φ и μ независимы и $\mu > 0$ п.н. Разделив вторую компоненту на третью и учитывая, что $m_i = \exp S_i$, получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left\{\varphi_n, \frac{\sum_{i=0}^n \xi_i}{\max_{0 \leq i \leq n} \xi_i} \varphi_n^{-1} \mid T > n\right\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \{\varphi, 1\}.$$

Откуда, перемножая компоненты, приходим к утверждению теоремы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев В. И. Функциональная предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. — Дискретн. матем., 2001, т. 13, № 4, с. 73–91.
2. Афанасьев В. И. Новая предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. — Дискретн. матем., 1997, т. 9, № 3, с. 52–67.
3. Geiger J., Kersting G. The survival probability of a critical branching process in random environment. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 3, с. 607–615.
4. Козлов М. В. Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде. — Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. 21, в. 4, с. 813–825.
5. Ватутин В. А. Редуцированные ветвящиеся процессы в случайной среде: критический случай. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 1, с. 21–38.
6. Козлов М. В. Условная функциональная предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. — Докл. РАН, 1995, т. 344, № 1, с. 12–15.
7. Афанасьев В. И. О максимуме критического ветвящегося процесса в случайной среде. — Дискретн. матем., 1999, т. 11, № 2, с. 86–102.
8. Афанасьев В. И. О моменте достижения фиксированного уровня критическим ветвящимся процессом в случайной среде. — Дискретн. матем., 1999, т. 11, № 4, с. 33–47.
9. Афанасьев В. И. О моменте достижения максимума критическим ветвящимся процессом в случайной среде и остановленным случайным блужданием. — Дискретн. матем., 2000, т. 12, № 2, с. 31–50.
10. Афанасьев В. И. Предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. — Дискретн. матем., 1993, т. 5, № 1, с. 45–58.
11. Hooghiemstra G. Conditioned limit theorems for waiting-time processes of the $M/G/1$ queue. — J. Appl. Probab., 1983, v. 20, № 3, p. 675–688.

Поступила в редакцию
4.II.2002