Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Назаров, Об одном семействе преобразований гауссовских случайных функций, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 2, 209–225

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2696>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 11:57:08

© 2009 г.

НАЗАРОВ А. И.*

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ
ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ¹⁾

В недавней статье [6] П. Деовельс показал, что для стандартного броуновского моста $B(t)$, $0 \leq t \leq 1$, справедливо равенство по распределению

$$\mathcal{Y}_K(t) \stackrel{d}{=} \mathcal{Y}_{2-K}(t), \quad t \in [0, 1], \quad K \in \mathbf{R}, \quad (*)$$

где $\mathcal{Y}_K(t) = B(t) - 6Kt(1-t) \int_0^1 B(s) ds$. Кроме того, им было получено явное разложение Карунена–Лозва (КЛ) для процесса $\mathcal{Y}_1(t)$.

В настоящей работе для гауссовских случайных функций общего вида, имеющих нулевые средние, вводятся однопараметрические семейства преобразований, для которых выполнено соотношение, обобщающее (*). В случае, когда L_2 -норма исходной функции конечна п.н., выводится явное соотношение между точными асимптотиками вероятностей L_2 -малых отклонений преобразованной и исходной функции. Для одномерных процессов, порождающих краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, в случае, когда известно КЛ-разложение для исходного процесса, получено также КЛ-разложение для преобразованных процессов.

Ключевые слова и фразы: гауссовские случайные функции, разложение Карунена–Лозва, определители Фредгольма, асимптотика вероятностей малых отклонений.

1. Основная лемма. Рассмотрим гауссовскую случайную функцию X с нулевым средним. Для простоты предположим, что X определена в замыкании $\overline{\mathcal{O}}$ ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^n$. Обозначим $G_X(x, y) = \mathbf{E} X(x)X(y)$ ковариационную функцию X .

Пусть φ — локально суммируемая в $\mathcal{O}$ функция. Предположим, что функция

$$\psi(x) = \int_{\mathcal{O}} G_X(x, y) \varphi(y) dy \quad (1.1)$$

* Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, Университетский пр-т, 28, Старый Петергоф, 198504 С.-Петербург, Россия; e-mail: al.il.nazarov@gmail.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке программы «Ведущие научные школы» (грант НШ.227.2008.1) и РФФИ (грант № 07-01-00159).

определена п.в. в $\mathcal{O}$, $\psi \neq 0$ и

$$q = \int_{\mathcal{O}} \psi(u) \varphi(u) du = \int_{\mathcal{O}} \int_{\mathcal{O}} G_X(u, v) \varphi(u) \varphi(v) du dv < \infty. \quad (1.2)$$

Построим семейство гауссовских функций ($\alpha \in \mathbf{R}$)

$$\mathcal{X}_{\varphi, \alpha}(x) = X(x) - \alpha \psi(x) \int_{\mathcal{O}} X(u) \varphi(u) du, \quad x \in \overline{\mathcal{O}}. \quad (1.3)$$

Основная лемма. Функция $\mathcal{X}_{\varphi, \alpha}$ имеет ковариацию

$$\mathcal{G}_{\varphi, \alpha}(x, y) = G_X(x, y) + Q \psi(x) \psi(y), \quad (1.4)$$

где $Q = q\alpha^2 - 2\alpha$.

Доказательство. Проверяется непосредственным вычислением с учетом (1.1).

Следствие 1. Для процессов (1.3) имеет место равенство

$$\mathcal{X}_{\varphi, \alpha}(x) \stackrel{d}{=} \mathcal{X}_{\varphi, 2/q - \alpha}(x), \quad x \in \overline{\mathcal{O}}.$$

В частности, $\mathcal{X}_{\varphi, 2/q}(x) \stackrel{d}{=} X(x)$.

Следствие 2. Пусть $\hat{\alpha} = 1/q$. Тогда:

1) имеет место тождество п.н.

$$\int_{\mathcal{O}} \mathcal{X}_{\varphi, \hat{\alpha}}(x) \varphi(x) dx = 0;$$

2) процесс $\mathcal{X}_{\varphi, \hat{\alpha}}(x)$ и случайная величина $\int_{\mathcal{O}} X(u) \varphi(u) du$ независимы;

3) если $\varphi \in L_2(\mathcal{O})$, то интегральный оператор с ядром $\mathcal{G}_{\varphi, \hat{\alpha}}(x, y)$ имеет нулевое собственное число, соответствующее собственной функции φ .

Доказательство. Все три утверждения следуют из несложно проверяемых соотношений

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} \mathcal{X}_{\varphi, \alpha}(x) \varphi(x) dx &= \int_{\mathcal{O}} X(u) \varphi(u) du \cdot (1 - q\alpha); \\ \mathbf{E} \mathcal{X}_{\varphi, \alpha}(x) \int_{\mathcal{O}} X(u) \varphi(u) du &= \psi(x)(1 - q\alpha). \end{aligned}$$

Замечание. Очевидно, что $\mathcal{Y}_K$ совпадает с $\mathcal{B}_{\varphi, \alpha}$ при $\varphi \equiv 1$, $\alpha = 12K$. Поэтому лемма 2.2 и следствия 2.1 и 2.2 [6] являются частными случаями наших утверждений.

2. Асимптотика вероятности малых уклонений в L_2 . Предположим теперь, что

$$\|X\|_2^2 \equiv \int_{\mathcal{O}} X^2(x) dx < \infty \quad \text{п.н.} \quad (2.1)$$

Тогда для процесса X справедливо разложение Карунена–Лоева (КЛ-разложение)

$$X(x) \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} u_k(x) \xi_k, \quad x \in \mathcal{O}, \quad (2.2)$$

где ξ_k — последовательность независимых стандартных нормальных случайных величин, $\lambda_k > 0$ и u_k — соответственно собственные числа и нормированные в $L_2(\mathcal{O})$ собственные функции интегрального оператора $\mathfrak{G}$ с ядром $G_X(x, y)$. При этом $\sum_k \lambda_k < \infty$, т.е. оператор $\mathfrak{G}$ принадлежит ядерному классу $\mathfrak{S}_1$. Отметим, что ряд (2.2) сходится в $L_2(\mathcal{O})$ п.н.

Из (2.2) следует, что

$$\|X\|_2^2 \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2.$$

Поэтому, зная собственные числа λ_k , можно получить информацию о распределении $\|X\|_2^2$ и, в частности, найти точную асимптотику вероятности малых уклонений в L_2 , т.е. описать поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ вероятности $\mathbf{P} \{\|X\|_2 \leq \varepsilon\}$.

В абстрактном виде решение задачи об асимптотике вероятности малых уклонений было получено в [22]. Затем многие авторы занимались упрощением выражения для вероятности малых уклонений при различных предположениях (см. статью [7] и имеющиеся в ней ссылки).

В статьях [18], [16], [17] был разработан подход, позволяющий получать асимптотику малых уклонений в L_2 -норме для гауссовского процесса с нулевым средним, ковариация которого является функцией Грина для обыкновенного дифференциального оператора. В более общей ситуации решить задачу полностью пока не удастся. Однако в рассматриваемом случае, поскольку оператор с ядром $\mathcal{G}_{\varphi, \alpha}(x, y)$ является одномерным возмущением исходного оператора, можно выразить асимптотику малых уклонений для $\mathcal{X}_{\varphi, \alpha}$ через асимптотику малых уклонений для исходного процесса.

З а м е ч а н и е. Если оператор $\mathfrak{G}$ имеет нетривиальное нуль-пространство U_0 , то в силу очевидного соотношения $\psi \perp U_0$ оно содержится в нуль-пространстве оператора с ядром $\mathcal{G}_{\varphi, \alpha}(x, y)$. Поэтому можно проводить все рассуждения в ортогональном дополнении к U_0 и считать, что в разложении (2.2) функции $\{u_k\}$ образуют полную ортонормированную систему.

Теорема 1. Пусть выполнено условие (2.1) и функция $\varphi \in L_{1,\text{loc}}(\mathcal{O})$ удовлетворяет условию (1.2). Если $\alpha \neq 1/q$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{P} \{ \|\mathcal{X}_{\varphi,\alpha}\|_2 \leq \varepsilon \} \sim \frac{1}{|1 - \alpha q|} \mathbf{P} \{ \|X\|_2 \leq \varepsilon \}. \quad (2.3)$$

Доказательство. По теореме сравнения ([13]; см. также [8])

$$\mathbf{P} \{ \|\mathcal{X}_{\varphi,\alpha}\|_2 \leq \varepsilon \} \sim \mathbf{P} \{ \|X\|_2 \leq \varepsilon \} \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\tilde{\lambda}_k} \right)^{1/2}, \quad (2.4)$$

где $\tilde{\lambda}_k$ — собственные числа интегрального оператора с ядром $\mathcal{G}_{\varphi,\alpha}(x, y)$. Отметим, что в силу минимаксимального принципа (см., например, [4, § 10.2]) последовательности λ_k и $\tilde{\lambda}_k$ перемежаются. Отсюда, в частности, следует, что ряд $\sum_k \tilde{\lambda}_k$ также сходится.

Обозначим $\mu_k = \lambda_k^{-1}$, $\tilde{\mu}_k = \tilde{\lambda}_k^{-1}$ и рассмотрим определители Фредгольма для ядер G_X и $\mathcal{G}_{\varphi,\alpha}$:

$$\mathcal{F}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\mu_k} \right); \quad \widetilde{\mathcal{F}}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\tilde{\mu}_k} \right).$$

В силу сходимости рядов $\sum_k \mu_k^{-1}$ и $\sum_k \tilde{\mu}_k^{-1}$ эти канонические произведения Адамара сходятся при всех $z \in \mathbf{C}$. Ввиду (1.4) они связаны между собой формулой²⁾

$$\widetilde{\mathcal{F}}(z) = \mathcal{F}(z) \left(1 + Q \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 \mu_k}{1 - \mu_k/z} \right), \quad (2.5)$$

где a_k — коэффициенты Фурье функции ψ по полной ортонормированной системе $\{u_k\}$.

Из теоремы Йенсена (см. [23, § 3.6]) следует, что

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{\tilde{\mu}_k} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \frac{\widetilde{\mathcal{F}}(z)}{\mathcal{F}(z)} \right| d \arg(z) \right). \quad (2.6)$$

Формула (2.5) и лемма 2 (см. Приложение) показывают, что последний предел равен $1 + Q \sum_k a_k^2 \mu_k$. Но из $\psi = \sum_k a_k u_k$ следует $\varphi = \sum_k \mu_k a_k u_k$, и потому

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \mu_k = \int_{\mathcal{O}} \psi(u) \varphi(u) du = q. \quad (2.7)$$

²⁾ В статистической литературе формулу преобразования определителя Фредгольма при конечномерном возмущении оператора, частным случаем которой является (2.5), обычно возводят к работе [21]. Статистические приложения, полученные в этой работе, по-видимому, новы, но сама формула, полученная еще Бэйтменом [2], к тому времени уже была хорошо известна как в теории вычислительных методов, так и в спектральной теории операторов, причем в более общей ситуации (см., например, [11, гл. II, п. 4.6] и [1, п. 106]).

Подставляя (2.6) в (2.4), получим (2.3). Теорема 1 доказана.

Рассмотрим теперь критический случай $\hat{\alpha} = 1/q$.

Теорема 2. Пусть выполнено условие (2.1) и $\hat{\alpha} = 1/q$. Если $\varphi \in L_2(\mathcal{O})$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{P} \{ \|\mathcal{X}_{\varphi, \hat{\alpha}}\|_2 \leq \varepsilon \} \sim \frac{\sqrt{q}}{\|\varphi\|_2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\varepsilon^2} \frac{d}{dt} \mathbf{P} \{ \|X\|_2 \leq t \} \frac{dt}{\sqrt{\varepsilon^2 - t^2}}. \quad (2.8)$$

Доказательство. Введем три функции распределения:

$$\begin{aligned} F(r) &= \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2 \leq r \right\} = \mathbf{P} \{ \|X\|_2 \leq \sqrt{r} \}; \\ \tilde{F}(r) &= \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_k \xi_k^2 \leq r \right\} = \mathbf{P} \{ \|\mathcal{X}_{\varphi, \hat{\alpha}}\|_2 \leq \sqrt{r} \}; \\ F_1(r) &= \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2 \leq r \right\}. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущей теореме,

$$\tilde{F}(r) \sim F_1(r) \left(\prod_{k=2}^{\infty} \frac{\tilde{\mu}_{k-1}}{\mu_k} \right)^{1/2} \quad \text{при } r \rightarrow 0.$$

Теорема Йенсена дает

$$\prod_{k=2}^{\infty} \frac{\mu_k}{\tilde{\mu}_{k-1}} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \left(1 - \frac{z}{\mu_1} \right) \frac{\tilde{\mathcal{F}}(z)}{\mathcal{F}(z)} \right| d \arg(z) \right). \quad (2.9)$$

Условие $\hat{\alpha} = 1/q$ влечет $Q = -1/q$, и выражение под знаком модуля можно переписать с учетом (2.5) и (2.7):

$$\left(1 - \frac{z}{\mu_1} \right) \left(1 + Q \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 \mu_k}{1 - \mu_k/z} \right) = \frac{1/\mu_1 - 1/z}{q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 \mu_k^2}{1 - \mu_k/z}.$$

По лемме 2 (см. Приложение) предел в (2.9) равен

$$(\mu_1 q)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \mu_k^2 = (\mu_1 q)^{-1} \|\varphi\|_2^2,$$

откуда

$$\tilde{F}(r) \sim F_1(r) \frac{\sqrt{q\mu_1}}{\|\varphi\|_2}. \quad (2.10)$$

Далее, очевидно, $F(r) = (F_1 * f)(r)$, где

$$f(x) = \frac{d}{dx} \mathbf{P} \{ \lambda_1 \xi^2 \leq x \} = \frac{\exp(-x/(2\lambda_1))}{\sqrt{2\pi\lambda_1 x}}.$$

С помощью преобразования Лапласа получаем решение этого сверточного уравнения:

$$F_1(r) = \sqrt{\frac{2\lambda_1}{\pi}} \exp\left(-\frac{r}{2\lambda_1}\right) \int_0^r \left(F(x) \exp\left(\frac{x}{2\lambda_1}\right)\right)' \frac{dx}{\sqrt{r-x}}. \quad (2.11)$$

Лемма 1. $F(x) = o(F'(x))$ при $x \rightarrow +0$.

Доказательство. Заметим, что F' абсолютно непрерывна на $\mathbf{R}$ (если в сумме (2.2) есть хотя бы три ненулевых слагаемых). При этом $F'' > 0$ в правой полуокрестности нуля (это свойство непосредственно проверяется для трех слагаемых и, очевидно, сохраняется при добавлении нового слагаемого, причем радиус полуокрестности при этом не уменьшается; поэтому оно сохраняется и при переходе к бесконечной сумме). Таким образом, F выпукла в правой полуокрестности нуля, и потому $F'(x) \geq F(x)/x$ в этой полуокрестности. Лемма 1 доказана.

Продолжим доказательство теоремы. В силу леммы 1 из (2.11) получаем

$$F_1(r) \sim \sqrt{\frac{2\lambda_1}{\pi}} \int_0^r F'(x) \frac{\exp(-(r-x)/(2\lambda_1)) dx}{\sqrt{r-x}} \sim \sqrt{\frac{2\lambda_1}{\pi}} \int_0^r F'(x) \frac{dx}{\sqrt{r-x}}. \quad (2.12)$$

Подставив это соотношение в (2.10) и сделав замену $r = \varepsilon^2$, получим (2.8). Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е. Формулу (2.10) можно (несколько вольно) интерпретировать так: при $\alpha \neq 1/q$ последовательности μ_k и $\tilde{\mu}_k$ имеют одинаковые асимптотики; в условиях теоремы 2, согласно п. 3 следствия 2, одно из собственных чисел $\tilde{\lambda}_k$ обращается в нуль, что порождает сбой в нумерации $\tilde{\mu}_k$; изъятие из суммы (2.2) лишнего слагаемого восстанавливает соответствие нумераций.

3. Разложение Карунена–Лозва. Предположим теперь, что $n = 1$, $\mathcal{O} = (0, a)$ — интервал и ковариационная функция $G_X(t, s)$, $t, s \in [0, a]$, является функцией Грина для самосопряженного оператора L_X в пространстве $L_2(0, a)$, порождаемого дифференциальным выражением порядка 2ℓ

$$L_X u \equiv (-1)^\ell u^{(2\ell)} + (p_{\ell-1} u^{(\ell-1)})^{(\ell-1)} + \dots + p_0 u, \quad (3.1)$$

с 2ℓ граничными условиями. Напомним, это означает, что функция G_X при каждом $s \in (0, a)$ удовлетворяет уравнению $L_X G_X = \delta(t-s)$ в смысле обобщенных функций, а также граничным условиям. Не умаляя общности, можно считать, что $a = 1$.

Обозначим $\mathcal{D}(L_X)$ образ интегрального оператора с ядром $G_X(t, s)$. Тогда легко видеть, что обратный оператор есть как раз L_X с областью определения $\mathcal{D}(L_X)$. В частности, если $\varphi \in L_2(0, 1)$, то $\psi \in \mathcal{D}(L_X)$ и $L_X \psi = \varphi$.

Будем предполагать для простоты, что $p_j \in \mathcal{C}^j[0, 1]$. Тогда $\mathcal{D}(L_X)$ совпадает с множеством функций, принадлежащих $W_2^\ell(0, 1)$ и удовлетворяющих граничным условиям. С учетом (1.4) получаем, что ковариация преобразованного процесса $\mathcal{X}_{\varphi, \alpha}$ удовлетворяет уравнению

$$L_X \mathcal{G}_{\varphi, \alpha} = \delta(t - s) + Q\varphi(t)\psi(s) \quad (3.2)$$

(напомним, что $Q = q\alpha^2 - 2\alpha$) и тем же граничным условиям.

Допустим, что нам известно КЛ-разложение (2.2) для исходного процесса. Тогда, очевидно, u_k — собственные функции, а $\mu_k = \lambda_k^{-1}$ — собственные числа краевой задачи

$$L_X u = \mu u, \quad u \in \mathcal{D}(L_X). \quad (3.3)$$

На практике собственные функции задачи (3.3) известны в аналитическом виде, только если при произвольном $\mu \in \mathbf{R}$ известна фундаментальная система решений уравнения $L_X v - \mu v = 0$. Воспользуемся этим, чтобы дать алгоритм вычисления КЛ-разложения для процесса $\mathcal{X}_{\varphi, \alpha}$. Отметим, что в частном случае идея этого алгоритма применялась в [12] (см. далее пример 5).

Из (3.2) получаем краевую задачу для собственных функций интегрального оператора с ядром $\mathcal{G}_{\varphi, \alpha}(t, s)$:

$$L_X u = \mu u + \mu Q \varphi \int_0^1 u(s) \psi(s) ds, \quad u \in \mathcal{D}(L_X). \quad (3.4)$$

Пусть μ — пока что неизвестный параметр. Методом вариации произвольных постоянных построим частное решение уравнения $L_X \eta - \mu \eta = \varphi$. Тогда общее решение уравнения (3.4) записывается в виде

$$u = c_0 \eta + c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_{2\ell} v_{2\ell},$$

где $v_1, \dots, v_{2\ell}$ — фундаментальная система решений уравнения $L_X v - \mu v = 0$. Подстановка в граничные условия дает 2ℓ уравнений для констант $c_0, c_1, \dots, c_{2\ell}$. Еще одно уравнение получаем, приравнявая коэффициенты при φ в (3.4):

$$\frac{c_0}{\mu Q} = c_0 \int_0^1 \eta(s) \psi(s) ds + c_1 \int_0^1 v_1(s) \psi(s) ds + \dots + c_{2\ell} \int_0^1 v_{2\ell}(s) \psi(s) ds. \quad (3.5)$$

Собственные числа задачи (3.4) являются корнями определителя полученной однородной системы, а собственные функции — ее нетривиальными решениями.

Для иллюстрации алгоритма приведем несколько примеров.

Пример 1. Пусть $X = W$ — винеровский процесс, $\varphi \equiv 1$. Тогда

$$\psi(s) = \int_0^1 \min(t, s) ds = \frac{2t - t^2}{2}, \quad q = \int_0^1 \frac{2t - t^2}{2} dt = \frac{1}{3}.$$

Соотношение (3.4) принимает вид

$$-u'' = \mu u + \frac{\mu Q}{2} \int_0^1 u(s) (2s - s^2) ds, \quad u(0) = u'(1) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u(t) = c_0 + c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t), \quad \omega = \mu^{1/2}. \quad (3.6)$$

Подставляя его в граничные условия и в (3.5), выводим уравнение для собственных чисел:

$$Q \sin(\omega) = \cos(\omega) \left(Q\omega + \left(1 + \frac{Q}{3} \right) \omega^3 \right). \quad (3.7)$$

При $Q = 0$ мы получаем $\cos(\omega) = 0$, как и должно быть, поскольку в этом случае мы имеем обычный винеровский процесс. Отметим еще, что $1 + Q/3 = (1 - \alpha/3)^2 \geq 0$. При $\alpha = 3$ уравнение сводится к $\operatorname{tg}(\omega) = \omega$.

Если ω_k — положительные корни уравнения (3.7), занумерованные в порядке возрастания, то в КЛ-разложении для процесса $\mathscr{W}_{1,\alpha}$ имеем

$$\tilde{\lambda}_k = \omega_k^{-2}, \quad \tilde{u}_k(t) = \gamma_k (\cos(\omega_k t) - 1 + \operatorname{tg}(\omega_k) \sin(\omega_k t)),$$

где γ_k — нормирующие константы.

П р и м е р 2. Пусть $X = B$ — броуновский мост, $\varphi \equiv 1$. Тогда $\psi(t) = (t - t^2)/2$, $q = \frac{1}{12}$. Соотношение (3.4) принимает вид

$$-u'' = \mu u + \frac{\mu Q}{2} \int_0^1 u(s) (s - s^2) ds, \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (3.8)$$

Общее решение этого уравнения дается формулой (3.6). Подставляя его в граничные условия и в (3.5), выводим уравнение для собственных чисел:

$$\begin{cases} \sin(\tau) = 0; \\ Q \sin(\tau) = \cos(\tau) (Q\tau + (4 + Q/3)\tau^3), \end{cases} \quad \tau = \frac{\omega}{2}. \quad (3.9)$$

При $Q = 0$ два уравнения в (3.9), как и следовало ожидать, объединяются в $\sin(\omega) = 0$. Отметим еще, что $4 + Q/3 = (2 - \alpha/6)^2 \geq 0$. При $\alpha = 12$ второе уравнение сводится к $\operatorname{tg}(\tau) = \tau$. Этот случай рассмотрен в [6, теорема 1.2].

Любопытным свойством обладает последовательность

$$Q_k = -\frac{12}{1 + 3/(k\pi)^2} \searrow -12$$

(каждому Q_k соответствуют два значения α): при $Q = Q_k$ k -е корни первой и второй серий в (3.9) совпадают. Таким образом, при $Q = Q_1$

задача (3.8) имеет кратное наименьшее собственное число — эффект, невозможный для обычной задачи Штурма–Лиувилля.

Если τ_k — положительные корни второй серии в (3.9), занумерованные в порядке возрастания, то в КЛ-разложении для процесса $\mathcal{B}_{1,\alpha}$ имеем:

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_k &= (2k\pi)^{-2}, & \tilde{u}_k(t) &= \sqrt{2} \sin(2\pi kt); \\ \tilde{\tilde{\lambda}}_k &= (2\tau_k)^{-2}, & \tilde{\tilde{u}}_k(t) &= \gamma_k (\cos(2\tau_k t) - 1 + \operatorname{tg}(\tau_k) \sin(2\tau_k t)),\end{aligned}$$

где γ_k — нормирующие константы.

П р и м е р 3. Пусть $X = B$, $\varphi(t) = t(1 - t)$. Тогда $\psi(t) = (t - 2t^3 + t^4)/12$, $q = \frac{17}{5040}$. Соотношение (3.4) принимает вид

$$-u'' = \mu u + \frac{\mu Q}{12} t(1 - t) \int_0^1 u(s) (s - 2s^3 + s^4) ds, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Общее решение этого уравнения дается формулой

$$u(t) = c_0 \left(t - t^2 + \frac{2}{\omega^2} \right) + c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t), \quad \omega = \mu^{1/2}.$$

Подставляя его в граничные условия и в (3.5), выводим уравнение для собственных чисел:

$$\begin{cases} \sin(\tau) = 0; \\ Q \sin(\tau) = \cos(\tau) \left(Q\tau + \frac{Q\tau^3}{3} + \frac{2Q\tau^5}{15} + 16(1 + Qq)\tau^7 \right), \end{cases} \quad \tau = \frac{\omega}{2}. \quad (3.10)$$

При $Q = 0$ два уравнения в (3.10) объединяются в $\sin(\omega) = 0$. Отметим, что $1 + Qq = (1 - q\alpha)^2 \geq 0$.

Если τ_k — положительные корни второй серии в (3.10), занумерованные в порядке возрастания, то в КЛ-разложении для процесса $\mathcal{B}_{\varphi,\alpha}$ имеем

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_k &= (2k\pi)^{-2}, & \tilde{u}_k(t) &= \sqrt{2} \sin(2\pi kt); \\ \tilde{\tilde{\lambda}}_k &= (2\tau_k)^{-2}, & \tilde{\tilde{u}}_k(t) &= \gamma_k (\cos(2\tau_k t) - 1 + 2\tau_k^2(t^2 - t) + \operatorname{tg}(\tau_k) \sin(2\tau_k t)),\end{aligned}$$

где γ_k — нормирующие константы.

П р и м е р 4. Пусть

$$X(t) = \overline{W}_1(t) = \int_0^t \left(W(s) - \int_0^1 W(u) du \right) ds$$

— проинтегрированный центрированный винеровский процесс. Ковариация $G_{\overline{W}_1}$ (см., например, [10] и [18, предложение 5.4]) есть функция Грина для оператора $L_{\overline{W}_1} = L_B^2$.

Если $\varphi \equiv 1$, то $\psi(t) = (t - 2t^3 + t^4)/24$, $q = \frac{1}{120}$ и соотношение (3.4) принимает вид

$$u^{IV} = \mu u + \frac{\mu Q}{24} \int_0^1 u(s) (s - 2s^3 + s^4) ds, \quad u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0.$$

Общее решение этого уравнения дается формулой

$$u(t) = c_0 + c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + c_3 \operatorname{ch}(\omega t) + c_4 \operatorname{sh}(\omega t), \quad \omega = \mu^{1/4}.$$

Подставляя его в граничные условия и в (3.5), выводим уравнение для собственных чисел:

$$\begin{cases} \sin(\tau) = 0; \\ Q(\sin(\tau) + \cos(\tau) \operatorname{th}(\tau)) = \cos(\tau) \left(2Q\tau + \left(32 + \frac{4Q}{15} \right) \tau^5 \right), \end{cases} \quad \tau = \frac{\omega}{2}. \quad (3.11)$$

При $Q = 0$ два уравнения в (3.11) объединяются в $\sin(\omega) = 0$. Отметим, что $32 + 4Q/15 = 32(1 - q\alpha)^2 \geq 0$.

Если τ_k — положительные корни второй серии в (3.11), занумерованные в порядке возрастания, то в КЛ-разложении для процесса $\mathcal{X}_{1,\alpha}$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_k &= (2k\pi)^{-4}, & \tilde{u}_k(t) &= \sqrt{2} \sin(2\pi kt); \\ \tilde{\tilde{\lambda}}_k &= (2\tau_k)^{-4}, & \tilde{\tilde{u}}_k(t) &= \gamma_k \left(\cos(2\tau_k t) + \operatorname{ch}(2\tau_k t) - 2 \right. \\ & & & \left. + \operatorname{tg}(\tau_k) \sin(2\tau_k t) - \operatorname{th}(\tau_k) \operatorname{sh}(2\tau_k t) \right), \end{aligned}$$

где γ_k — нормирующие константы.

Следует отметить, что в примерах 2–4 собственные числа из первой серии в (3.9)–(3.11) не зависят от Q . Это связано с тем, что соответствующие собственные функции $\sin(2\pi kt)$, $k \in \mathbf{N}$, ортогональны ψ в $L_2(0, 1)$ и последний член в уравнении (3.4) обращается в нуль.

Пример 5. Пусть $X = B$ и

$$\varphi(t) = \frac{1}{\phi(\Phi^{-1}(t))}, \quad \text{где} \quad \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt.$$

В этом важном для статистики примере (см. [12], [21]), очевидно, $\varphi \notin L_2(0, 1)$. Однако прямая выкладка дает $\psi = \phi(\Phi^{-1}) = 1/\varphi$, $q = 1$, и потому применимы все утверждения п. 1.

Далее, соотношение (3.4) принимает вид

$$-u'' = \mu u + \frac{\mu Q}{\phi(\Phi^{-1}(t))} \int_0^1 u(s) \phi(\Phi^{-1}(s)) ds, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Общее решение этого уравнения дается формулой

$$u(t) = c_0 \int_{1/2}^t \frac{\sin(\omega(\tau - t)) d\tau}{\omega \phi(\Phi^{-1}(\tau))} + c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t), \quad \omega = \mu^{1/2}.$$

Подставляя его в граничные условия и в (3.5), после некоторых преобразований получим уравнение для собственных чисел³⁾:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & \int_0^1 \Phi^{-1}(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau & -\frac{1}{\omega^2 Q} + \int_0^1 \int_0^\tau \Phi^{-1}(\tau) \Phi^{-1}(t) \frac{\sin(\omega(t-\tau))}{\omega} dt d\tau \\ \sin(\omega) & 0 & -\frac{1}{\omega} \int_0^1 \Phi^{-1}(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \\ \cos(\omega) & 1 & \frac{1}{\omega} \int_0^1 \Phi^{-1}(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau \end{bmatrix} = 0.$$

При $Q = 0$ предельный переход дает, естественно, $\sin(\omega) = 0$. Отметим, что здесь также половина из собственных функций исходного процесса, а именно, $\sin(2\pi kt)$, $k \in \mathbf{N}$, ортогональны ψ в $L_2(0, 1)$ и потому не меняются при изменении Q .

Опишем еще один случай, когда КЛ-разложение для преобразованного процесса строится элементарно. Пусть $\varphi = u_m$ — собственная функция ковариации G_X . Тогда $\psi = \lambda_m u_m$, где λ_m — соответствующее собственное число. Поэтому все собственные функции u_k , $k \neq m$, ортогональны ψ , и, следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_k &= \lambda_k, & \tilde{u}_k &= u_k, & k &\neq m, \\ \tilde{\lambda}_m &= \lambda_m(1 - q\alpha)^2, & \tilde{u}_m &= u_m. \end{aligned}$$

Установим теперь формулу, упрощающую (2.8) для процессов рассматриваемого класса.

Теорема 3. Пусть ковариация G_X является функцией Грина для оператора вида (3.1), $\hat{\alpha} = 1/q$. Если $\varphi \in L_2(0, 1)$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{P} \{ \|\mathcal{X}_{\varphi, \hat{\alpha}}\| \leq \varepsilon \} \sim \frac{\sqrt{q}}{\|\varphi\|_2} \left(2\ell \sin\left(\frac{\pi}{2\ell}\right) \varepsilon^2 \right)^{-\ell/(2\ell-1)} \cdot \mathbf{P} \{ \|X\| \leq \varepsilon \}. \quad (3.12)$$

Доказательство. Как показано в [17, теорема 1.2] (случай оператора L_X с разделенными граничными условиями был рассмотрен ранее в [18, § 7]), для процесса X справедливо соотношение

$$F(r) = \mathbf{P} \{ \|X\| \leq \sqrt{r} \} \sim \mathcal{C} r^\beta \exp(-\mathfrak{D} r^{-d}), \quad r \rightarrow 0, \quad (3.13)$$

где $d = (2\ell - 1)^{-1}$, $\mathfrak{D} = (2d)^{-1} (2\ell \sin(\pi(2\ell)^{-1}))^{-d-1}$ (значения констант $\mathcal{C}$ и β для нас сейчас несущественны).

Поведение плотности распределения $F'(r)$ при малых r изучалось в [15, теорема 3] при весьма общих предположениях. В наших условиях (см. в связи с этим доказательство теоремы 6.2 [18]) этот результат [15] можно записать так:

$$F'(r) \sim \mathcal{C} \mathfrak{D} r^{\beta-d-1} \exp(-\mathfrak{D} r^{-d}), \quad r \rightarrow 0, \quad (3.14)$$

³⁾ В [12] это уравнение записано в ином, эквивалентном, виде.

что означает просто дифференцируемость асимптотики (3.13) по r .

Подставляя (3.14) и (2.12) в (2.10), получим

$$\tilde{F}(r) \sim \frac{\mathcal{C}\mathfrak{D}d}{\|\varphi\|_2} \sqrt{\frac{2q}{\pi}} \int_0^r \frac{x^{\beta-d-1}}{\sqrt{r-x}} \exp(-\mathfrak{D}x^{-d}) dx.$$

Замена переменной $x = r(1-y)$ дает

$$\begin{aligned} \tilde{F}(r) &\sim \frac{\mathcal{C}\mathfrak{D}d}{\|\varphi\|_2} \sqrt{\frac{2q}{\pi}} r^{\beta-d-1/2} \exp(-\mathfrak{D}r^{-d}) \\ &\times \int_0^1 \frac{(1-y)^{\beta-d-1}}{\sqrt{y}} \exp\left(-\frac{\mathfrak{D}}{r^d}((1-y)^{-d}-1)\right) dy. \end{aligned}$$

Легко видеть, что при $y \geq r^{d/2}$ подынтегральное выражение экспоненциально мало. Поэтому можно интегрировать только по промежутку $[0, r^{d/2}]$, на котором $(1-y)^{\beta-d-1} \sim 1$ и $(1-y)^{-d}-1 \sim yd$.

Сделав еще замену $y = r^d z$, получим

$$\begin{aligned} \tilde{F}(r) &\sim \frac{\mathcal{C}\mathfrak{D}d}{\|\varphi\|_2} \sqrt{\frac{2q}{\pi}} r^{\beta-(d+1)/2} \exp(-\mathfrak{D}r^{-d}) \int_0^{r^{-d/2}} \frac{1}{\sqrt{z}} \exp(-d\mathfrak{D}z) dz \\ &\sim \frac{\mathcal{C}}{\|\varphi\|_2} \sqrt{2q\mathfrak{D}d} r^{\beta-(d+1)/2} \exp(-\mathfrak{D}r^{-d}) \sim \frac{\sqrt{2q\mathfrak{D}d}}{\|\varphi\|_2} r^{-(d+1)/2} F(r), \end{aligned}$$

что дает (3.12). Теорема 3 доказана.

В примерах, рассмотренных выше, асимптотика малых уклонений для исходных процессов хорошо известна (процессы W и B являются классическими, процесс $\bar{W}_1$ разобран в [3]). Применяя теоремы 1 и 3, получаем следующее предложение.

Предложение 1. При $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\|\mathcal{W}_{1,\alpha}\| \leq \varepsilon\} &\sim \begin{cases} \frac{4\varepsilon}{\sqrt{\pi}|1-\alpha/3|} \exp\left(-\frac{1}{8}\varepsilon^{-2}\right), & \alpha \neq 3, \\ \frac{2\varepsilon^{-1}}{\sqrt{3\pi}} \exp\left(-\frac{1}{8}\varepsilon^{-2}\right), & \alpha = 3; \end{cases} \\ \mathbf{P}\{\|\mathcal{B}_{1,\alpha}\| \leq \varepsilon\} &\sim \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}|1-\alpha/12|} \exp\left(-\frac{1}{8}\varepsilon^{-2}\right), & \alpha \neq 12, \\ \frac{\varepsilon^{-2}}{\sqrt{6\pi}} \exp\left(-\frac{1}{8}\varepsilon^{-2}\right), & \alpha = 12; \end{cases} \\ \mathbf{P}\{\|\mathcal{B}_{\varphi,\alpha}\| \leq \varepsilon\} &\sim \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}|1-17\alpha/5040|} \exp\left(-\frac{1}{8}\varepsilon^{-2}\right), & \alpha \neq \frac{5040}{17}, \\ \frac{\sqrt{17}\varepsilon^{-2}}{2\sqrt{21\pi}} \exp\left(-\frac{1}{8}\varepsilon^{-2}\right), & \alpha = \frac{5040}{17} \end{cases} \\ &(\text{здесь } \varphi(t) = t(1-t)); \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}\{\|\mathcal{X}_{1,\alpha}\| \leq \varepsilon\} \sim \begin{cases} \frac{4\sqrt{2}\varepsilon^{-1/3}}{\sqrt{3\pi}|1-\alpha/120|} \exp\left(-\frac{3}{8}\varepsilon^{-2/3}\right), & \alpha \neq 120 \\ \frac{\varepsilon^{-5/3}}{3\sqrt{5\pi}} \exp\left(-\frac{3}{8}\varepsilon^{-2/3}\right), & \alpha = 120 \end{cases}$$

(здесь $X(t) = \overline{W}_1(t)$);

$$\mathbf{P}\{\|\mathcal{B}_{\varphi,\alpha}\| \leq \varepsilon\} \sim \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}|1-\alpha|} \exp\left(-\frac{1}{8}\varepsilon^{-2}\right), \quad \alpha \neq 1$$

(здесь $\varphi(t) = \frac{1}{\phi(\Phi^{-1}(t))}$).

З а м е ч а н и е. В примере 5 при $\alpha = 1$ теорема 2 (и, следовательно, теорема 3) не применима.

4. Некоторые обобщения. Конструкция (1.3) может быть распространена на некоторый специальный класс обобщенных функций φ .

Пусть $\varphi \in D'(\mathcal{O})$ такова, что $q \equiv \mathbf{E}|\langle\varphi, X\rangle|^2 < \infty$. Определим семейство гауссовских функций формулой, аналогичной (1.3):

$$\mathcal{X}_{\varphi,\alpha}(x) = X(x) - \alpha\psi(x)\langle\varphi, X\rangle, \quad x \in \overline{\mathcal{O}}, \quad (4.1)$$

где $\psi(x) = \mathbf{E}X(x)\langle\varphi, X\rangle$.

З а м е ч а н и е. В терминах теории операторов условие на φ означает, что $\varphi \in (\text{Im}(\mathfrak{G}^{1/2}))'$. Соответственно, $\psi \in \text{Im}(\mathfrak{G}^{1/2})$ и $q = \langle\varphi, \psi\rangle$. В теории случайных процессов $\text{Im}(\mathfrak{G}^{1/2})$ именуется ядром распределения процесса X , а φ — линейным измеримым функционалом от процесса X , ассоциированным с ψ (см. [14, § 9]). Отметим, что формула (4.1) дает общий вид одномерного линейного возмущения гауссовских случайных процессов.

Для процессов (4.1) выполнены основная лемма и следствие 1. Вместо следствия 2 имеет место следующий его аналог.

Следствие 2'. При $\hat{\alpha} = 1/q$ процесс $\mathcal{X}_{\varphi,\hat{\alpha}}(x)$ и случайная величина $\langle\varphi, X\rangle$ независимы. Кроме того, $\langle\varphi, \mathcal{X}_{\varphi,\hat{\alpha}}\rangle = 0$ п.н.

Далее, при выполнении условия (2.1) справедлива теорема 1. Если же ковариация $G_X(t, s)$ удовлетворяет условиям, описанным в п. 3, то проходит и алгоритм построения КЛ-разложения для процесса $\mathcal{X}_{\varphi,\alpha}$.

Приведем несколько примеров.

П р и м е р 6. Пусть $X = W$, $\varphi(t) = \delta(t - 1)$. Тогда $\psi(t) = G_W(t, 1) = t$, $q = G_W(1, 1) = 1$ и

$$\mathcal{G}_{\varphi,\alpha}(t, s) = \min\{t, s\} + Qts \quad (Q = \alpha^2 - 2\alpha).$$

Таким образом, при $\alpha \in]0, 2[$ процесс $\mathcal{W}_{\varphi,\alpha}$ совпадает по распределению с броуновским мостом от нуля до нуля длины $-1/Q$ (см. [5, 4.4.20]).

Теорема 1 дает для $\alpha \neq 1$

$$\mathbf{P} \{ \|\mathcal{W}_{\varphi, \alpha}\| \leq \varepsilon \} \sim \frac{4\varepsilon}{\sqrt{\pi}|1-\alpha|} \exp\left(-\frac{1}{8}\varepsilon^{-2}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

что совпадает с частными случаями [16, предложение 1.9] и [19, теорема 4.1].

З а м е ч а н и е. При $\alpha = 1$ процесс $\mathcal{W}_{\varphi, \alpha}$ совпадает по распределению со стандартным броуновским мостом. Легко видеть, что бесконечное произведение в (2.9) при этом расходится, и теорема 2 места не имеет (как и в дальнейших примерах).

П р и м е р 7. Рассмотрим проинтегрированный винеровский процесс

$$X(t) = W_1^{[0]}(t) = \int_0^t W(s) ds.$$

Если $\varphi(t) = \delta'(t-1)$, то $\psi(t) = -(G_{W_1})_s(t, 1) = -t^2/2$, $q = (G_{W_1})_{st}(1, 1) = 1$ и

$$\mathcal{G}_{\varphi, \alpha}(t, s) = G_{W_1}(t, s) + Q \frac{t^2 s^2}{4} \quad (Q = \alpha^2 - 2\alpha).$$

Таким образом, процесс $\mathcal{X}_{\varphi, \alpha}$ совпадает по распределению с проинтегрированным процессом из примера 6. Утверждение теоремы 1 соответствует случаю $m = 1$ в [16, предложение 1.9]. Малые отклонения в случае $\alpha = 1$ (проинтегрированный броуновский мост) рассмотрены в [16, предложение 1.6].

Пусть теперь $\varphi(t) = \delta(t-1)$. Тогда $\psi(t) = G_{W_1}(t, 1) = t^2/2 - t^3/6$ и $q = G_{W_1}(1, 1) = \frac{1}{3}$. Теорема 1 дает для $\alpha \neq 3$

$$\mathbf{P} \{ \|\mathcal{X}_{\varphi, \alpha}\| \leq \varepsilon \} \sim \frac{8\sqrt{6}\varepsilon^{1/3}}{\sqrt{\pi}|3-\alpha|} \exp\left(-\frac{3}{8}\varepsilon^{-2/3}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

При $\alpha = 3$ можно прямым вычислением проверить, что $\mathcal{G}_{\varphi, \alpha}(t, s)$ есть функция Грина краевой задачи

$$u^{IV} = \mu u; \quad u(0) = u'(0) = u(1) = u''(1) = 0.$$

Применяя теорему 1.4 из работы [16], получаем

$$\mathbf{P} \{ \|\mathcal{X}_{\varphi, \alpha}\| \leq \varepsilon \} \sim \frac{4\sqrt{2}\varepsilon^{-2/3}}{3\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{3}{8}\varepsilon^{-2/3}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

П р и м е р 8. Рассмотрим еще процесс Слепяна [20] — стационарный гауссовский процесс с нулевым средним и ковариацией $G_S(t, s) = 1 - |t-s|$, $t, s \in [0, 1]$. Пусть $\varphi(t) = \delta(t) + \delta(t-1)$. Тогда $\psi \equiv 1$, $q = 2$ и

$$\mathcal{G}_{\varphi, \alpha}(t, s) = 1 + Q - |t-s| \quad (Q = 2\alpha^2 - 2\alpha).$$

Таким образом, процесс $\mathcal{S}_{\varphi, \alpha}$ совпадает по распределению с обобщенным процессом Слепяна $S^{(c)}$, $c = 1 + Q$ (см. [9] и [17, §2]). Отметим, что при $Q \geq 0$ справедливо также равенство

$$S^{(c)}(t) \stackrel{d}{=} W(t+c) - W(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Утверждение теоремы 1 соответствует [17, теорема 2.1, п. 2]. Малые уклонения в случае $\alpha = 1/2$ (т.е. $c = 1/2$) рассмотрены в [17, теорема 2.1, п. 1].

Пример 9. Аналогично, несложно показать, что к теореме 1 сводится утверждение [16, предложение 1.9] при произвольном $m \in \mathbf{N}$, а также [17, теорема 2.2, п. 2] и некоторые утверждения из [19]. Таким образом, эта теорема дает единый подход к многим формулам, полученным ранее.

Можно также рассматривать многопараметрические аналоги преобразования (1.3). Мы ограничимся простейшим случаем.

Пусть функции $\varphi_1, \varphi_2 \in L_{1, \text{loc}}(\mathcal{O})$ удовлетворяют условию (1.2) и условию «ортогональности»⁴⁾

$$\int_{\mathcal{O}} \int_{\mathcal{O}} G_X(u, v) \varphi_1(u) \varphi_2(v) du dv = 0.$$

Рассмотрим семейство гауссовских функций

$$\mathcal{X}_{\varphi, \alpha}(x) = X(x) - \alpha_1 \psi_1(x) \int_{\mathcal{O}} X(u) \varphi_1(u) du - \alpha_2 \psi_2(x) \int_{\mathcal{O}} X(u) \varphi_2(u) du, \\ x \in \overline{\mathcal{O}}, \quad (4.2)$$

где $\psi_k = \mathfrak{G}\varphi_k$, $k = 1, 2$.

Легко видеть, что функция (4.2) имеет ковариацию

$$\mathcal{G}_{\varphi, \alpha}(x, y) = G_X(x, y) + Q_1 \psi_1(x) \psi_1(y) + Q_2 \psi_2(x) \psi_2(y),$$

где $Q_k = q_k \alpha_k^2 - 2\alpha_k$, $q_k = \langle \varphi_k, \psi_k \rangle$. Поэтому, например, асимптотика L_2 -малых уклонений функции $\mathcal{X}_{\varphi, \alpha}$ при $\alpha_k \neq 1/q_k$, $k = 1, 2$, получается двукратным применением теоремы 1. Так же получаются аналоги остальных утверждений.

5. Приложение.

Лемма 2. Рассмотрим две последовательности; $\mu_k > 0$ и $b_k \geq 0$, $k \in \mathbf{N}$. Пусть $\sum_k \mu_k^{-1} < \infty$ и $\sum_k b_k < \infty$. Тогда при $R \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \gamma_1 + \gamma_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{1 - \mu_k / (R \exp(i\theta))} \right| d\theta \longrightarrow \ln \left(\gamma_1 + \gamma_2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right) \quad (5.1)$$

для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbf{R}$ таких, что выражение под знаком логарифма в правой части положительно.

⁴⁾ Для обобщенных функций $\varphi_1, \varphi_2 \in (\text{Im}(\mathfrak{G}^{1/2}))'$ это условие принимает вид $\langle \varphi_1, \mathfrak{G}\varphi_2 \rangle = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При любом фиксированном $\theta \in]0, 2\pi[$ выражение $1 - \mu_k / (R \exp(i\theta))$ отделено от нуля. По теореме Лебега можно перейти к пределу под знаком суммы. Таким образом, подынтегральное выражение в (5.1) сходится к $\ln(\gamma_1 + \gamma_2 \sum_k b_k)$ при $\theta \in]0, 2\pi[$, причем сходимости равномерная на любом отрезке.

Далее, выражение под знаком модуля имеет лишь простые нули и полюсы. Поэтому подынтегральное выражение в (5.1) имеет лишь логарифмические особенности, и потому несложно построить суммируемую мажоранту вида $\text{const} \cdot \ln |\sin(\theta)|$. Повторное применение теоремы Лебега заканчивает доказательство.

Я весьма признателен М. А. Лифшицу и Я. Ю. Никитину за стимулирующие обсуждения и библиографические указания, а также М. Ш. Бирману, указавшему мне на работу [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966, 543 с.
2. Bateman H. A formula for the solving function of a certain integral equation of the second kind. — Messenger Math., 1908, v. 37, p. 179–187.
3. Beghin L., Nikitin Ya. Yu., Orsingher E. Exact small ball constants for some Gaussian processes under the L_2 -norm. — Записки науч. сем. ПОМИ, 2003, т. 298, с. 5–21.
4. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980, 264 с.
5. Бородин А. Н., Салминен П. Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы. СПб.: Лань, 2000, 639 с.
6. Deheuvels P. A Karhunen–Loève expansion for a mean-centered Brownian bridge. — Statist. Probab. Lett., 2007, v. 77, № 12, p. 1190–1200.
7. Dunker T., Lifshits M. A., Linde W. Small deviations probabilities of sums of independent variables. — Progr. Probab., 1998, v. 43, p. 59–74.
8. Gao F., Hannig J., Torcaso F. Comparison theorems for small deviations of random series. — Electron. J. Probab., 2003, v. 8, № 21, p. 1–17.
9. Gao F., Li W. V. Small ball probabilities for the Slepian Gaussian fields. — Trans. Amer. Math. Soc., 2007, v. 359, № 3, p. 1339–1350.
10. Henze N., Nikitin Ya. Yu. Watson-type goodness-of-fit tests based on the integrated empirical process. — Math. Methods Statist., 2002, v. 11, № 2, p. 183–202.
11. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л.: Физматгиз, 1962, 708 с.
12. Kac M., Kiefer J., Wolfowitz J. On tests of normality and other tests of goodness of fit based on the minimum distance methods. — Ann. Math. Statist., 1955, v. 26, № 2, p. 189–211.
13. Li W. V. Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorms. — J. Theoret. Probab., 1992, v. 5, № 1, p. 1–31.
14. Лифшиц М. А. Гауссовские случайные функции. Киев: ТВИМС, 1995.
15. Lifshits M. A. On the lower tail probabilities of some random series. — Ann. Probab., 1997, v. 25, № 1, p. 424–442.
16. Назаров А. И. О точной константе в асимптотике малых отклонений в L_2 -норме некоторых гауссовских процессов. — Нелинейные задачи и теория функций. Под ред. Н. Н. Уральной. Новосибирск: Тамара Рожковская, с. 179–214. (Проблемы матем. анализа, в. 26.)

17. *Nazarov A. I.* Exact L_2 -small ball asymptotics of Gaussian processes and the spectrum of boundary value problems. — J. Theoret. Probab., 2008. DOI 10.1007/s10959-008-0173-7.
18. *Nazarov A. I., Nikitin Ya. Yu.* Exact L_2 -small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems. — Probab. Theory Related Fields, 2004, v. 129, № 4, p. 469–494.
19. *Назаров А. И., Пусев Р. С.* Точная асимптотика малых уклонений в L_2 -норме с весом для некоторых гауссовских процессов. — Записки науч. сем. ПОМИ, 2009, т. 364, с. 166–199.
20. *Slepian D.* First passage time for a particular Gaussian process. — Ann. Math. Statist., 1961, v. 32, p. 610–612.
21. *Sukhatme S.* Fredholm determinant of a positive definite kernel of a special type and its application. — Ann. Math. Statist., 1972, v. 43, № 6, p. 1914–1926.
22. *Сытая Г. Н.* О некоторых асимптотических представлениях гауссовской меры в гильбертовом пространстве. — Теория случайных процессов, 1974, т. 2, с. 93–104.
23. *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Наука, 1980, 463 с.

Поступила в редакцию
2.IV.2008