Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, Предельная теорема для промежуточно докритического ветвящегося процесса в случайной среде, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 3, 453–465

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp265>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 13:50:36

© 2003 г.

ВАТУТИН В. А.*

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНО ДОКРИТИЧЕСКОГО ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ¹⁾

Найдена асимптотика вероятности невырождения промежуточно докритического ветвящегося процесса Z_n в случайной среде в случае, когда некоторое преобразование закона распределения числа непосредственных потомков частиц принадлежит области притяжения устойчивого закона с параметром $\alpha \in (1, 2]$. Доказано, что распределение случайной величины $\{Z_n\}$ при условии $Z_n > 0$ сходится к невырожденному распределению при $n \rightarrow \infty$.

Ключевые слова и фразы: ветвящиеся процессы в случайной среде, вероятность невырождения, промежуточно докритический процесс, предельная теорема, случайные блуждания, устойчивые распределения.

1. Введение и основной результат. Ветвящиеся процессы в случайной среде (ВПСС) являются одним из интереснейших обобщений ветвящихся процессов Гальтона–Ватсона. В этой статье мы рассматриваем простейший случай таких процессов, а именно, ситуацию, когда последовательные состояния среды независимы и одинаково распределены. Модель, которая нас интересует, описывается следующим образом. Пусть последовательные состояния сред задаются бесконечными векторами $\{\pi_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, где

$$\begin{aligned} \pi_n &= \{\pi_n^{(0)}, \pi_n^{(1)}, \pi_n^{(2)}, \dots\}, & \pi_n^{(i)} &\geq 0, \\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_n^{(i)} &= 1, & n \in \mathbb{N}_0 &= \{0, 1, 2, \dots\}, \end{aligned} \quad (1)$$

причем наборы π_n независимы и одинаково распределены. С вектором π_n мы свяжем производящую функцию

$$f_n(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_n^{(i)} s^i.$$

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: vatutin@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00266), РФФИ-ННИО (грант 02-01-04002) и гранта НШ-1758.2003.1 Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ.

Для удобства введем также вероятностную производящую функцию $f(s) \stackrel{\text{д}}{=} f_n(s)$, не зависящую от набора $f_n(s)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. В этих терминах эволюция интересующего нас ветвящегося процесса в случайной среде $\{Z_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ описывается соотношениями

$$Z_0 = 1, \quad \mathbf{E}[s^{Z_{n+1}} | f_0, f_1, \dots, f_n; Z_0, Z_1, \dots, Z_n] = (f_n(s))^{Z_n}.$$

Пусть $a = \mathbf{E} \ln f'(1)$. ВПСС называется надкритическим, если $a > 0$, критическим, если $a = 0$, и докритическим, если $a < 0$. В данной работе мы рассматриваем докритические ВПСС. Такие процессы исследовались многими авторами (см., например, [1], [2], [3], [5], [7], [8], [13], [16]).

Как оказалось, свойства докритических ВПСС существенно зависят от значения параметра $b = \mathbf{E} f'(1) \ln f'(1)$.

Докритический ВПСС называется строго докритическим, если $b < 0$, промежуточно докритическим, если $b = 0$, и слабо докритическим, если $b > 0$. Поскольку докритические ВПСС вырождаются с вероятностью единица, естественно исследовать поведение вероятности невырождения $\mathbf{P}\{Z_n > 0\}$ при $n \rightarrow \infty$. Асимптотика вероятности невырождения докритических процессов всех типов для случая, когда производящие функции числа потомков дробно-линейны, была найдена В. И. Афанасьевым (см., например, [1], [2]). Общий случай рассматривался в [7] и [8]. В работе [8] было показано, что для строго докритического процесса общего вида, удовлетворяющего условию $\mathbf{E} Z_1 \ln^+ Z_1 < \infty$, существует константа $d \in (0, \infty)$ такая, что

$$\mathbf{P}\{Z_n > 0\} \sim d(\mathbf{E} Z_1)^n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Обозначим $I\{A\}$ индикатор события A . В [7] установлено, что для промежуточно докритического ВПСС общего вида, удовлетворяющего условиям

$$\mathbf{E}[f'(1)(\ln f'(1))^2] < \infty, \quad (2)$$

$$\mathbf{E}[f''(1)(1 - \ln f'(1) I\{f'(1) < 1\})] < \infty, \quad (3)$$

существует константа $d \in (0, \infty)$ такая, что

$$\mathbf{P}\{Z_n > 0\} \sim dn^{-1/2}(\mathbf{E} Z_1)^n, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4)$$

в то время как для слабо докритического ВПСС с параметром κ , определяемым равенством

$$\mathbf{E}[(f'(1))^\kappa] = \min_{0 \leq \theta \leq 1} \mathbf{E}[(f'(1))^\theta]$$

и

$$\mathbf{E} f'(1) \ln f'(1) < \infty, \quad \mathbf{E} \left[\frac{f''(1)}{f'(1)^{1-\kappa}} + \frac{f''(1)}{f'(1)^{2-\kappa}} \right] < \infty,$$

существует константа $d \in (0, \infty)$ такая, что

$$\mathbf{P}\{Z_n > 0\} \sim dn^{-3/2}(\mathbf{E}[(f'(1))^\kappa])^n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Цель данной заметки — найти асимптотику вероятности невырождения промежуточно докритических ВПСС при более слабых, чем (2)–(3), ограничениях и доказать условную предельную теорему о распределении числа частиц в процессе в момент n при условии невырождения процесса к этому моменту.

Пусть

$$X := \ln f'(1), \quad \eta := f''(1)(f'(1))^{-2}.$$

Будем говорить, что выполнено условие $\mathcal{A}$, если

(A1) распределение случайной величины X абсолютно непрерывно и либо выполнено условие (2), либо условие (2) нарушено, но существуют $\alpha \in (1, 2]$ и медленно меняющаяся на бесконечности функция $L(t)$ такие, что

$$\mathbf{E}f'(1)I\{\ln f'(1) > t\} = \mathbf{E}e^X I\{X > t\} \sim \frac{L(t)}{t^\alpha}, \quad t \rightarrow \infty; \quad (5)$$

(A2) для $\alpha < 2$ найдутся $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ и $\delta_0 \in (0, 1)$ такие, что

$$\mathbf{E}[e^X \eta^{\varepsilon_0} ((1+X)^{\alpha-1+\delta_0} I\{X \geq 0\} + (1-X)^{\alpha-1+\delta_0} e^{\varepsilon_0 X} I\{X < 0\})] < \infty; \quad (6)$$

(A3) при $\alpha = 2$ найдется $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ такое, что соотношение (6) справедливо с $\delta_0 = 0$.

Отметим, что аналог условия (5) возникает естественным образом при исследовании вероятностей больших отклонений крамеровского типа в случае, когда сопряженное распределение имеет «тяжелый» хвост (см., например, [12]).

Теорема 1. Пусть Z_n — промежуточно докритический ВПСС, удовлетворяющий условию $\mathcal{A}$. Тогда существует медленно меняющаяся на бесконечности функция $L_1(n)$, такая, что

$$\mathbf{P}\{Z_n > 0\} \sim n^{-1/\alpha} L_1(n) (\mathbf{E}Z_1)^n, \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Кроме того, для любого $s \in [0, 1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[s^{Z_n} | Z_n > 0] = \phi(s), \quad (8)$$

где $\phi(s)$ — производящая функция собственной случайной величины.

З а м е ч а н и е 1. При $\alpha = 2$ и $\varepsilon_0 = 1$ условие (6) принимает вид

$$\mathbf{E} \left[\frac{f''(1)}{f'(1)} (1 + \ln f'(1)) I\{f'(1) \geq 1\} + f''(1)(1 - \ln f'(1)) I\{f'(1) < 1\} \right] < \infty. \quad (9)$$

Поскольку величина $(f'(1))^{-1} \ln f'(1)$ ограничена при $f'(1) \geq 1$, то найдется константа $c > 0$ такая, что

$$\begin{aligned} \frac{f''(1)}{f'(1)} (1 + \ln f'(1)) I\{f'(1) \geq 1\} &\leq f''(1) \left(1 + \frac{\ln f'(1)}{f'(1)} \right) \\ &\leq c f''(1) I\{f'(1) \geq 1\}. \end{aligned}$$

Эта оценка показывает, что условие (3) влечет (9). В частности, отсюда следует, что условие $\mathcal{A}$ слабее, чем совокупность ограничений (2)–(3).

З а м е ч а н и е 2. Предположение об абсолютной непрерывности распределения X можно ослабить. Однако это требует более деликатных (и временами утомительных) рассуждений, связанных с вводимыми позднее функциями восстановления и гармоническими функциями, и мы не будем этого делать.

З а м е ч а н и е 3. Если $\eta_1 \leq C < \infty$ с вероятностью 1 и выполнено (5), то условие (6) выполнено автоматически.

Существуют два основных подхода к нахождению асимптотики вероятности невырождения в критических и докритических ВПСС. Первый из них, предложенный М.В. Козловым в [10], опирается на свойства нижних лестничных моментов сопровождающего случайного блуждания ВПСС. При втором подходе, принадлежащем И. Гейгеру и Г. Керстингу [6], ключевым моментом является переход (при помощи преобразования «крамеровского» типа) от исходного однородного ветвящегося процесса в случайной среде к некоторому неоднородному процессу с «приятными» свойствами. Метод, при помощи которого будут доказаны соотношения (7) и (8), является развитием идей работ [6] и [7] и использует как переход от изучения исходного ветвящегося процесса в случайной среде к исследованию некоторого неоднородного процесса, так и тот факт, что для преобразованного процесса точка последнего достижения максимума сопровождающего случайного блуждания на отрезке $[0, n]$ разбивает на (условно) независимые отрезки не только траекторию этого случайного блуждания, но и случайную последовательность производящих функций, породившую эту траекторию.

2. Преобразование мер, связанных с процессом Z_n . Пусть Π — множество всех бесконечномерных векторов (1), а Σ — естественная σ -алгебра, порожденная подмножествами Π . Согласно нашему определению, производящую функцию $f_n(s)$ числа непосредственных потомков частиц n -го поколения можно рассматривать как случайный вектор π_n на вероятностном пространстве $(\Pi, \Sigma, \mathbf{P})$, в то время как совместное распределение набора $f_0(s), f_1(s), \dots, f_{n-1}(s)$ задается естественной произдукт-мерой $\mathbf{P}^n = \mathbf{P} \times \mathbf{P} \times \dots \times \mathbf{P}$ на измеримом пространстве

$$(\Pi^n, \Sigma^n) = (\Pi, \Sigma) \times (\Pi, \Sigma) \times \dots \times (\Pi, \Sigma),$$

а вся последовательность $f_0(s), f_1(s), \dots, f_{n-1}(s), \dots$ определена на измеримом пространстве $(\Pi^\infty, \Sigma^\infty)$ и распределена в соответствии с мерой $\mathbf{P}^\infty$ (по теореме Ионеску Тулчи о продолжении меры и существовании случайной последовательности (см., например, [14], гл. II, § 9) такая вероятностная мера существует и единственна). Ясно, что в этом случае величины

$$X_{n+1} := \ln(\Sigma_{i=0}^\infty i \pi_n^{(i)}) = \ln f'_n(1), \quad n \in \mathbf{N}_0,$$

и $S_0 = 0, S_n = X_1 + \dots + X_n$ будут корректно определенными случайными величинами на $(\Pi^\infty, \Sigma^\infty)$ относительно меры $\mathbf{P}^\infty$, если мы предположим (а далее мы будем рассматривать только такой случай), что $\mathbf{P}\{\pi_n^{(0)} = 1\} = 0$.

В последующем изложении нам будет удобно перейти от первоначальной меры $\mathbf{P}^\infty$ на Σ^∞ к мере $\hat{\mathbf{P}}^\infty$ на Σ^∞ , положив для любой измеримой ограниченной функции $\psi_n(y_1, \dots, y_n), y_j \in \Pi, n = 1, 2, \dots$,

$$\hat{\mathbf{E}}^\infty[\psi(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})] = \lambda^{-n} \mathbf{E}[e^{S_n} \psi(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})], \quad (10)$$

где $\lambda = \mathbf{E}f'_0(1) = \mathbf{E}Z_1$. В частности, для любого набора измеримых множеств $A_0, A_1, \dots, A_{n-1} \subseteq \Sigma$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}^\infty\{f_0 \in A_0, f_1 \in A_1, \dots, f_{n-1} \in A_{n-1}\} \\ = \lambda^{-n} \mathbf{E}[e^{S_n} I(f_0 \in A_0, f_1 \in A_1, \dots, f_{n-1} \in A_{n-1})] \end{aligned}$$

и, как следствие,

$$\hat{\mathbf{E}}^\infty[\ln f'_0(1)] = \lambda^{-1} \mathbf{E}[e^{X_1} \ln f'_0(1)] = \lambda^{-1} \mathbf{E}[f'_0(1) \ln f'_0(1)] = 0, \quad (11)$$

если начальный процесс был промежуточно докритическим. Обращаясь еще раз к теореме Ионеску Тулчи, мы видим, что такая вероятностная мера существует и единственна. Далее, для упрощения обозначений, будем писать $\hat{\mathbf{P}}$ вместо $\hat{\mathbf{P}}^\infty$ и $\hat{\mathbf{E}}$ вместо $\hat{\mathbf{E}}^\infty$.

Очевидно, что

$$\mathbf{E}[\psi(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})] = \lambda^n \hat{\mathbf{E}}[e^{-S_n} \psi(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})].$$

Отсюда, полагая

$$\begin{aligned} f_{k,n}(s) &= f_k(f_{k+1}(\dots(f_{n-1}(s))\dots)), \quad 0 \leq k \leq n-1, \\ f_{n,n}(s) &= 1, \quad f_{n,0}(s) = f_{n-1}(f_{n-2}(\dots(f_0(s))\dots)), \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

и замечая, что в силу симметрии

$$\mathbf{P}\{Z_n > 0\} = \mathbf{E}(1 - f_{0,n}(0)) = \mathbf{E}(1 - f_{n,0}(0)),$$

получаем

$$\mathbf{P}\{Z_n > 0\} = \lambda^n \hat{\mathbf{E}}[e^{-S_n} (1 - f_{n,0}(0))]. \quad (12)$$

Кроме того, если условие (2) нарушено, то, согласно (5), для $\alpha \in (1, 2]$

$$\hat{\mathbf{P}}\{X > t\} = \lambda^{-1} \mathbf{E}e^X I\{X > t\} \sim \frac{L(t)}{\lambda t^\alpha}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Замечая далее, что

$$\hat{\mathbf{P}}\{X < -t\} = \lambda^{-1} \mathbf{E}e^X I\{X < -t\} \leq \lambda^{-1} e^{-t},$$

мы видим, что при $\alpha \in (1, 2)$ распределение случайной величины X (относительно меры $\hat{\mathbf{P}}$) принадлежит к области притяжения спектрально положительного закона с характеристической функцией

$$\chi(t) = \exp \left\{ -c|t|^\alpha \left(1 + i \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right\}. \quad (14)$$

Представления (12) и (13) играют существенную роль в последующем анализе. Однако прежде чем использовать их, нам необходимо доказать ряд вспомогательных утверждений.

3. Свойства случайных блужданий и ветвящихся процессов относительно меры $\hat{P}$. С этого момента будем предполагать, если не оговорено иное, что набор $X, X_1, X_2, \dots$ состоит из независимых случайных величин с общей функцией распределения, подчиняющейся условию (A1).

Положим

$$\tau = \min\{k \geq 1: S_k < 0\}, \quad \tau^0 = \min\{k \geq 1: S_k \geq 0\}.$$

В последующем символами $c, c_1, \dots$ будем обозначать положительные константы, а символами $L_1(n), L_2(n), \dots$ — функции, медленно меняющиеся при $n \rightarrow \infty$. Они могут быть различными в разных формулах.

Следующая лемма является переформулировкой леммы 5 работы [15].

Лемма 1 (см. [15]). *Если выполнено условие (A1), то для любого $t > 0$ существует медленно меняющаяся функция $L_2(n)$ такая, что*

$$\hat{E}[e^{-tS_n}; \tau > n] = O(n^{-(1/\alpha+1)} L_2(n)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Обозначим $0 = \Gamma_0 < \Gamma_1 < \Gamma_2 < \dots$ строгие возрастающие лестничные моменты случайного блуждания $\{S_n\}_{n \geq 0}$:

$$\Gamma_{j+1} := \min(n > \Gamma_j: S_n > S_{\Gamma_j}), \quad j \geq 0.$$

Положим

$$\mu_n := \max_{0 \leq k \leq n} S_k, \quad m_n(x) = \hat{P}\{\mu_n \leq x\}, \quad x \geq 0. \quad (15)$$

Обозначим $U(x) = 0, x < 0, U(0) = 1,$

$$U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{P}\{S_k \leq x, \tau > k\} = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{P}\{S_{\Gamma_j} \leq x\}, \quad x > 0. \quad (16)$$

Из леммы 1 работы [9] вытекает, что при наших условиях $U(x)$ является гармонической функцией, т.е., для любого $x \geq 0$

$$\hat{E}U(x - X_1) = U(x). \quad (17)$$

Положим

$$\rho = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi\alpha} \arctg\left(-\operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\alpha}. \quad (18)$$

Две леммы, формулируемые ниже, являются следствиями лемм 7 и 9 статьи [15].

Лемма 2 (см. [15]). *Если выполнено условие (A1), то существует медленно меняющаяся функция $L_3(x)$ такая, что*

$$U(x) \sim x^{\alpha(1-\rho)} L_3(x) = x L_3(x), \quad x \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Лемма 3 (см. [15]). Если выполнено условие (A1), то существует медленно меняющаяся функция $L_4(x)$ такая, что при $n \rightarrow \infty$

$$m_n(x) \sim U(x) n^{-1/\alpha} L_4(n) \quad \text{для любого фиксированного } x > 0, \quad (20)$$

$$\hat{\mathbf{P}}\{\tau^0 > n\} = m_n(0) \sim n^{-1/\alpha} L_4(n), \quad (21)$$

и найдется константа $c_1 > 0$ такая, что для всех $x > 0$

$$m_n(x) \leq c_1 U(x) n^{-1/\alpha} L_4(n). \quad (22)$$

Формула, указанная в следующей лемме, играет существенную роль в наших рассуждениях. Она получена путем естественных преобразований из соответствующей формулы работы [6].

Лемма 4 (сравните с [6]). Пусть $f_j \neq 1$, $0 \leq j \leq n-1$. Для любого $0 \leq s < 1$

$$\frac{e^{S_n}}{1 - f_{n,0}(s)} = \frac{1}{1-s} + \sum_{j=1}^n \eta_{j,0}(s) e^{S_j}, \quad (23)$$

где

$$\eta_{j,0}(s) = \frac{1}{1 - f_{j,0}(s)} - \frac{1}{f'_{j-1}(1)(1 - f_{j-1,0}(s))} \leq \eta_j := \frac{f''_{j-1}(1)}{(f'_{j-1}(1))^2}. \quad (24)$$

Для того, чтобы идти дальше, нам необходимо ввести еще одну вероятностную меру.

Для любого ограниченного функционала ψ , который зависит только от $f_0, f_1, \dots, f_{k-1}$, положим

$$\hat{\mathbf{E}}^-[\psi(f_0, \dots, f_{k-1})] := \hat{\mathbf{E}}[\psi(f_0, \dots, f_{k-1}) U(-S_k) I\{\tau^0 > k\}]. \quad (25)$$

Заметим, что ввиду (17) это определение корректно. В частности, мы получаем вероятностную меру

$$\hat{\mathbf{P}}^- \{f_j \in dx_j, j = 0, 1, \dots, k-1\} = \hat{\mathbf{E}}^- I\{f_j \in dx_j, j = 0, 1, \dots, k-1\}.$$

Лемма 5. Если выполнено условие (A1), то для любого ограниченного функционала ψ и $k \geq 1$ справедливо представление

$$\hat{\mathbf{E}}^-[\psi(f_0, \dots, f_{k-1})] = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{E}}[\psi(f_0, \dots, f_{k-1}) | \tau^0 > n]. \quad (26)$$

Доказательство. Так как производящие функции $f_0, \dots, f_{k-1}$ не зависят от случайной последовательности $\{S_m - S_k, m = k, k+1, \dots, n\}$, то

$$\hat{\mathbf{E}}[\psi(f_0, \dots, f_{k-1}) | \tau^0 > n] = \frac{\hat{\mathbf{E}}[\psi(f_0, \dots, f_{k-1}) m_{n-k}(-S_k) I\{\tau^0 > k\}]}{m_n(0)}.$$

Вспоминая соотношения (20)–(21) и применяя теорему об ограниченной сходимости, получаем (26).

Доказательство закончено.

Положим $\xi_n(s) = e^{-S_n}(1 - f_{n,0}(s))$, $n = 1, 2, \dots$

Лемма 6. Если выполнено условие $\mathcal{A}$, то для любого $s \in [0, 1)$ и любого фиксированного $k = 1, 2, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{P}}\{\xi_k(s) < x \mid \tau^0 > n\} = \hat{\mathbf{P}}^-\{\xi_k(s) < x\}. \quad (27)$$

Кроме того, на измеримом пространстве $(\Pi^\infty, \Sigma^\infty)$ найдется случайная величина $\xi_\infty(s)$ такая, что при $k \rightarrow \infty$

$$\xi_k(s) \rightarrow \xi_\infty(s) \quad \hat{\mathbf{P}}\text{-п.н.}, \quad (28)$$

причем $\hat{\mathbf{P}}^-\{\xi_\infty(s) > 0\} = 1$.

Доказательство. Как и в предыдущей лемме,

$$\hat{\mathbf{P}}\{\xi_k(s) < x \mid \tau^0 > n\} = (m_n(0))^{-1} \hat{\mathbf{E}}[I\{\xi_k(s) < x\} m_{n-k}(-S_k) I\{\tau^0 > k\}].$$

Применение к этому равенству теоремы об ограниченной сходимости завершает доказательство равенства (27). Для доказательства (28) заметим, что в силу того, что

$$0 \leq \xi_k(s) = e^{-S_k}(1 - f_{k,0}(s)) \leq e^{-S_k} f'_{k-1}(1)(1 - f_{k-1,0}(s)) = \xi_{k-1}(s),$$

последовательность $\xi_k(s)$ монотонно убывает по k . Следовательно, существует случайная величина $\xi_\infty(s)$ такая, что $\xi_k(s) \rightarrow \xi_\infty(s)$ $\hat{\mathbf{P}}^$ -п.н. Покажем, что $\hat{\mathbf{P}}^-\{\xi_\infty(s) > 0\} = 1$. Действительно, ввиду леммы 4 и неравенства Маркова для любого $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ и любого $x > 0$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}^-\left\{\frac{e^{S_k}}{1 - f_{k,0}(s)} > x\right\} &\leq \hat{\mathbf{P}}^-\left\{\frac{1}{1 - s} + \sum_{j=1}^k \eta_j e^{S_j} > x\right\} \\ &\leq x^{-\varepsilon_0} \hat{\mathbf{E}}^-\left\{\frac{1}{(1 - s)^{\varepsilon_0}} + \sum_{j=1}^k \eta_j^{\varepsilon_0} e^{\varepsilon_0 S_j}\right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, доказательство леммы будет завершено, если мы покажем, что

$$\hat{\mathbf{E}}^-\left[\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j^{\varepsilon_0} e^{\varepsilon_0 S_j}\right] < \infty. \quad (29)$$

Для доказательства этого факта вспомним, что в силу условия $\mathcal{A}$ и относительно меры $\hat{\mathbf{P}}$

(A1') X_1 принадлежит области притяжения устойчивого закона с параметром $\alpha \in (1, 2]$;

(A2') при $\alpha < 2$ существуют $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ и $\delta_0 \in (0, 1)$ такие, что

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{E}}\left[\eta_1^{\varepsilon_0}\left((1 + X_1)^{\alpha-1+\delta_0} I\{X_1 \geq 0\} + (1 - X_1)^{\alpha-1+\delta_0} e^{\varepsilon_0 X_1} I\{X_1 < 0\}\right)\right] \\ &= \hat{\mathbf{E}}\left[\eta_1^{\varepsilon_0}\left((1 + X_1)^{\alpha(1-\rho)+\delta_0} I\{X_1 \geq 0\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 - X_1)^{\alpha(1-\rho)+\delta_0} e^{\varepsilon_0 X_1} I\{X_1 < 0\}\right)\right] \\ &= \lambda^{-1} \mathbf{E}\left[e^{X_1} \eta_1^{\varepsilon_0} (1 + X_1)^{\alpha(1-\rho)+\delta_0} I\{X_1 \geq 0\}\right] \\ &\quad + \lambda^{-1} \mathbf{E}\left[e^{X_1} \eta_1^{\varepsilon_0} (1 - X_1)^{\alpha(1-\rho)+\delta_0} e^{\varepsilon_0 X_1} I\{X_1 < 0\}\right] < \infty. \end{aligned} \quad (30)$$

(A3') при $\alpha = 2$ условие (30) выполнено с $\delta_0 = 0$.

Условия (A1')–(A3') являются в точности условиями леммы 11 работы [15], которая утверждает, что при их выполнении справедливо неравенство (29).

Лемма доказана.

Лемма 7. Если выполнено условие $\mathcal{A}$, то для любого $s \in [0, 1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{P}}\{\xi_n(s) < x \mid \tau^0 > n\} = \hat{\mathbf{P}}^-\{\xi_\infty(s) < x\} \quad (31)$$

во всех точках непрерывности распределения $\xi_\infty(s)$.

Доказательство. В силу леммы 6 для того, чтобы убедиться в справедливости (31), достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{P}}\{\xi_k(s) - \xi_n(s) > \varepsilon \mid \tau^0 > n\} = 0. \quad (32)$$

Для любого $\gamma > 1$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}\{\xi_k(s) - \xi_n(s) > \varepsilon \mid \tau^0 > n\} &= (m_n(0))^{-1} \hat{\mathbf{P}}\{\xi_k(s) - \xi_n(s) > \varepsilon; \tau^0 > n\} \\ &\leq (m_n(0))^{-1} \hat{\mathbf{P}}\{\xi_k(s) - \xi_n(s) > \varepsilon; \tau^0 > n\gamma\} \\ &\quad + (m_n(0))^{-1} \hat{\mathbf{P}}\{\tau^0 \leq n\gamma; \tau^0 > n\}. \end{aligned} \quad (33)$$

Согласно соотношению (22)

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{P}}\{\xi_k(s) - \xi_n(s) > \varepsilon; \tau^0 > n\gamma\} \\ &= \hat{\mathbf{E}}\left[I\{\xi_k(s) - \xi_n(s) > \varepsilon\} m_{n(\gamma-1)}(-S_n) I\{\tau^0 > n\}\right] \\ &\leq \frac{c_1 L_4(n(\gamma-1))}{(n(\gamma-1))^{1/\alpha}} \hat{\mathbf{E}}\left[I\{\xi_k(s) - \xi_n(s) > \varepsilon\} U(-S_n) I\{\tau^0 > n\}\right] \\ &= \frac{c_1 L_4(n(\gamma-1))}{(n(\gamma-1))^{1/\alpha}} \hat{\mathbf{P}}^-\{\xi_k(s) - \xi_n(s) > \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Ввиду эквивалентности (20) для достаточно больших значений n

$$\begin{aligned} &(m_n(0))^{-1} \hat{\mathbf{P}}\{\xi_k(s) - \xi_n(s) > \varepsilon; \tau^0 > n\gamma\} \\ &\leq c_3 \frac{n^{1/\alpha} L_4(n(\gamma-1))}{(n(\gamma-1))^{1/\alpha} L_4(n)} \hat{\mathbf{P}}^-(\xi_k(s) - \xi_n(s) > \varepsilon). \end{aligned}$$

Отсюда, в силу свойств медленно меняющихся функций и сходимости в (28), выводим, что

$$\begin{aligned} &\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} (m_n(0))^{-1} \hat{\mathbf{P}}\{\xi_k(s) - \xi_n(s) > \varepsilon; \tau^0 > n\gamma\} \\ &\leq c_3 (\gamma-1)^{-1/\alpha} \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{P}}^-\{\xi_k(s) - \xi_\infty(s) > \varepsilon\} = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

С другой стороны, снова в силу (20)

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \downarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} (m_n(0))^{-1} \hat{\mathbf{P}}\{\tau^0 \leq n\gamma; \tau^0 > n\} &= 1 - \lim_{\gamma \downarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_{n\gamma}(0)}{m_n(0)} \\ &= 1 - \lim_{\gamma \downarrow 1} \gamma^{-1/\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Комбинируя оценки (33)–(35), мы получаем равенство (32), что и доказывает лемму.

4. Доказательство предельной теоремы. Теперь у нас все готово для доказательства нашей предельной теоремы.

Сначала докажем представление (4). Пусть

$$T(n) = \max \{k \in [0, n]: S_j \leq S_k, j \leq k, \text{ и } S_j < S_k, n \geq j > k\}$$

обозначает последний момент достижения максимума последовательностью $S_0, S_1, \dots, S_n$. В силу (12) и формулы полной вероятности

$$\lambda^{-n} \mathbf{P}\{Z_n > 0\} = \sum_{k=0}^n \hat{\mathbf{E}}[e^{-S_n}(1 - f_{n,0}(0)); T(n) = k].$$

Заметим, что

$$1 - f_{n,0}(0) \leq f'_{n-1}(1)(1 - f_{n-1,0}(0)) = e^{X_n}(1 - f_{n-1,0}(0)) \leq e^{\min_{0 \leq j \leq n} (S_n - S_j)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}[e^{-S_n}(1 - f_{n,0}(0)); T(n) = k] &\leq \hat{\mathbf{E}}[e^{-S_n} e^{\min_{0 \leq j \leq n} (S_n - S_j)}; T(n) = k] \\ &= \hat{\mathbf{E}}[e^{-\max_{0 \leq j \leq n} S_j}; T(n) = k] = \hat{\mathbf{E}}[e^{-S_k}; T(n) = k]. \end{aligned}$$

Далее, согласно принципу двойственности

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}[e^{-S_k}; T(n) = k] &= \hat{\mathbf{E}}[e^{-S_k}; S_j \leq S_k, j \leq k, \text{ и } S_j < S_k, n \geq j > k] \\ &= \hat{\mathbf{E}}[e^{-S_k}; \tau > k] \hat{\mathbf{P}}\{\tau^0 > n - k\}. \end{aligned}$$

Ввиду леммы 1 и оценки (21)

$$\hat{\mathbf{E}}[e^{-S_k}; \tau > k] \hat{\mathbf{P}}\{\tau^0 > n - k\} \leq ck^{-1/\alpha-1} L_2(k) (n - k + 1)^{-1/\alpha} L_4(n - k + 1).$$

Следовательно, для фиксированных N и $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=N+1}^n \hat{\mathbf{E}}[e^{-S_k}; T(n) = k] \\ &\leq c_1 \sum_{k=N+1}^{n(1-\varepsilon)} k^{-(1/\alpha+1)} L_2(k) (n - k + 1)^{-1/\alpha} L_4(n - k + 1) \\ &\quad + c_2 \sum_{k=n(1-\varepsilon)}^n k^{-(1/\alpha+1)} L_2(k) (n - k + 1)^{-1/\alpha} L_4(n - k + 1) \\ &\leq c_3 n^{-1/\alpha} L_4(n) \sum_{k=N+1}^{\infty} k^{-(1/\alpha+1)} L_2(k) \\ &\quad + c_4 n^{-(1/\alpha+1)} L_2(n) \sum_{k=0}^{n\varepsilon} (k + 1)^{-1/\alpha} L_4(k + 1). \end{aligned}$$

Ясно, что для любого $\delta > 0$ найдутся N_0 и n_0 такие, что для всех $N \geq N_0$

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} k^{-(1/\alpha+1)} L_2(k) \leq \delta,$$

а для всех $n \geq n_0$

$$n^{-(1/\alpha+1)} L_2(n) \sum_{k=0}^{n\epsilon} (k+1)^{-1/\alpha} L_4(k+1) \leq cn^{-(1/\alpha+1)} L_2(n) n^{1-1/\alpha} L_4(n) \\ \leq \delta n^{-1/\alpha} L_4(n).$$

Отсюда при $n \geq n_0$ и $n+1 \geq N \geq N_0$

$$\sum_{k=N+1}^n \widehat{\mathbf{E}}[e^{-S_k}; T(n) = k] \leq \delta cn^{-1/\alpha} L_4(n),$$

или

$$\lambda^{-n} \mathbf{P}\{Z_n > 0\} = \sum_{k=0}^N \widehat{\mathbf{E}}[e^{-S_n}(1 - f_{n,0}(0)); T(n) = k] + \delta_{n,N} n^{-1/\alpha} L_4(n), \quad (36)$$

где $\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{n,N} = 0$. С другой стороны, нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathbf{E}}[e^{-S_n}(1 - f_{n,0}(0)); T(n) = k] \\ &= \widehat{\mathbf{E}}[e^{-S_k - (S_n - S_k)}(1 - f_{n,k}(f_{k,0}(0))); T(n) = k] \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 e^{-x} \widehat{\mathbf{E}}[e^{-S_{n-k}^*}(1 - F_{n-k,0}(y)); \\ & \quad \tau_*^0 > n - k] d\widehat{\mathbf{P}}\{S_k \leq x, f_{k,0}(0) \leq y; \tau > k\}, \end{aligned}$$

где S_{n-k}^* и τ_*^0 — случайные величины, аналогичные S_{n-k} и τ^0 , но построенные при помощи последовательности $F_j(y) \stackrel{d}{=} f_{j+k}(y)$, $j = 0, 1, \dots, n - k - 1$, $0 \leq y \leq 1$; причем $F_{n-k,0}(y) = F_{n-k-1}(F_{n-k-2}(\dots(F_0(y))\dots))$. В силу леммы 7 и теоремы об ограниченной сходимости при любом фиксированном y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\mathbf{E}}[e^{-S_{n-k}^*}(1 - F_{n-k,0}(y)) | \tau_*^0 > n - k] = \widehat{\mathbf{E}}^-[\xi_\infty(y)] > 0.$$

Отсюда, используя еще раз теорему об ограниченной сходимости и тот факт, что при любом фиксированном k и $n \rightarrow \infty$

$$\widehat{\mathbf{P}}\{\tau_*^0 > n - k\} = \widehat{\mathbf{P}}\{\tau^0 > n - k\} \sim (n - k)^{-1/\alpha} L_4(n - k) \sim n^{-1/\alpha} L_4(n),$$

закключаем, что

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/\alpha} (L_4(n))^{-1} \widehat{\mathbf{E}}[e^{-S_n}(1 - f_{n,0}(0)); T(n) = k] \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 e^{-x} \widehat{\mathbf{E}}^-[\xi_\infty(y)] d\widehat{\mathbf{P}}\{S_k \leq x, f_{k,0}(0) \leq y; \tau > k\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/\alpha} (L_4(n))^{-1} \lambda^{-n} \mathbf{P}\{Z_n > 0\} \\ &= \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty \int_0^1 e^{-x} \widehat{\mathbf{E}}^-[\xi_\infty(y)] d\widehat{\mathbf{P}}\{S_k \leq x, f_{k,0}(0) \leq y; \tau > k\} \\ &= \sum_{k=0}^\infty \widehat{\mathbf{E}}^-[e^{-S_k} \xi_\infty(f_{k,0}(0)) I\{\tau > k\}] \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (4) доказано. Заметим, что случайные величины $\xi_\infty(y)$ и $f_{k,0}(0)$ независимы.

При помощи таких же рассуждений можно показать, что для каждого $s \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/\alpha} (L_4(n))^{-1} \widehat{\mathbf{E}}[1 - s^{Z_n}] &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/\alpha} (L_4(n))^{-1} \widehat{\mathbf{E}}[e^{-S_n} (1 - f_{n,0}(s))] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\mathbf{E}}^{-}[e^{-S_k} \xi_\infty(f_{k,0}(s)) I\{\tau > k\}] \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[s^{Z_n} \mid Z_n > 0] = 1 - \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\mathbf{E}}^{-}[e^{-S_k} \xi_\infty(f_{k,0}(s)) I\{\tau > k\}]}{\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\mathbf{E}}^{-}[e^{-S_k} \xi_\infty(f_{k,0}(0)) I\{\tau > k\}]}. \quad (37)$$

Правая часть (37) и есть производящая функция $\phi(s)$, упомянутая в формуле (8) при формулировке теоремы 1.

Покажем, что предельная случайная величина, определяемая производящей функцией, стоящей в правой части (37), является собственной.

Для $x > 0$ и $n \geq 1$ положим

$$J_{n,x}(f_0, \dots, f_{n-1}) := \mathbf{P}\{Z_n \geq x \mid f_0, \dots, f_{n-1}\}.$$

В силу того, что случайные функции f_j перестановочны,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{Z_n \geq x\} &= \mathbf{E}[J_{n,x}(f_{n-1}, \dots, f_0)] \\ &\leq \mathbf{E}[J_{n,x}(f_{n-1}, \dots, f_0); \mu_n > x^{1/2}] \\ &\quad + \mathbf{E}[J_{n,x}(f_{n-1}, \dots, f_0); \mu_n \leq x^{1/2}], \end{aligned} \quad (38)$$

где, как и раньше, $\mu_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k$. Ясно, что

$$\begin{aligned} &\lambda^{-n} \mathbf{E}[J_{n,x}(f_{n-1}, \dots, f_0); \mu_n > x^{1/2}] \\ &= \widehat{\mathbf{E}}[e^{-S_n} J_{n,x}(f_{n-1}, \dots, f_0); \mu_n > x^{1/2}] \\ &\leq \widehat{\mathbf{E}}[e^{-S_n} (1 - f_{n,0}(0)); \mu_n > x^{1/2}] \\ &\leq \widehat{\mathbf{E}}[e^{-\mu_n}; \mu_n > x^{1/2}] \leq \sum_{k \geq [x^{1/2}]} e^{-k} \widehat{\mathbf{P}}\{k < \mu_n \leq k+1\} \\ &\leq \sum_{k \geq [x^{1/2}]} e^{-k} m_n(k+1) \leq c_1 n^{-1/\alpha} L_4(n) \sum_{k \geq [x^{1/2}]} e^{-k} U(k+1), \end{aligned}$$

где на последнем шаге было использовано (22). Ввиду (19) мы видим, что

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda^{-n} n^{1/\alpha} L_4(n) \mathbf{E}[J_{n,x}(f_{n-1}, \dots, f_0); \mu_n > x^{1/2}] = 0. \quad (39)$$

Далее, в силу неравенства Чебышева и соотношения (22)

$$\begin{aligned} &\lambda^{-n} \mathbf{E}[J_{n,x}(f_{n-1}, \dots, f_0); \mu_n \leq x^{1/2}] \leq x^{-1} \lambda^{-n} \mathbf{E}[e^{S_n}; \mu_n \leq x^{1/2}] \\ &= x^{-1} \widehat{\mathbf{P}}\{\mu_n \leq x^{1/2}\} \leq c_1 n^{-1/\alpha} L_4(n) x^{-1} U(x^{1/2}). \end{aligned}$$

Отсюда и из (19) вытекает, что

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda^{-n} n^{1/\alpha} (L_4(n))^{-1} \mathbf{E}[J_{n,x}(f_{n-1}, \dots, f_0); \mu_n \leq x^{1/2}] = 0. \quad (40)$$

Комбинируя (38)–(40) с (7), мы видим, что

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{Z_n > x \mid Z_n > 0\} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{Z_n > x\}}{\mathbf{P}\{Z_n > 0\}} \\ &\leq c \lim_{x \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda^{-n} n^{1/\alpha} (L_4(n))^{-1} \mathbf{P}\{Z_n > x\} = 0. \end{aligned}$$

Это соотношение и показывает, что случайная величина, задаваемая правой частью (37), является собственной.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев В. И. Предельные теоремы для умеренно докритического ветвящегося процесса в случайной среде. — Дискретн. матем., 1998, т. 10, № 1, с. 141–157.
2. Афанасьев В. И. Предельные теоремы для промежуточно докритического и строго докритического ветвящихся процессов в случайной среде. — Дискретн. матем., 2001, т. 13, № 1, с. 132–157.
3. Dekking M. On the survival probability of a branching process in a finite state i.i.d. environment. — Stoch. Proc. Appl., 1988, v. 27, № 1, p. 151–157.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
5. Fleischmann K., Vatutin V. A. Reduced subcritical branching processes in random environment. — Adv. Appl. Probab., 1999, v. 31, № 1, p. 88–111.
6. Geiger J., Kersting G. The survival probability of a critical branching process in random environment. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 3, с. 607–615.
7. Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A. The survival probability of a subcritical branching process in random environment. — Ann. Inst. Henri-Poincaré (B) Probability and Statistics, 2003, v. 39, № 4, p. 593–620.
8. Guivarc'h Y., Liu Q. Propriétés asymptotiques des processus de branchement en environnement aléatoire. — C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 2001, v. 332, № 4, p. 339–344.
9. Hirano K. Determination of the limiting coefficient for exponential functionals of random walks with positive drift. — J. Math. Sci., Tokyo, 1998, v. 5, № 22, p. 299–332.
10. Козлов М. В. Критические ветвящиеся процессы в случайной среде. — Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. XXI, в. 2, с. 813–825.
11. Liu Q. On the survival probability of a branching process in a random environment. — Ann. Inst. Henri-Poincaré, 1996, v. 32, № 1, p. 1–10.
12. Нагаев А. В. Крамеровские большие отклонения в случае, когда сопряженное распределение имеет тяжелый хвост. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 3, с. 456–475.
13. D'Souza J. C., Hambly B. M. On the survival probability of a branching process in a random environment. — Adv. Appl. Probab., 1997, v. 29, № 1, p. 38–55.
14. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980, 576 с.
15. Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е. Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона в случайной среде. I: Предельные теоремы. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 48, в. 2, с. 274–300.
16. Vatutin V. A., Zubkov A. M. Branching Processes II. — J. Soviet Math., 1993, v. 67, № 6, p. 3407–3485.

Поступила в редакцию
3.XII.2002