Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Якимив, Тауберовы теоремы и асимптотика безгранично делимых распределений в конусе, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 3, 487–502

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp267>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 13:51:14

© 2003 г.

ЯКЫМИВ А. Л.*

**ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ И АСИМПТОТИКА
БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В КОНУСЕ¹⁾**

В работе доказаны три многомерные тауберовы теоремы, при помощи которых установлена асимптотика на бесконечности безгранично делимых распределений с носителем в произвольном замкнутом выпуклом остром телесном однородном конусе из $\mathbf{R}^n$.

Ключевые слова и фразы: правильно меняющиеся функции вдоль семейства операторов, вполне допустимые функции для семейства операторов, вполне допустимые функции для конуса, безгранично делимые распределения, спектральная мера Леви.

1. Введение. В настоящей статье доказаны три многомерные тауберовы теоремы сравнения типа [7] в произвольном замкнутом выпуклом остром телесном конусе Γ (см. п. 2, теоремы 1–3). Метод доказательства этих тауберовых теорем является синтезом методов упомянутой работы Ю. Н. Дрожжина и Б. И. Завьялова [7] и работы автора [17]. При помощи этих тауберовых теорем получена асимптотика безгранично делимых распределений, сосредоточенных в конусе Γ (см. п. 3, теорема 4). Теорема 4 продолжает исследования асимптотики многомерных безгранично делимых распределений, проводившиеся ранее в работах В. М. Круглова и его ученика С. Н. Антонова [1]–[3], [8]–[13], М. С. Сгибнева [14], А. М. Улановского [15], Э. Омея [20] и автора [21]. Отметим, что проблеме изучения асимптотики безгранично делимых распределений на бесконечности посвящено большое число работ (особенно в одномерном случае). Ряд ссылок имеется в статье [2], а также в статье [14]. Некоторые вопросы асимптотики многомерных безгранично делимых распределений на бесконечности затронуты в книге Кен-Ити Сато 1999 г. [19].

2. Многомерные тауберовы теоремы. Пусть Γ — замкнутый выпуклый острый телесный конус в $\mathbf{R}^n$ с вершиной в нуле, т.е. замкнутое выпуклое множество в $\mathbf{R}^n$ такое, что для всех $x \in \Gamma$ и $t > 0$ $tx \in \Gamma$,

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: arsen@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 02-01-01080 и гранта президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ 1758.2003.1.

причем $\text{int } \Gamma \neq \emptyset$ и $\text{int } \Gamma^* \neq \emptyset$, где

$$\Gamma^* = \{y: y \in \mathbb{R}^n, (y, x) \geq 0 \forall x \in \Gamma\}.$$

При этом сопряженный конус тоже будет замкнутым выпуклым острым телесным. Более подробную информацию о конусах можно почерпнуть в книге В. С. Владимирова, Ю. Н. Дрожжинова и Б. И. Завьялова [5]. Положим $G = \text{int } \Gamma$, $C = \text{int } \Gamma^*$.

Пусть задано произвольное семейство $U = \{U_k, k \in I \subseteq [0, \infty)\}$ линейных операторов в $\mathbb{R}^n$, которые оставляют конус Γ инвариантным:

$$U_k \Gamma = \Gamma \quad \forall k \in I, \quad J_k = \det U_k. \quad (1)$$

Мы будем считать, что множество I имеет ∞ своей предельной точкой. Оператор $V_k = (U_k^*)^{-1}$ оставляет сопряженный конус Γ^* инвариантным. Для произвольного оператора U_k мы имеем числа

$$\Lambda(k) = \sup_{|e|=1} |U_k e|, \quad \lambda(k) = \inf_{|e|=1} |U_k e|. \quad (2)$$

Оператору V_k будут соответствовать числа

$$\frac{1}{\lambda(k)} = \sup_{|e|=1} |V_k e|, \quad \frac{1}{\Lambda(k)} = \inf_{|e|=1} |V_k e|.$$

О п р е д е л е н и е 1. Мы будем говорить, что семейство U_k , $k \in I$, является семейством: первого типа, если $\Lambda(k) \rightarrow \infty$ и $\lambda(k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, $k \in I$; второго типа, если существует $b > 0$ такое, что $\Lambda(k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, $k \in I$ и $\lambda(k) \geq b > 0$ ($k \in I$); третьего типа, если $\Lambda(k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, $k \in I$.

О п р е д е л е н и е 2. Мы будем говорить, что функция $f(x)$, определенная, положительная и измеримая в G , правильно меняется в G вдоль семейства $U = \{U_k, k \in I\}$, и писать $f \in R(U, G)$, если для некоторого вектора $e \in G$ и для всех $x \in G$ при $x_k \rightarrow x$ ($k \rightarrow \infty$, $k \in I$)

$$\frac{f(U_k x_k)}{f(U_k e)} \rightarrow \phi(x) > 0, \quad \phi(x) < \infty. \quad (3)$$

Из (1) следует (см. [18, теорема 2]), что

$$\frac{f(U_k x)}{f(U_k e)} \xrightarrow{x \in K} \phi(x) \in (0, \infty) \quad (k \rightarrow \infty, k \in I) \quad (4)$$

для произвольного компакта $K \subset G$, причем $\phi(x)$ непрерывна в G . Согласно (3), мы будем записывать $\phi = H_e(U, G)$.

З а м е ч а н и е 1. Множество $R(U, G)$ не зависит от вектора $e \in G$. При этом, если (3) выполнено для некоторого вектора $e \in G$, то оно будет выполнено для произвольного вектора $e_1 \in G$, при этом функция ϕ умножится на $\lim_{k \rightarrow \infty, k \in I} f(U_k e)/f(U_k e_1)$.

О п р е д е л е н и е 3. Функцию $f(x)$, определенную в G , мы будем называть вполне допустимой для семейства операторов $U = \{U_k, k \in I\}$, если $f \in R(U, G)$, f локально суммируема в G и существует k_0 такое, что

$$\frac{f(U_k x)}{f(U_k e)} \leq \eta(x), \quad k > k_0, \quad k \in I, \quad x \in G, \quad (5)$$

где e — некоторый фиксированный вектор из G , причем η имеет медленный рост в G :

$$\int_G \frac{\eta(x) dx}{1 + |x|^q} < \infty \quad \text{для некоторого } q.$$

З а м е ч а н и е 2. Определение 3 эквивалентно определению 0-вполне допустимой функции для семейства $U = \{U_k, k \in I\}$ из [5, гл. II, раздел 5.2].

О п р е д е л е н и е 4. Функция $f(x)$, определенная в G , называется допустимой для конуса Γ , если для произвольного семейства линейных операторов $U = \{U_k, k \in I\}$, оставляющих конус Γ инвариантным, существует подсемейство $V = \{U_k, k \in J \subseteq I\}$ (J — неограничено), относительно которого $f(x)$ будет вполне допустимой.

Множество всех допустимых функций для конуса Γ обозначим через $D(\Gamma)$.

О п р е д е л е н и е 5. Функция $f(x)$, определенная в G , называется допустимой m -го типа ($m = 1, 2, 3$) для конуса Γ , если для произвольного семейства линейных операторов m -го типа $U = \{U_k, k \in I\}$, оставляющих конус Γ инвариантным, существует подсемейство $V = \{U_k, k \in J \subseteq I\}$ (J — неограничено), относительно которого $f(x)$ будет вполне допустимой.

Множество всех допустимых функций m -го типа для конуса Γ обозначим через $D_m(\Gamma)$, $m = 1, 2, 3$.

О б о з н а ч е н и е 1. Через $R_m(\Gamma)$, $m = 1, 2, 3$, мы обозначим множество всех функций $f(x)$, определенных в G , таких, что для произвольного семейства линейных операторов m -го типа $U = \{U_k, k \in I\}$, оставляющих конус Γ инвариантным, существует подсемейство $V = \{U_k, k \in J \subseteq I\}$ (J — неограничено) такое, что $f \in R(V, \Gamma)$ (см. определение 2).

О б о з н а ч е н и е 2. Через $R(\Gamma)$ мы обозначим множество всех функций $f(x)$, определенных в G , таких, что для произвольного семейства линейных операторов $U = \{U_k, k \in I\}$, оставляющих конус Γ инвариантным, существует подсемейство $V = \{U_k, k \in J \subseteq I\}$ (J — неограничено) такое, что $f \in R(V, \Gamma)$ (см. определение 2).

Ясно, что

$$D(\Gamma) \subseteq D_3(\Gamma) \subseteq D_2(\Gamma) \subseteq D_1(\Gamma), \quad R(\Gamma) \subseteq R_3(\Gamma) \subseteq R_2(\Gamma) \subseteq R_1(\Gamma).$$

Приведем примеры функций из $\mathbf{R}(\Gamma)$ и $D(\Gamma)$.

Пусть $\mathbf{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, x_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, n\}$ — положительный координатный угол (октант), $V_n^+ = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1}, x_0 \geq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\}$ — световой конус будущего в $\mathbf{R}^{n+1}$.

Пример 1 (см. [5, гл. II, раздел 5.3, теорема 1]). Пусть $f(x)$ — положительная, непрерывно дифференцируемая функция в $\text{int } \mathbf{R}_+^n$, удовлетворяющая условию

$$a \leq \frac{x_j \partial f(x) / \partial x_j}{f(x)} \leq b, \quad x_j > 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

при некоторых $a, b \in (-\infty, \infty)$. Тогда $f \in R(\mathbf{R}_+^n)$. В частности, если $a > -1$, то $f \in D(\mathbf{R}_+^n)$.

Пример 2 (см. [5, гл. II, раздел 5.3, теорема 2]). Пусть $f(x)$ — положительная, непрерывно дифференцируемая функция в $\text{int } V_n^+$ и

$$a \leq \frac{(l, x)(l, \nabla f(x))}{f(x)} \leq b, \quad x \in V_n^+, \quad l \in \partial V_n^+, \quad |l| = 1,$$

при некоторых $a, b \in (-\infty, \infty)$, где $\nabla = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$. Тогда $f \in R(V_n^+)$. В частности, если $a > -1$, то $f \in D(V_n^+)$.

Пусть Γ — замкнутый выпуклый острый телесный конус в $\mathbf{R}^n$ с вершиной в нуле. Рассмотрим функцию χ , представимую в виде

$$\chi(t) = \eta(t)\phi(t), \quad t \in (0, \infty), \quad (6)$$

где функции η и ϕ удовлетворяют условиям:

1) существуют положительные числа c_1 и c_2 такие, что

$$c_1 \leq \eta(t) \leq c_2, \quad t \in (0, \infty); \quad (7)$$

$$2) \quad \omega(\lambda, t) = \frac{\eta(\lambda t)}{\eta(t)} \xrightarrow{t \in (0, \infty)} 1, \quad \lambda > 1; \quad (8)$$

3) функция ϕ положительна, непрерывно дифференцируема и удовлетворяет неравенствам

$$a \leq \frac{t\phi'(t)}{\phi(t)} \leq b \quad (0 < t < \infty) \quad (9)$$

при некоторых $a, b \in (-\infty, \infty)$.

Пример 3 (см. [5, гл. II, раздел 5.4]). Пусть функция χ удовлетворяет условиям (6)–(9) и фиксированы векторы $l_i \in \Gamma^*$, числа $A_i > 0$ и $\alpha \in \mathbf{R}^1$. Тогда $f(x) = \chi(\omega(x)) \in R(\Gamma)$, где

$$\omega(x) = \frac{\sum_{i=1}^p A_i (l_i, x)^{\alpha_i}}{\sum_{i=p+1}^{p+q} A_i (l_i, x)^{\alpha_i}}, \quad x \in \Gamma.$$

В частности, если $-\alpha_i a < 1$ при $i = 1, \dots, p$ и $\alpha_i b < 1$ при $i = p + 1, \dots, p + q$, то $f(x) \in D(\Gamma)$.

Сформулируем некоторые необходимые сведения из [17] (подробные доказательства имеются в [16]). Пусть, как и ранее, Γ — замкнутый выпуклый телесный конус в $\mathbf{R}^n$ с вершиной в нуле. В конусе Γ введем отношение порядка [4]: будем писать, что

$$x \overset{\Gamma}{\leq} y \quad (x \overset{\Gamma}{<} y),$$

если $x, y, y - x \in \Gamma$ (соответственно $x \in \Gamma, y, y - x \in \Gamma$). Действительную функцию $f(x)$, определенную в G , назовем неубывающей (соответственно невозрастающей) в G , если при $x, y \in G, x \overset{\Gamma}{<} y$ имеет место неравенство $f(x) \leq f(y)$ (соответственно $f(x) \geq f(y)$). В [16] доказана следующая лемма.

Лемма 1. Пусть f не убывает в G (не возрастает в G).

1. Тогда для каждого $x \in G$ существуют два следующих предела:

$$\lim_{y \uparrow x} f(y) \equiv \lim_{y \rightarrow x, y < x} f(y) = f(x_-), \quad \lim_{y \downarrow x} f(y) \equiv \lim_{y \rightarrow x, y > x} f(y) = f(x_+),$$

где $f(x_-) = \sup(f(y), y \overset{\Gamma}{<} x), f(x_+) = \inf(f(y), y \overset{\Gamma}{>} x)$ (соответственно $f(x_-) = \inf(f(y), y \overset{\Gamma}{<} x), f(x_+) = \sup(f(y), y \overset{\Gamma}{>} x)$), причем $f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+)$ (соответственно $f(x_-) \geq f(x) \geq f(x_+)$).

2. Для того чтобы f была непрерывной в $x \in G$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x_-) = f(x_+)$.

Обозначение 3. Через $M_1(G)$ (соответственно через $M_2(G)$) обозначим множество всех неубывающих (соответственно невозрастающих функций в G), непрерывных «сверху», т.е. таких, что для всех $x \in G$ $f(x) = f(x_+)$, $M(G) = M_1(G) \cup M_2(G)$.

Пусть $i = 1$ или $i = 2$. Будем говорить, что семейство $\{f_k, k \in I\}$, $f_k \in M_i(G)$, слабо сходится при $k \rightarrow \infty, k \in I$ к $f \in M_i(G)$, и писать $f_k \Rightarrow f$ ($k \rightarrow \infty, k \in I$), если $f_k(x) \rightarrow f(x)$ при $k \rightarrow \infty, k \in I$ для произвольной точки x непрерывности функции f .

Пусть $\mathfrak{A}$ — совокупность всех ограниченных борелевских множеств из $\mathbf{R}^n$. Меры, рассматриваемые далее, будут считаться неотрицательными, σ -конечными и сосредоточенными на Γ . Мы будем говорить, что семейство мер $\mu_k, k \in I$, слабо сходится при $k \rightarrow \infty, k \in I$ к мере μ , и писать $\mu_k \Rightarrow \mu$ ($k \rightarrow \infty, k \in I$), если $\mu_k(A) \rightarrow \mu(A)$ ($k \rightarrow \infty, k \in I$) для каждого $A \in \mathfrak{A}$ такого, что $\mu(\partial A) = 0$. Совокупности монотонных функций или мер мы будем называть слабо предкомпактными, если они предкомпактны в определенных выше слабых топологиях. В [16] доказана следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $i = 1$ или $i = 2$. Для того чтобы семейство функций $F \subseteq M_i(G)$ было слабо предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы $\sup_{f \in F} |f(x)| < \infty$ для каждого $x \in G$.

Преобразования Лапласа меры μ и функции f на Γ будем обозначать соответственно через $\hat{f}(y)$ и $\tilde{\mu}(y)$:

$$\tilde{\mu}(y) = \int_{\Gamma} e^{-(y,x)} \mu(dx), \quad \hat{f}(y) = \int_{\Gamma} e^{-(y,x)} f(x) dx$$

в предположении, что они существуют при $y \stackrel{T}{>} a$ для некоторого $a \in T = \Gamma^*$.

Лемма 3. Пусть задано семейство мер μ_k , $k \in I$.

1. Если для некоторого $a \in T$ существуют их преобразования Лапласа $\tilde{\mu}_k(y)$, $y \stackrel{T}{>} a$, и

$$\tilde{\mu}_k(y) \rightarrow \omega(y) < \infty \quad (k \rightarrow \infty, k \in I) \quad (10)$$

для каждого $y \stackrel{T}{>} a$, то $\omega(y)$ является преобразованием Лапласа некоторой меры μ на Γ и

$$\mu_k \Rightarrow \mu \quad (k \rightarrow \infty, k \in I). \quad (11)$$

2. Обратно, если выполнено (11) и $\tilde{\mu}_k(a)$ ограничено, то выполнено соотношение (10), где $\omega(y) = \tilde{\mu}(y) < \infty$ при $y \stackrel{T}{>} a$.

З а м е ч а н и е 3. Лемма 3 доказана в [16] для случая $I = \mathbb{N}$, перенесение ее для произвольного I дословно повторяет это доказательство.

Пусть Γ — произвольный замкнутый выпуклый острый телесный конус, допускающий семейство линейных преобразований $U = \{U_k, k \in I\}$, которые оставляют Γ инвариантным (см. (1)). Справедлива следующая тауберова теорема.

Теорема 1. Пусть $f(x) = u(x)v(x)$ ($x \in G$), где $u(x) \in R(U, G)$ (см. определение 2), $v(x) \in M(G)$ (см. обозначение 3 после леммы 1), $v(x) \geq 0$ ($x \in G$), числа $\rho_k > 0$ ($k \in I$) и для всех $y \in \mathbb{C}$ существует $\hat{f}(y)$. Предположим, что для всех $y \in \mathbb{C}$

$$\frac{\hat{f}(V_k y)}{J_k \rho_k} \rightarrow \psi(y) < \infty \quad (k \rightarrow \infty, k \in I) \quad (12)$$

($V_k = (U_k^*)^{-1}$, $J_k = \det U_k$). Тогда существуют определенная в G функция $\phi(x) < \infty$ ($x \in G$) такая, что

$$\frac{f(U_k x)}{\rho_k} \rightarrow \phi(x) \quad (k \rightarrow \infty, k \in I) \quad (13)$$

почти всюду в G , и мера μ на Γ такая, что ϕ является ее плотностью в G и

$$\psi(y) = \tilde{\mu}(y) < \infty \quad \forall y \in \mathbb{C}. \quad (14)$$

В частности, если $\mu(\partial\Gamma) = 0$, то

$$\psi(y) = \hat{\phi}(y) < \infty \quad \forall y \in \mathbb{C}. \quad (15)$$

Если функция $\phi(x)$ непрерывна в G , то соотношение (13) выполнено равномерно по $x \in K$ для произвольного компакта $K \subset G$.

З а м е ч а н и е 4. Теорема 1 является аналогом теоремы 1 из [5, гл. II, раздел 4.3]. Основное ее отличие от цитируемой теоремы состоит в ослаблении тауберова условия и в отказе от предположения о регулярности конуса Γ .

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Зададим семейство мер $\{\mu_k, k \in I\}$ на $\mathfrak{A}$ равенством

$$\mu_k(A) = \int_{A \cap \Gamma} \frac{f(U_k x)}{\rho_k} dx, \quad A \in \mathfrak{A}. \quad (16)$$

Так как

$$\tilde{\mu}_k(y) = \frac{\hat{f}(V_k(y))}{J_k \rho_k} \quad (y \in \mathbb{C}), \quad (17)$$

то из (12) следует, что для произвольного $y \in \mathbb{C}$

$$\tilde{\mu}_k(y) \rightarrow \psi(y) < \infty \quad (k \rightarrow \infty, k \in I). \quad (18)$$

Согласно лемме 3, для некоторой меры μ на Γ

$$\mu_k \Rightarrow \mu \quad (k \rightarrow \infty, k \in I), \quad (19)$$

причем выполнено соотношение (14). Зафиксируем произвольный вектор $e \in G$. Положим при $x \in G$

$$u_k(x) = \frac{u(U_k x)}{u(U_k e)}, \quad v_k(x) = \frac{v(U_k x)}{\rho_k} u(U_k e). \quad (20)$$

Предположим для определенности, что $v \in M_2(G)$. Заметим, что для произвольного линейного оператора U , сохраняющего конус Γ инвариантным ($U\Gamma = \Gamma$),

$$v(Ux) \in M_2(G). \quad (21)$$

В самом деле, так как $U\Gamma = \Gamma$, то $U(\partial\Gamma) = \partial\Gamma$ и $U(G) = G$. Поэтому при $x, y \in G$ и $x \overset{\Gamma}{<} y$ имеем $Ux, Uy, U(y-x) \in G$, так как $y-x \in G$. Стало быть, $Ux \overset{\Gamma}{<} Uy$, значит, $v(Ux) \geq v(Uy)$. Далее, согласно лемме 1,

$$\lim_{y \rightarrow x, y \overset{\Gamma}{>} x} v(Uy) = \lim_{Uy \rightarrow Ux, Uy \overset{\Gamma}{>} Ux} v(Uy) = v((Ux)_+) = v(Ux)$$

(последнее равенство в силу определения $M_2(G)$). Иными словами, выполнено (21). Согласно (21), при каждом $r \in I$ $v_k(x) \in M_2(G)$. Покажем, что для каждого $x \in G$ существуют такие $k_x \in I$ и $c_x < \infty$, что при $k > k_x, k \in I$

$$v_k(x) \leq c_x. \quad (22)$$

В самом деле, для произвольного замкнутого шара A с вершиной в точке x такого, что $A \subset G$ и $\mu(\partial A) = 0$, согласно (19) и (17),

$$\mu(A) = \lim_{k \rightarrow \infty, k \in I} \int_A u_k(y) v_k(y) dy.$$

Стало быть, существует $k_{1x} \in I$ такое, что для всех $k > k_{1x}$, $k \in I$,

$$\int_A u_k(y) v_k(y) dy < \mu(A) + 1. \quad (23)$$

Однако

$$\int_A u_k(y) v_k(y) dy \geq \inf_{y \in A} u_k(y) \int_B v_k(y) dy \geq \inf_{y \in A} u_k(y) |B| v_k(x), \quad (24)$$

где $B = \{y: y \in A, y \overset{\Gamma}{<} x\}$ в случае, когда v не возрастает, $B = \{y: y \in A, y \overset{\Gamma}{>} x\}$ в случае, когда v не убывает. Пусть $H_e(U, G) = \phi_1$. Так как $u \in R(U, G)$, то

$$u_k(y) \xrightarrow{y \in A} \phi_1(y) > 0 \quad (k \rightarrow \infty, k \in I).$$

Стало быть, существует $k_x > k_{1x}$, $k_x \in I$, такое, что при $k > k_x$, $k \in I$

$$\inf_{y \in A} u_k(y) \geq b > 0. \quad (25)$$

Из неравенств (23)–(25) следует неравенство (22) с $c_x = (\mu(A)+1)/(|B|b)$. По лемме 2 множество функций $\{v_k(x), k > k_x, k \in I\}$ слабо предкомпактно. Пусть для некоторого неограниченного множества $J \subseteq I$

$$v_k \Rightarrow h \quad (k \rightarrow \infty, k \in J). \quad (26)$$

Покажем, что функция $\phi_1(x) h(x)$ есть плотность меры μ по мере Лебега в G . Пусть множество $A \in \mathfrak{A}$, $\bar{A} = A \cup \partial A \subset G$. Тогда существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\lambda > 0$, что для произвольных $x \in A$ имеем $\varepsilon e \overset{\Gamma}{<} x \overset{\Gamma}{<} \lambda e$. Так как $u \in R(U, G)$, то найдутся такие k_0 и $c < \infty$, что при $k > k_0$, $k \in I$ и $x \in \bar{A}$

$$\frac{u(U_k x)}{u(U_k e)} \leq c. \quad (27)$$

Согласно (22) и (27), при $k > \max(k_0, k_{\varepsilon e}, k_{\lambda e})$, $k \in I$ и $x \in A$

$$\frac{f(U_k x)}{\rho_k} = \frac{u(U_k x)}{u(U_k e)} v_k(x) \leq c \max(c_{\varepsilon e}, c_{\lambda e}). \quad (28)$$

По теореме Лебега в силу (26) и (28)

$$\int_A \frac{f(U_k x)}{\rho_k} dx \longrightarrow \int_A \phi_1(x) h(x) dx \quad (k \rightarrow \infty, k \in J). \quad (29)$$

Допустим, что $\mu(\partial A) = 0$. Тогда наряду с (29) выполнено также соотношение

$$\mu_k(A) = \int_A \frac{f(U_k x)}{\rho_k} dx \longrightarrow \mu(A) \quad (k \rightarrow \infty, k \in I) \quad (30)$$

(см. (19)). Из (29) и (30) следует, что

$$\int_A \phi_1(x) h(x) dx = \mu(A). \quad (31)$$

Согласно последнему равенству, функция h определяется по μ однозначно с точностью до множества лебеговой меры нуль. Однако в силу (26), $h \in M(G)$; следовательно, для каждого $x \in G$ должно быть $h(x) = \lim_{y \downarrow x} h(y)$, так что h определяется по μ однозначно. Поскольку предельная функция в (26) единственна, то на самом деле

$$v_k \Rightarrow h \quad (k \rightarrow \infty, k \in I). \quad (32)$$

Стало быть, в каждой точке x непрерывности функции h мы имеем:

$$\frac{f(U_k x)}{\rho_k} = \frac{u(U_k x)}{u(U_k e)} v_k(x) \rightarrow \phi_1(x) h(x) \quad (k \rightarrow \infty, k \in I), \quad (33)$$

причем выполнено соотношение (31). Из (33) вытекает, что выполнено соотношение (13) с $\phi(x) = \phi_1(x) h(x)$. Из (31) следует, что $\phi = \phi_1 h$ есть плотность меры μ по мере Лебега в G . Наконец, из соотношений (18) и (19) следует (14).

Теперь предположим, что $\phi(x)$ непрерывна в G . Остается доказать, что соотношение (13) выполнено равномерно по $x \in K$ для произвольного компакта $K \subset G$. Согласно теореме 2 из [18], достаточно показать, что для произвольного $x \in G$ при $x_k \in G$, $x_k \rightarrow x$ ($k \rightarrow \infty, k \in I$)

$$\frac{f(U_k x_k)}{\rho_k} \rightarrow \phi(x) \quad (k \rightarrow \infty, k \in I). \quad (34)$$

Так как $\phi(x)$ непрерывна в G и $\phi_1(x)$ положительна и непрерывна в G , то и функция $h(x)$ непрерывна в G . Зафиксируем некоторые числа $a \in (0, 1)$ и $b \in (1, \infty)$. Предположим для определенности, что $h \in M_2(G)$. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty, k \in I} \frac{f(U_k x_k)}{\rho_k} &= \limsup_{k \rightarrow \infty, k \in I} \frac{u(U_k x_k)}{u(U_k e)} v_k(x_k) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty, k \in I} \frac{u(U_k x_k)}{u(U_k e)} v_k(ax) = \phi_1(x) h(ax) \end{aligned} \quad (35)$$

(последнее равенство следует из (3) и (32) с учетом того, что h непрерывна в ax). Переходя в (35) к пределу по $a \uparrow 1$, получаем с учетом непрерывности h в точке x , что

$$\limsup_{k \rightarrow \infty, k \in I} \frac{f(U_k x_k)}{\rho_k} \leq \phi_1(x) h(x). \quad (36)$$

Далее, мы имеем оценку снизу:

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty, k \in I} \frac{f(U_k x_k)}{\rho_k} &= \liminf_{k \rightarrow \infty, k \in I} \frac{u(U_k x_k)}{u(U_k e)} v_k(x_k) \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty, k \in I} \frac{u(U_k x_k)}{u(U_k e)} v_k(bx) = \phi_1(x) h(bx). \end{aligned} \quad (37)$$

Переходя в (37) к пределу по $b \downarrow 1$, получаем, что

$$\liminf_{k \rightarrow \infty, k \in I} \frac{f(U_k x_k)}{\rho_k} \geq \phi_1(x) h(x). \quad (38)$$

Из (36) и (38) следует (34) с $\phi(x) = \phi_1(x) h(x)$. В случае, когда $h \in M_1(G)$, (34) доказывается точно так же, только неравенства заменяются на противоположные, а $\limsup$ и $\liminf$ поменяются местами. Доказательство теоремы завершено.

Пусть, как и ранее, Γ — произвольный замкнутый выпуклый острый телесный конус, допускающий семейство линейных преобразований $U = \{U_k, k \in I\}$, которые оставляют Γ инвариантным. Справедлива следующая тауберова теорема сравнения.

Теорема 2. Пусть $f(x) = u(x)v(x)$ ($x \in G$), где $u(x) \in R(U, G)$ (см. определение 2), $v(x) \in M(G)$ (см. обозначение 3 после леммы 1), $v(x) \geq 0$ ($x \in G$) и для всех $y \in \mathbb{C}$ существует $\hat{f}(y)$. Предположим, что функция $g(x)$ вполне допустима для семейства $U = \{U_k, k \in I\}$ (см. определение 3). Если для произвольного $y \in \mathbb{C}$

$$\frac{\hat{f}(V_k y)}{\hat{g}(V_k y)} \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty, k \in I) \quad (39)$$

($V_k = (U_k^*)^{-1}$), то существует предел

$$\frac{f(U_k x)}{g(U_k x)} \xrightarrow{x \in K} 1 \quad (k \rightarrow \infty, k \in I) \quad (40)$$

для произвольного компакта $K \subset G$.

Доказательство. В силу вполне допустимости функции g для семейства $U = \{U_k, k \in I\}$ для некоторого фиксированного вектора $e \in G$

$$\frac{g(U_k x)}{g(U_k e)} \xrightarrow{x \in K} \phi(x) > 0 \quad (k \rightarrow \infty, k \in I) \quad (41)$$

для произвольного компакта $K \subset G$. Положим $\rho_k = g(U_k e)$, $k \in I$. Покажем, что

$$\frac{f(U_k x)}{\rho_k} \xrightarrow{x \in K} \phi(x) \quad (k \rightarrow \infty, k \in I) \quad (42)$$

для произвольного компакта $K \subset G$. В самом деле, при $y \in \mathbb{C}$

$$\frac{\hat{f}(V_k y)}{J_k \rho_k} = \frac{\hat{f}(V_k y)}{\hat{g}(V_k y)} \frac{\hat{g}(V_k y)}{J_k g(U_k e)}, \quad (43)$$

причем по теореме Лебега в силу (41) и оценки вида (5) для функции $g(x)$

$$\frac{\hat{g}(V_k y)}{J_k g(U_k e)} = \int_G \frac{g(U_k x)}{g(U_k e)} e^{-(v, x)} dx \rightarrow \hat{\phi}(y) < \infty \quad (44)$$

при $k \rightarrow \infty$, $k \in I$ для произвольного $y \in \mathbf{C}$. Поэтому из (39) и (43) следует, что $\hat{f}(V_k y)/(J_k \rho_k) \rightarrow \hat{\phi}(y) < \infty$ ($k \rightarrow \infty$, $k \in I$) $\forall y \in \mathbf{C}$. Стало быть, выполнены все предположения теоремы 1 с $\psi(y) = \hat{\phi}(y)$. Поскольку функция $\phi(x)$ непрерывна в G , то, пользуясь справедливостью теоремы 1, убеждаемся в том, что выполнено соотношение (42). Заметим, что

$$\frac{f(U_k x)}{g(U_k x)} = \frac{f(U_k x)}{\rho_k} \left(\frac{g(U_k x)}{g(U_k e)} \right)^{-1}. \quad (45)$$

Из соотношений (41), (42) и (45) в силу положительности $\phi(x)$ следует (40). Теорема 2 доказана.

Пусть $\Delta_\Gamma(x)$ есть расстояние от точки $x \in \Gamma$ до границы конуса Γ ($\Delta_T(x)$ есть расстояние от точки $x \in T$ до границы конуса $T = \Gamma^*$).

О п р е д е л е н и е 6. Выпуклый конус Γ называется однородным, если для произвольных точек x_1 и x_2 из $G = \text{int } \Gamma$ существует невырожденное линейное преобразование U (вообще говоря, зависящее от x_1 и x_2), оставляющее конус Γ инвариантным, такое, что $Ux_1 = x_2$.

Пусть Γ — произвольный замкнутый выпуклый острый телесный однородный конус в $\mathbf{R}^n$ с вершиной в нуле. Справедлива следующая тауберова теорема.

Теорема 3. Пусть $f(x) = u(x)v(x)$ ($x \in G$), причем $v(x) \in M(G)$ (см. обозначение 3 после леммы 1), $v(x) \geq 0$ ($x \in G$) и для всех $y \in \mathbf{C}$ существует $\hat{f}(y)$. Справедливы следующие утверждения.

1. Если $g(x) \in D_1(\Gamma)$ (см. определение 5), $u(x) \in R_1(\Gamma)$ (см. обозначение 1) и существует предел

$$\frac{\hat{f}(y)}{\hat{g}(y)} \rightarrow 1 \quad (y \rightarrow 0, y \in \mathbf{C}), \quad (46)$$

то

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1 \quad (x \in G, \Delta_\Gamma(x) \rightarrow \infty). \quad (47)$$

2. Если $g(x) \in D_2(\Gamma)$ (см. определение 5), $u(x) \in R_2(\Gamma)$ (см. обозначение 1) и для произвольного $b > 0$ существует предел

$$\frac{\hat{f}(y)}{\hat{g}(y)} \rightarrow 1 \quad (\Delta_T(y) \rightarrow 0, y \in \mathbf{C}, |y| < b), \quad (48)$$

то для произвольного $\delta > 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1 \quad (x \in G, \Delta_\Gamma(x) \geq \delta). \quad (49)$$

3. Если $g(x) \in D_3(\Gamma)$ (см. определение 5), $u(x) \in R_3(\Gamma)$ (см. обозначение 1) и существует предел

$$\frac{\hat{f}(y)}{\hat{g}(y)} \rightarrow 1 \quad (\Delta_T(y) \rightarrow 0, y \in \mathbf{C}), \quad (50)$$

то

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1 \quad (x \in G, |x| \rightarrow \infty). \quad (51)$$

Доказательство. Докажем сначала п. 1. Предположим противное, т.е. пусть (46) выполнено, а (47) не имеет места. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и последовательность $x_k \in G$, $\Delta_\Gamma(x_k) \geq k$ ($k \in \mathbb{N}$), такие, что

$$\left| \frac{f(x_k)}{g(x_k)} - 1 \right| > \varepsilon \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (52)$$

Зафиксируем $a \in G$, $|a| = 1$, и рассмотрим семейство линейных операторов $U = \{U_k, k \in \mathbb{N}\}$, $U_k \Gamma = \Gamma$, таких, что $U_k a = x_k$. Такие операторы существуют в силу однородности Γ . Так как $|U_k a| = |x_k| \geq k$, то

$$k \leq \Delta_\Gamma(x_k) = \Delta_\Gamma(U_k a) = \frac{\lambda(k)}{p(a)},$$

где $\lambda(k)$ задаются соотношением (2), а $p(a) > 0$ (см. лемму 2 из [5, гл. II, раздел 5.1]). Стало быть, $\lambda(k) \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty, k \in \mathbb{N}$), а следовательно, и $\Lambda(k) \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty, k \in \mathbb{N}$) (см. (2)). Таким образом, семейство $\{U_k, k \in \mathbb{N}\}$ будет семейством первого типа, а так как $g(x) \in D_1(\Gamma)$, то существует подсемейство $\{U_k, k \in L \subseteq \mathbb{N}\}$ (L — неограничено), относительно которого $g(x)$ будет вполне допустимой. В силу определения $R_1(\Gamma)$ (см. обозначение 1) в семействе $\{U_k, k \in L\}$ найдется такое подсемейство $U = \{U_k, k \in M \subseteq L\}$ (M — неограничено), что $u \in R(U, \Gamma)$. Ясно, что функция $g(x)$ останется вполне допустимой и относительно семейства U . Для произвольного фиксированного вектора $y \in \mathbb{C}$ и $k \in \mathbb{N}$ $V_k y \in \mathbb{C}$ и

$$|V_k y| \leq |y| \sup_{|e|=1} |V_k e| = \frac{|y|}{\lambda(k)} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty, k \in \mathbb{N}).$$

Поэтому по условию (46)

$$\frac{\hat{f}(V_k y)}{\hat{g}(V_k y)} \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty, k \in M). \quad (53)$$

Стало быть, выполнены все условия теоремы 2. Согласно этой теореме,

$$\frac{f(U_k a)}{g(U_k a)} = \frac{f(x_k)}{g(x_k)} \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty, k \in M).$$

Последнее соотношение противоречит неравенству (52) для $k \in M$. Пункт 1 теоремы 3 доказан. Доказательство п. 2 (соответственно 3) происходит при помощи дословного повторения предыдущих рассуждений с учетом того, что в указанных случаях семейство операторов $\{U_k, k \in \mathbb{N}\}$ будет семейством 2-го (соответственно 3-го) типа (см. [5, гл. II, раздел 6.2, теорема 2]).

3. Асимптотика безгранично делимых распределений в конусе. Пусть Γ — произвольный замкнутый выпуклый острый телесный однородный конус в $\mathbf{R}^n$ с вершиной в нуле. При $x \in \Gamma$ положим

$$\Gamma(x) = \{y: y \in \Gamma, x - y \in \Gamma\} = \left\{y: y \overset{\Gamma}{\leq} x\right\}, \quad (54)$$

$$\tilde{\Gamma}(x) = \Gamma \setminus \Gamma(x).$$

Предположим, что случайный вектор $\xi \in \mathbf{R}^n$ имеет безгранично делимое распределение, сосредоточенное в Γ , причем его преобразование Лапласа имеет вид:

$$\mathbf{E}e^{-(\lambda, \xi)} = \exp \left\{ - \int_{\Gamma} (1 - e^{-(\lambda, x)}) \nu(dx) \right\} \quad (\lambda \in \Gamma^*), \quad (55)$$

где ν — σ -конечная мера на Γ (возможно, неограниченная в окрестности нуля), для которой выполнены соотношения $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty$, $\int_{|x| > 1} \nu(dx) < \infty$ (см. [21, лемма 3]). Мера ν называется спектральной мерой Леви распределения случайного вектора ξ . Положим при $x \in G$

$$f(x) = \mathbf{P}\{\xi \in \tilde{\Gamma}(x)\}, \quad g(x) = \nu(\tilde{\Gamma}(x)). \quad (56)$$

Справедлива следующая предельная теорема.

Теорема 4. Пусть функция $g(x)$ является допустимой функцией первого типа для конуса Γ ($g(x) \in D_1(\Gamma)$) — см. определение 5. Тогда

$$f(x) = (1 + o(1)) g(x) \quad (x \in G, \Delta_{\Gamma}(x) \rightarrow \infty), \quad (57)$$

т.е. при $x \in G = \text{int } \Gamma$, $\Delta_{\Gamma}(x) \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\xi \in \tilde{\Gamma}(x)\} = (1 + o(1)) \nu(\tilde{\Gamma}(x)),$$

где $\Delta_{\Gamma}(x)$ есть расстояние от точки x до границы конуса Γ .

З а м е ч а н и е 5. Теорема 4 обобщает соответствующие утверждения из работ [20], [21]. Отметим, что в цитируемых работах $\Delta_{\Gamma}(x)$ имела порядок $|x|$ при $|x| \rightarrow \infty$; здесь же допускается сколь угодно медленное стремление $\Delta_{\Gamma}(x)$ к бесконечности.

Теорема 4 будет доказана как следствие п. 1 тауберовой теоремы 3. Заманчиво было бы, воспользовавшись п. 2 (соответственно 3) доказать, что (57) имеет место при $|x| \rightarrow \infty$ и $\Delta_{\Gamma}(x) \geq \delta > 0$ (соответственно $|x| \rightarrow \infty$ и $x \in G$). Однако следующие простые соображения показывают, что (57), вообще говоря, не выполнено уже при $|x| \rightarrow \infty$ и $\Delta_{\Gamma}(x) \geq \delta > 0$. В самом деле, пусть $\Gamma = \mathbf{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_i \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, n\}$, и пусть $|x| \rightarrow \infty$ так, что $x_1 = \delta > 0$, $\min(x_2, \dots, x_n) \rightarrow \infty$. Тогда $g(x) \rightarrow \nu(A)$, где $A = \{y: y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}_+^n, y_1 > \delta\}$, и если $\nu(A) > 1$, то не может иметь места (57), так как $f(x) = \mathbf{P}\{\xi \in \tilde{\Gamma}(x)\} \leq 1$.

В качестве примеров $g(x)$ мы можем привести примеры 1–3 в дополнительном предположении, что $g(x)$ не возрастает в Γ (см. п. 2).

Положим

$$\theta_{\Gamma}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Gamma, \\ 0, & x \notin \Gamma, \end{cases} \quad K_{\mathbf{C}}(\lambda) = \hat{\theta}_{\Gamma}(\lambda) = \int_{\Gamma} e^{-(\lambda, x)} dx \quad (\lambda \in \mathbf{C}),$$

$\nu(x) = \nu\{y: y \overset{\Gamma}{\leq} x\}$. Теорему 4 мы докажем при помощи следующей леммы.

Лемма 4. Для произвольного $\lambda \in \mathbf{C}$ выполнено соотношение

$$K_{\mathbf{C}}(\lambda) \int_{\Gamma} (1 - e^{-(\lambda, x)}) \nu(dx) = \int_{\Gamma} e^{-(\lambda, x)} g(x) dx < \infty. \quad (58)$$

Предположим сначала, что $\nu(\Gamma) < \infty$. Мы имеем при $\lambda \in \mathbf{C}$

$$\int_{\Gamma} e^{-(\lambda, x)} \nu(x) dx = \int_{\Gamma} e^{-(\lambda, x)} (\nu * \theta_{\Gamma})(x) dx = \int_{\Gamma} e^{-(\lambda, x)} \nu(dx) \cdot K_{\mathbf{C}}(\lambda).$$

Но $g(x) = \nu(\Gamma) - \nu(x)$, поэтому $\int_{\Gamma} e^{-(\lambda, x)} \nu(x) dx = \nu(\Gamma) K_{\mathbf{C}}(\lambda) - \hat{g}(\lambda)$. Стало быть,

$$\begin{aligned} \hat{g}(\lambda) &= \nu(\Gamma) K_{\mathbf{C}}(\lambda) - \int_{\Gamma} e^{-(\lambda, x)} \nu(dx) \cdot K_{\mathbf{C}}(\lambda) \\ &= \int_{\Gamma} (1 - e^{-(\lambda, x)}) \nu(dx) \cdot K_{\mathbf{C}}(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbf{C}, \end{aligned}$$

откуда следует (58) в случае, когда $\nu(\Gamma) < \infty$. В общем случае положим

$$\Gamma_k = \{u: u \in \Gamma, |u| \geq k^{-1}\}, \quad \nu_k(A) = \nu(A \cap \Gamma_k), \quad g_k(x) = \nu_k(\tilde{\Gamma}(x))$$

для произвольных $A \in \mathfrak{A}$, $x \in \Gamma$, $k \in \mathbf{N}$. Так как для мер ν_k лемма уже доказана, то для каждого $\lambda \in \mathbf{C}$

$$\hat{g}_k(\lambda) = K_{\mathbf{C}}(\lambda) \int_{\Gamma_k} (1 - e^{-(\lambda, x)}) \nu(dx).$$

Поэтому для всех $\lambda \in \mathbf{C}$ при $k \rightarrow \infty$

$$\hat{g}_k(\lambda) \rightarrow K_{\mathbf{C}}(\lambda) \int_{\Gamma} (1 - e^{-(\lambda, x)}) \nu(dx), \quad (59)$$

так как $\int_{\Gamma} (1 - e^{-(\lambda, x)}) \nu(dx) < \infty$ при $\lambda \in \mathbf{C}$. Но, поскольку для произвольных $x \in G$ и $\lambda \in \mathbf{C}$ при $k \rightarrow \infty$

$$e^{-(\lambda, x)} g_k(x) \uparrow e^{-(\lambda, x)} g(x),$$

то по теореме Б. Леви при $k \rightarrow \infty$

$$\hat{g}_k(\lambda) = \int_{\Gamma} e^{-(\lambda, x)} g_k(x) dx \rightarrow \int_{\Gamma} e^{-(\lambda, x)} g(x) dx < \infty \quad (60)$$

для всех $\lambda \in \mathbf{C}$. Сравнивая (59) и (60), получаем (58). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. Из (55) и (58) следует, что

$$\mathbf{E} e^{-(\lambda, \xi)} = \exp \left\{ - \frac{\hat{g}(\lambda)}{K_{\mathbf{C}}(\lambda)} \right\} \quad \forall \lambda \in \mathbf{C}. \quad (61)$$

Пусть P — распределение случайного вектора ξ . Точно так же, как и в (58), мы устанавливаем, что

$$1 - \tilde{P}(\lambda) = \int_{\Gamma} (1 - e^{-(\lambda, x)}) P(dx) = \frac{\hat{f}(\lambda)}{K_C(\lambda)} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \quad (62)$$

Из (61) и (62) следует, что

$$\frac{\hat{f}(\lambda)}{K_C(\lambda)} = 1 - \exp \left\{ - \frac{\hat{g}(\lambda)}{K_C(\lambda)} \right\} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \quad (63)$$

При $\lambda \in \mathbb{C}$ положим $\zeta_\lambda = (\lambda, \xi)$. Мы имеем:

$$\zeta_\lambda \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \zeta_\lambda \xrightarrow{P} 0 \quad (\lambda \rightarrow 0, \lambda \in \mathbb{C}).$$

Так как функция $\exp\{-t\}$ при $t \geq 0$ непрерывна и ограничена, то

$$\mathbb{E}e^{-(\lambda, \xi)} = \mathbb{E}e^{-\zeta_\lambda} \rightarrow 1 \quad (\lambda \rightarrow 0, \lambda \in \mathbb{C}). \quad (64)$$

Из (61) и (64) следует, что

$$\frac{\hat{g}(\lambda)}{K_C(\lambda)} = -\ln \mathbb{E}e^{-(\lambda, \xi)} \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow 0, \lambda \in \mathbb{C}). \quad (65)$$

Из (63) и (65) получаем, что

$$\frac{\hat{f}(\lambda)}{K_C(\lambda)} = (1 + o(1)) \frac{\hat{g}(\lambda)}{K_C(\lambda)} \quad (\lambda \rightarrow 0, \lambda \in \mathbb{C}),$$

или же, что $\hat{f}(\lambda) = (1 + o(1))\hat{g}(\lambda)$ ($\lambda \rightarrow 0, \lambda \in \mathbb{C}$). Мы видим, что выполнены все предположения п. 1 теоремы 3. Воспользовавшись этой теоремой, убеждаемся в справедливости соотношения (57). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антонов С. Н. К асимптотическому поведению безгранично делимых законов. — Матем. заметки, 1980, т. 28, № 6, с. 939–946.
2. Антонов С. Н., Круглов В. М. Об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений в банаховом пространстве. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. 27, в. 4, с. 625–642.
3. Антонов С. Н., Круглов В. М. Еще раз об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений в банаховом пространстве. — Теория вероятн. и ее примен., 1984, т. 29, в. 4, с. 735–742.
4. Владимиров В. С. Многомерное обобщение тауберовой теоремы Харди и Литтлвуда. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1976, т. 40, № 5, с. 1084–1101.
5. Владимиров В. С., Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И. Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций. М.: Наука, 1986, 304 с.
6. Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И. Теоремы сравнения тауберова типа. — Докл. АН СССР, 1984, т. 279, № 3, с. 532–535.
7. Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И. Многомерные тауберовы теоремы сравнения для обобщенных функций в конусах. — Матем. сб., 1985, т. 126, № 4, с. 515–542.

8. *Круглов В. М.* Замечание к теории безгранично делимых законов. — Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. 15, в. 2, с. 330–336.
9. *Круглов В. М.* Интегралы по безгранично делимым распределениям в гильбертовом пространстве. — Матем. заметки, 1972, т. 11, № 6, с. 669–676.
10. *Круглов В. М.* Сходимость числовых характеристик сумм независимых случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве. — Теория вероятн. и ее примен., 1973, т. 18, № 4, с. 734–752.
11. *Круглов В. М.* О безгранично делимых распределениях в гильбертовом пространстве. — Матем. заметки, 1974, т. 16, № 4, с. 585–594.
12. *Круглов В. М.* Характеризация одного класса распределений в гильбертовом пространстве. — Матем. заметки, 1974, т. 16, № 5, с. 777–782.
13. *Круглов В. М.* Дополнительные главы теории вероятностей. Учеб. пособие. М.: Высшая школа, 1984, 264 с.
14. *Сгибнев М. С.* Асимптотика безгранично делимых распределений в $\mathbf{R}^n$. — Труды Ин-та математики СО АН СССР, 1989, т. 13, с. 100–116.
15. *Улановский А. М.* Об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений на бесконечности. — Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1981, № 35, с. 100–107.
16. *Якимив А. Л.* Предельные теоремы для ветвящихся процессов. Дисс.... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1981.
17. *Якимив А. Л.* Многомерные тауберовы теоремы и их применение к ветвящимся процессам Беллмана–Харриса. — Матем. сб., 1981, т. 115, № 3, с. 463–477.
18. *Якимив А. Л.* Асимптотика вероятности продолжения критических ветвящихся процессов Беллмана–Харриса. — Труды МИАН, 1986, т. 177, с. 177–205.
19. *Sato Ken-Iti.* Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999, 486 p.
20. *Omey E.* Infinite divisibility and random sums of random vectors. — Yokohama Math. J., 1985, v. 33, № 1–2, p. 39–48.
21. *Yakymiv A. L.* The asymptotics of multidimensional infinite divisible distributions. — J. Math. Sci., (New York), 1997, v. 84, № 3, p. 1197–1207.

Поступила в редакцию
5.XII.2002