Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Сенатов, О точности аппроксимации в законе больших чисел, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 2, 243–255

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2699>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 16:10:20

© 2009 г.

СЕНАТОВ В. В.*

**О ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ
В ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ¹⁾**

Получены неулучшаемые оценки скорости сходимости в законе больших чисел для слабых и средних метрик. Рассматриваются расстояния как на множестве распределений, так и на множестве случайных величин.

Ключевые слова и фразы: закон больших чисел, точность аппроксимации, скорость сходимости, идеальные метрики.

Цель данной работы — продемонстрировать оценки точности аппроксимации в законе больших чисел (ЗБЧ) в метрической постановке.

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — действительные независимые одинаково распределенные случайные величины с конечным первым моментом, который мы будем считать, без ограничения общности, равным нулю. Хорошо известно, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0. \quad (1)$$

Пусть F — общая функция распределения случайных величин $X_1, X_2, \dots$, а F_n — функции распределения средних арифметических $(X_1 + \dots + X_n)/n$. Так как из сходимости по вероятности следует слабая сходимость соответствующих распределений, а последняя метризуется метрикой Леви L , то из (1) следует, что $L(F_n, E_0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где E_0 — функция распределения с единственной точкой роста в нуле. Кроме того, при наших предположениях $\varkappa(F_n, E_0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где

$$\varkappa(U, V) = \int_{-\infty}^{\infty} |U(x) - V(x)| dx$$

— среднее расстояние между функциями распределения U и V .

Мы получим неулучшаемые по порядку верхние оценки величин $L(F_n, E_0)$ и $\varkappa(F_n, E_0)$ при условии, что s -й абсолютный момент $\beta_s =$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: vladimir-cenatov@rambler.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 07-01-00362, 08-01-00563).

$\beta_s(F) = \mathbf{E}|X_1|^s$, $s > 1$, конечен. В формулировках и доказательствах этих оценок используются идеальные метрики ζ_s , $s > 1$, введенные В. М. Золотаревым в 1975 г. (см., например, [1]). Об этих метриках мы немного поговорим после формулировки теорем, а сейчас лишь отметим, что при $1 < s \leq 2$ величина $\zeta_s(F, E_0)$ конечна тогда и только тогда, когда конечна величина β_s . Рассматривая расстояния $\zeta_s(U, V)$ между функциями распределения U и V , мы всегда считаем, что они конечны, далее это оговариваться не будет. Условия конечности расстояний $\zeta_s(U, V)$ приведены ниже.

Теорема 1. *Если величина β_s конечна, $1 < s \leq 2$, то при всех натуральных n*

$$L(F_n, E_0) \leq 4^{1/3} \zeta_s^{1/(1+s)}(F, E_0) n^{-(s-1)/(s+1)}$$

и

$$\kappa(F_n, E_0) \leq 4 \zeta_s^{1/s}(F, E_0) n^{-(s-1)/s}.$$

Далее мы покажем (в примере 1), что при $1 < s < 2$ порядки по n указанных оценок неулучшаемы. Таким образом, при усилении ограничений на распределение исходных случайных величин в части существования моментов скорости стремления к нулю при росте n величин $L(F_n, E_0)$ и $\kappa(F_n, E_0)$ увеличиваются. Это отчасти напоминает утверждение одной теоремы И. А. Ибрагимова (см., например [2, с. 127]). При $s = 2$ скорость стремления к нулю величин $\kappa(F_n, E_0)$ достигает порядка $O(1/\sqrt{n})$, $n \rightarrow \infty$, и простой пример, связанный со случаем $F = \Phi$ (здесь и далее Φ — стандартный нормальный закон, для которого, как легко проверить, $\kappa(F_n, E_0) = \sqrt{2/\pi} n^{-1/2}$), показывает, что дальнейшее усиление ограничений на F не приводит к росту скорости сходимости в ЗБЧ в средней метрике. Для расстояния Леви при $s = 2$ скорость стремления к нулю величин $L(F_n, E_0)$ достигает порядка $O(n^{-1/3})$, $n \rightarrow \infty$, но оказывается, что рост скорости сближения F_n и E_0 в метрике Леви при $s = 2$ не останавливается, он продолжается при увеличении s от 2 до 3, о чем свидетельствует утверждение теоремы 2. В оценке этой теоремы мы не можем использовать величину $\zeta_s(F, E_0)$ с $s > 2$, поскольку она бесконечна, если функция распределения F невырождена. Однако мы можем считать, и это не ограничивает общности, что при $\beta_s < \infty$, $s \geq 2$, исходные случайные величины имеют единичную дисперсию. В этом случае расстояние $\zeta_s(F, \Phi)$ конечно при $s \leq 3$.

Теорема 2. *Если величина β_s , $2 < s \leq 3$, конечна и второй момент функции распределения F равен 1, то при $n \geq 3$*

$$L(F_n, E_0) \leq 4 \zeta_s^{1/(1+s)}(F, \Phi) n^{-(s-1)/(s+1)} + \sqrt{\frac{\ln n}{n}}.$$

При $2 < s < 3$ основную роль в этой оценке играет первое слагаемое, и в примере 2 мы покажем, что его порядок по n неулучшаем. При $s = 3$ роли слагаемых в оценке теоремы 2 меняются, основным становится слагаемое, содержащее $\sqrt{\ln n}$. Оказывается, что это слагаемое неулучшаемо при всех $s \geq 3$, в частности, в него нельзя внести множитель, меньший 1. Это показывает пример, вновь связанный со случаем $F = \Phi$. В этом случае первое слагаемое в оценке теоремы 2 становится равным нулю, а неулучшаемость второго слагаемого обусловлена тем, что для расстояния $L(E_0, \Phi^\varepsilon)$ (здесь и далее Φ^ε , $\varepsilon > 0$, — нормальный закон с нулевым средним и дисперсией ε^2) справедливо неравенство

$$L(E_0, \Phi^\varepsilon) \leq \varepsilon \sqrt{2 \ln \varepsilon^{-1}}, \quad (2)$$

если $0 < \varepsilon \leq 0.6$, при этом в правой части неравенства (2) сомножитель 2 нельзя заменить меньшей постоянной. Этот факт хорошо известен, но мы приведем его доказательство. Нам будет удобно сделать это после разбора примеров 1 и 2. Теоремы 1 и 2 показывают, что скорость стремления величин $L(F_n, E_0)$ к нулю при росте n увеличивается, когда s возрастает в интервале $(1, 3)$. При $s = 3$ величина $L(F_n, E_0)$ имеет порядок $O(\sqrt{n^{-1} \ln n})$, $n \rightarrow \infty$. Дальнейшее увеличение s не приводит к увеличению скорости стремления $L(F_n, E_0)$ к нулю.

Приведем теперь некоторые сведения об идеальных метриках ζ_s , $s > 0$. Расстоянием $\zeta_s(U, V)$, $s > 0$, между функциями распределения U и V называется число

$$\zeta_s(U, V) = \sup \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d(U(x) - V(x)) \right|,$$

где супремум берется по множеству действительных функций $f \in \mathcal{F}_s$, а множество $\mathcal{F}_s$ определяется следующим образом. Положительное число s можно единственным образом представить в виде $s = m + \alpha$, где m — неотрицательное целое число, а $0 < \alpha \leq 1$. Множество функций $\mathcal{F}_s$ состоит из всех функций f , для которых m -я производная существует и удовлетворяет условию Липшица

$$\left| f^{(m)}(x) - f^{(m)}(y) \right| \leq |x - y|^\alpha, \quad -\infty < x, y < \infty.$$

Отметим, что среднее расстояние $\kappa(U, V)$ совпадает с величиной $\zeta_1(U, V)$.

Метрики ζ_s являются полуаддитивными, т.е. для любых функций распределения U_1, U_2, V_1, V_2 справедливо неравенство

$$\zeta_s(U_1 * U_2, V_1 * V_2) \leq \zeta_s(U_1, V_1) + \zeta_s(U_2, V_2),$$

где $*$ означает свертку. Очевидным следствием последнего неравенства является неравенство

$$\zeta_s(U^{*n}, V^{*n}) \leq n \zeta_s(U, V) \quad (3)$$

для любого натурального n , где *n означает свертку n одинаковых распределений. Кроме того, метрики ζ_s являются однородными порядка s , т.е. для любого числа $c > 0$

$$\zeta_s(F_{cX}, F_{cY}) = c^s \zeta_s(F_X, F_Y),$$

где F_X и F_Y — функции распределения случайных величин X и Y .

Если хотя бы у одной из функций распределения U или V существует абсолютный момент порядка $s > 0$, то для конечности $\zeta_s(U, V)$ необходимо и достаточно существования s -го абсолютного момента другой функции распределения и, если $s > 1$, совпадения моментов $\int_{-\infty}^{\infty} x^j dU(x)$ и $\int_{-\infty}^{\infty} x^j dV(x)$ для $j = 1, \dots, m$. Отметим, что если величина $\zeta_s(U, V)$ конечна, то

$$\zeta_s(U, V) \leq \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+s)} (\beta_s(U) + \beta_s(V)).$$

Из многочисленных свойств ζ -метрик нам понадобятся лишь неравенство сглаживания и неравенство, позволяющее оценивать расстояния между сглаженными распределениями. Первое из этих неравенств есть утверждение о том, что если величина $\zeta_s(U, V)$, $0 < s \leq 2$, конечна, то конечна и величина $\zeta_s(U * \Phi^\varepsilon, V * \Phi^\varepsilon)$, и для любого $\varepsilon > 0$

$$\zeta_s(U, V) \leq \zeta_s(U * \Phi^\varepsilon, V * \Phi^\varepsilon) + c_s \varepsilon^s.$$

Величина c_s зависит лишь от s , при этом $c_s \leq 2\zeta_s(E_0, \Phi)$. В частности, $c_1 \leq 2\sqrt{2/\pi}$. Неравенство сглаживания является простым следствием неравенства треугольника, однородности порядка s и регулярности метрик ζ_s , а последнее свойство состоит в том, что для любых функций распределения U, V, H

$$\zeta_s(U * H, V * H) \leq \zeta_s(U, V).$$

Второе из упомянутых неравенств состоит в том, что если величина $\zeta_{r+d}(U, V)$ конечна, $r > 0$, $d > 0$, то для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\zeta_r(U * \Phi^\varepsilon, V * \Phi^\varepsilon) \leq c(d) \frac{\zeta_{r+d}(U, V)}{\varepsilon^d}, \quad (4)$$

где $c(d)$ зависит лишь от d . Доказательство этого неравенства для целых d можно найти в [1], а для произвольных r и d — в [3]. Отметим, что неравенство (4) при использовании техники, связанной с ζ -метриками, играет примерно ту же роль, что разложение характеристической функции в отрезок ряда Тейлора в методе характеристических функций: и разложение характеристической функции в отрезок ряда Тейлора, и неравенство (4) позволяют учитывать существование моментов высоких порядков (см. ниже неравенство (13)). Нам неравенство (4) понадобится

лишь для $r = 1$ и $d = s - 1$, $1 < s \leq 2$, точнее, оно понадобится нам в виде

$$\zeta_1(F_n * \Phi^\varepsilon, E_0 * \Phi^\varepsilon) \leq 2(\sqrt{2\pi})^{1-s} \frac{\zeta_s(F_n, E_0)}{\varepsilon^{s-1}}. \quad (5)$$

Для удобства читателя приведем доказательство неравенства

$$\zeta_1(U * \Phi^\varepsilon, V * \Phi^\varepsilon) \leq 2(\sqrt{2\pi})^{1-s} \frac{\zeta_s(U, V)}{\varepsilon^{s-1}}, \quad (6)$$

где $1 < s \leq 2$ и $\varepsilon > 0$ произвольно.

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \zeta_1(U * \Phi^\varepsilon, V * \Phi^\varepsilon) &= \sup \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d((U * \Phi^\varepsilon)(x) - (V * \Phi^\varepsilon)(x)) \right| \\ &= \sup \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(x) d(U(x) - V(x)) \right|, \end{aligned}$$

где первая верхняя грань берется по множеству функций f , для которых

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|, \quad -\infty < x, y < \infty, \quad (7)$$

а вторая — по множеству функций

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u) \varphi^\varepsilon(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u) \frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) du,$$

где f удовлетворяют условию (7), φ^ε — плотность Φ^ε и φ — плотность стандартного нормального закона. Очевидно, что каждая функция g бесконечно дифференцируема (так как φ бесконечно дифференцируема), модуль ее первой производной не превосходит единицы (в силу (7)) и первую производную g можно вычислять по формуле

$$g'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u) \frac{1}{\varepsilon} H_1\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) \frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) du,$$

где $H_1(u/\varepsilon) = u/\varepsilon$ — многочлен Чебышёва–Эрмита первого порядка от переменной u/ε . Отсюда следует, что

$$|g'(x) - g'(y)| \leq |x - y| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} \left| H_1\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) \right| \frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) du \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{|x - y|}{\varepsilon}.$$

Теперь ясно, что для любого $0 < \alpha \leq 1$

$$\begin{aligned} |g'(x) - g'(y)| &\leq \min \left(2, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{|x - y|}{\varepsilon} \right) \\ &= 2 \min \left(1, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{|x - y|}{\varepsilon} \right) \leq 2 \left(\frac{|x - y|}{\sqrt{2\pi}\varepsilon} \right)^\alpha, \end{aligned}$$

поскольку $\min(1, h) \leq h^\alpha$ для $h > 0$. Поэтому функция $\frac{1}{2}(\sqrt{2\pi}\varepsilon)^\alpha g \in \mathcal{F}_s$ и неравенство (6) становится очевидным.

При доказательстве первого утверждения теоремы 1 и теоремы 2 нам понадобится следующая хорошо известная связь между метрикой Леви и ζ -метриками:

$$L^{1+s}(U, V) \leq k_s \zeta_s(U, V), \quad (8)$$

где k_s зависят лишь от s .

Получим явные оценки постоянных k_s для $0 < s \leq 3$.

Пусть $L(U, V) = \varepsilon > 0$. Хорошо известно, что величина ε совпадает со стороной максимального квадрата, который можно вставить между замкнутыми графиками функций распределения U и V (стороны квадрата параллельны осям координат; график каждой функции распределения в каждой точке разрыва дополняется вертикальным отрезком, соединяющим предельные значения функции распределения в этой точке). Так как расстояния L и ζ_s инвариантны относительно сдвигов функций распределения (это следует из свойства регулярности этих метрик), то мы можем без ограничения общности считать, что левая сторона этого квадрата лежит на оси ординат. В этом случае при $0 < x < \varepsilon$ разность $U(x) - V(x)$ знакопостоянна и по абсолютной величине не меньше ε .

Рассмотрим функции $f_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, которые при $x \leq 0$ равны нулю, при $0 \leq x \leq 1$ удовлетворяют соотношениям

$$f_1(x) = x, \quad f_2'(x) = \min(4x, 4 - 4x), \quad f_3'(x) = 30x^2(1 - x)^2$$

и при $x \geq 1$ равны единице. Для любой из этих функций

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) d(U(x) - V(x)) \right| &= \left| \int_0^{\varepsilon} (U(x) - V(x)) f_i'\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{1}{\varepsilon} dx \right| \\ &= \int_0^{\varepsilon} |U(x) - V(x)| f_i'\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{1}{\varepsilon} dx \geq \varepsilon \quad (= L(U, V)). \end{aligned}$$

С другой стороны, нетрудно понять, что при $0 < s \leq 1$ функция $\varepsilon^s f_1(x/\varepsilon)$ принадлежит $\mathcal{F}_s$, поэтому

$$\zeta_s(U, V) \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^s f_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) d(U(x) - V(x)) \right| \geq \varepsilon^{1+s}.$$

Таким образом, при $0 < s \leq 1$

$$L^{1+s}(U, V) \leq \zeta_s(U, V). \quad (9)$$

При $1 < s \leq 2$ для всех действительных x, y

$$\begin{aligned} |f_2'(x) - f_2'(y)| &\leq \min(2, 4|x - y|) \\ &= 2 \min(1, 2|x - y|) \leq 2(2|x - y|)^\alpha, \quad \alpha = s - 1. \end{aligned}$$

Легко проверить, что $(\varepsilon/2)^s f_2(x/\varepsilon) \in \mathcal{F}_s$, поэтому

$$\zeta_s(U, V) \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^s f_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) d(U(x) - V(x)) \right| \geq \frac{\varepsilon^{1+s}}{2^s}.$$

Таким образом, при $1 < s \leq 2$

$$L^{1+s}(U, V) \leq 2^s \zeta_s(U, V). \quad (10)$$

Нетрудно проверить, что максимальное значение функции $f_3''(x)$ равно $10/\sqrt{3}$, минимальное равно $-10/\sqrt{3}$ и $|f_3'''(x)| \leq 60$. Поэтому при $2 < s \leq 3$ для всех действительных x, y

$$\begin{aligned} |f_3''(x) - f_3''(y)| &\leq \min\left(\frac{20}{\sqrt{3}}, 60|x - y|\right) = \frac{20}{\sqrt{3}} \min(1, 3\sqrt{3}|x - y|)^\alpha \\ &\leq \frac{20}{\sqrt{3}} (3\sqrt{3}|x - y|)^\alpha, \quad \alpha = s - 2. \end{aligned}$$

Легко проверить, что $\sqrt{3}\varepsilon^s (20(3\sqrt{3})^\alpha)^{-1} f_3(x/\varepsilon) \in \mathcal{F}_s$, поэтому

$$\zeta_s(U, V) \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{3}\varepsilon^s}{20(3\sqrt{3})^\alpha} f_3\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) d(U(x) - V(x)) \right| \geq \frac{\sqrt{3}}{20(3\sqrt{3})^\alpha} \varepsilon^{1+s}.$$

Таким образом, при $2 < s \leq 3$

$$L^{1+s}(U, V) \leq \frac{20}{\sqrt{3}} (3\sqrt{3})^{s-2} \zeta_s(U, V). \quad (11)$$

Отметим, что при $s = 1$ неравенство (9) превращается в неравенство $L^2(u, v) \leq \kappa(U, V)$, которое очевидно в силу того, что $\kappa(U, V)$ есть площадь между замкнутыми графиками функций распределения U и V , а $L(U, V)$ есть сторона максимального квадрата, который можно вставить между графиками этих функций распределения.

Отметим также, что равенство в неравенстве (9) достижимо для любого $0 < s \leq 1$. В этом убеждает пример, связанный с функциями $U(x) = \varepsilon E_0(x) + (1 - \varepsilon)E_\varepsilon(x)$ и $V(x) = E_\varepsilon(x)$, где E_ε — вырожденная функция распределения с единственной точкой роста ε , $0 < \varepsilon < 1$. Ясно, что для любой $f \in \mathcal{F}_s$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d(U(x) - V(x)) \right| = |\varepsilon f(0) - \varepsilon f(\varepsilon)| \leq \varepsilon^{1+s},$$

поэтому $\zeta_s(U, V) \leq \varepsilon^{1+s}$, а поскольку функция, равная нулю при $x \leq 0$ и равная x^s при $x \geq 0$, принадлежит $\mathcal{F}_s$, то

$$\zeta_s(U, V) \geq \left| \int_0^\infty x^s d(U(x) - V(x)) \right| = \varepsilon^{1+s},$$

т.е. для указанных функций распределения $\zeta_s(U, V) = \varepsilon^{1+s}$, $L(U, V) = \varepsilon$ и равенство в (9) достижимо.

Доказательство теоремы 1. Прежде всего заметим, что если β_s , $1 < s \leq 2$, конечно, то величина $\zeta_s(F, E_0)$ также конечна и справедливо неравенство

$$\zeta_s(F_n, E_0) \leq \frac{\zeta_s(F, E_0)}{n^{s-1}}. \quad (12)$$

Действительно, в силу однородности s -го порядка метрики ζ_s

$$\begin{aligned} \zeta_s(F_n, E_0) &= \zeta_s(F_{(X_1+\dots+X_n)/n}, E_0) \\ &= \frac{1}{n^s} \zeta_s(F_{X_1+\dots+X_n}, E_0) = \frac{1}{n^s} \zeta_s(F^{*n}, E_0^{*n}). \end{aligned}$$

Отсюда и из (3) сразу следует справедливость (12).

Из неравенств (10) и (12) вытекает справедливость первого утверждения теоремы 1.

Для доказательства второго утверждения теоремы вспомним, что $\varkappa = \zeta_1$, и воспользуемся неравенством сглаживания для расстояния ζ_1

$$\zeta_1(F_n, E_0) \leq \zeta_1(F_n * \Phi^\varepsilon, E_0 * \Phi^\varepsilon) + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \varepsilon,$$

где величина $\varepsilon > 0$ находится в нашем распоряжении. Воспользовавшись неравенством (5), мы видим, что

$$\zeta_1(F_n, E_0) \leq 2(\sqrt{2\pi})^{1-s} \frac{\zeta_s(F_n, E_0)}{\varepsilon^{s-1}} + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \varepsilon. \quad (13)$$

Вспоминая оценку (12), мы видим, что

$$\zeta_1(F_n, E_0) \leq 2(\sqrt{2\pi})^{1-s} \frac{\zeta_s(F, E_0)}{\varepsilon^{s-1} n^{s-1}} + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \varepsilon.$$

Если ε удовлетворяет условию равенства слагаемых в правой части последнего неравенства, то второе утверждение теоремы 1 справедливо.

Доказательство теоремы 2. По неравенству треугольника $L(F_n, E_0) \leq L(F_n, \Phi_n) + L(\Phi_n, E_0)$, где Φ_n — функция распределения среднего арифметического независимых случайных величин со стандартным нормальным распределением. Первое слагаемое в правой части этого неравенства не превосходит

$$\left(\frac{20}{\sqrt{3}} (3\sqrt{3})^{s-2} \right)^{1/(1+s)} \zeta_s^{1/(1+s)}(F_n, \Phi_n) \leq 60^{1/3} \zeta_s^{1/(1+s)}(F_n, \Phi_n),$$

а

$$\zeta_s(F_n, \Phi_n) = \frac{1}{n^s} \zeta_1(F^{*n}, \Phi^{*n}) \leq \frac{\zeta_s(F, \Phi)}{n^{s-1}}.$$

Из (2) следует, что $L(\Phi_n, E_0) \leq \sqrt{n^{-1} \ln n}$, и оценка теоремы 2 становится очевидной.

П р и м е р 1. Пусть $Y_1, Y_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные величины, имеющие симметричное устойчивое распределение с характеристической функцией $g(t) = e^{-|t|^\gamma}$, $1 < \gamma < 2$.

Пусть G — функция распределения случайных величин $Y_1, Y_2, \dots$ и G_n — функции распределения средних арифметических $(Y_1 + \dots + Y_n)/n$. Хорошо известно, что у функции распределения G существуют все абсолютные моменты порядков, меньших γ , и что при всех натуральных n

$$\mathbf{P} \left(\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n^{1/\gamma}} < x \right) = G(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (14)$$

(это сразу следует из вида характеристической функции g).

В силу однородности первого порядка метрики $\varkappa (= \zeta_1)$

$$\varkappa \left(F_{(Y_1 + \dots + Y_n)/n}, E_0 \right) = \frac{n^{1/\gamma}}{n} \varkappa \left(F_{(Y_1 + \dots + Y_n)/n^{1/\gamma}}, E_0 \right),$$

а последнее расстояние не зависит от n . Таким образом,

$$\varkappa(G_n, E_0) = \varkappa(G, E_0) n^{-(\gamma-1)/\gamma},$$

а отсюда следует неулучшаемость порядка по n второй оценки теоремы 1, поскольку величина γ , $s < \gamma < 2$, может быть выбрана сколь угодно близкой к s , $1 < s < 2$.

Для того чтобы показать неулучшаемость первой оценки теоремы 1, вспомним, что расстояние $L = L(G_n, E_0)$ есть сторона максимального квадрата, который можно вставить между замкнутыми графиками функций распределения G_n и E_0 . Очевидно, что для этих функций распределения существуют два таких квадрата. Один из них лежит слева от оси ординат и его правый нижний угол находится в начале координат, а второй лежит справа от оси ординат и его левый верхний угол находится в точке с координатами 0 и 1. Стороны этих квадратов одинаковы и равны L . Рассматривая правый квадрат, легко заметить, что величина L есть решение уравнения

$$L = \int_L^\infty dG_n(x) \quad (15)$$

или, что то же самое,

$$L = \int_L^\infty dG(n^{(\gamma-1)/\gamma} x) = \int_{Ln^{(\gamma-1)/\gamma}}^\infty dG(x) = 1 - G(Ln^{(\gamma-1)/\gamma}).$$

Очевидно, что $L \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому $Ln^{(\gamma-1)/\gamma} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, и для получения асимптотики величин L достаточно знать асимптотику

функций $G(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Хорошо известны (см., например, [2, с. 112]) необходимые и достаточные условия принадлежности данной функции распределения области нормального притяжения данного устойчивого закона. Хорошо известно также, что каждый устойчивый закон принадлежит своей области нормального притяжения (это следует из (14)). Из этих фактов следует, что при $x \rightarrow \infty$

$$1 - G(x) = \frac{c + o(1)}{x^\gamma},$$

где c — положительное число, а отсюда следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$L = \frac{c + o(1)}{L^\gamma n^{\gamma-1}}.$$

Это доказывает неулучшаемость порядка по n первой оценки теоремы 1, поскольку γ , $s < \gamma < 2$, можно выбрать сколь угодно близким к s , $1 < s < 2$.

Пример 2. Пусть $Y_1, Y_2, \dots$ — независимые случайные величины с общей функцией распределения G , которая имеет плотность $q(x) = 0$ при $|x| < T$ и $q(x) = c/|x|^{\gamma+1}$ при $|x| \geq T$, где $2 < \gamma < 3$, а параметры T и c выбираются так, что $\int_{-\infty}^{\infty} q(x) dx = 1$ и $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 q(x) dx = 1$. Легко проверить, что эти случайные величины имеют нулевое среднее, единичную дисперсию, для любого $0 < s < \gamma$ их абсолютный момент β_s конечен и $\mathbf{P}(Y_1 \geq x) = Cx^{-\gamma}$ при $x > T$, $C = c/\gamma$. Из одного результата А. В. Нагаева (см. [4], а также [5, с. 306]) следует, что для этих случайных величин при $x/\ln x \geq \sqrt{n}$ и $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(Y_1 + \dots + Y_n \geq x) = n \mathbf{P}(Y_1 \geq x)(1 + o(1)). \quad (16)$$

Интерпретация результата А. В. Нагаева хорошо известна и довольно прозрачна: если сумма многих случайных величин превзошла очень большое число x , то, скорее всего, это связано с тем, что ровно одна из этих случайных величин превзошла число x . Из сказанного при разборе примера 1 следует, что величина $L = L(G_n, E_0)$, где G_n — функция распределения среднего арифметического $(Y_1 + \dots + Y_n)/n$, является решением уравнения $L = \mathbf{P}(Y_1 + \dots + Y_n \geq Ln)$. Левая часть этого уравнения — линейная функция переменной L , а правая при $n \geq 2$ — убывающая функция L . Графики этих функций пересекаются в единственной точке, абсцисса (и ордината) которой равна $L(G_n, E_0)$. Нетрудно понять, что нижнюю оценку величины $L = L(G_n, E_0)$ дает любое число l , для которого

$$l \leq \mathbf{P}(Y_1 + \dots + Y_n \geq ln). \quad (17)$$

Возьмем в качестве l величину $An^{-(\gamma-1)/(\gamma+1)}$, где A — положительная постоянная. Нетрудно убедиться в том, что при $2 < \gamma < 3$ неравенство

$ln/\ln(ln) \geq \sqrt{n}$, или, что то же самое, $An^{2/(\gamma+1)}/\ln(An^{2/(\gamma+1)}) \geq \sqrt{n}$, будет выполнено для любой постоянной A при всех достаточно больших n . Согласно (16), правая часть (17) при указанном выборе l и $n \rightarrow \infty$ есть

$$n \mathbf{P}(Y_1 \geq ln)(1 + o(1)) = Cn \frac{1}{(ln)^\gamma} (1 + o(1)),$$

и очевидно, что неравенство (17), которое при указанном выборе l можно переписать в виде

$$An^{-(\gamma-1)/(\gamma+1)} \leq Cn \left(An^{2/(\gamma+1)} \right)^{-\gamma} (1 + o(1)),$$

или, что то же самое,

$$An^{-(\gamma-1)/(\gamma+1)} \leq CA^{-\gamma} n^{-(\gamma-1)/(\gamma+1)} (1 + o(1)),$$

будет выполнено при всех достаточно больших n , если постоянная A достаточно мала.

Это доказывает неулучшаемость порядка по n оценки теоремы 2, поскольку число γ , $s < \gamma < 3$, можно выбрать сколь угодно близким к s , $2 < s < 3$.

Докажем теперь неравенство (2) при $0 < \varepsilon < 0.6$ (при этих ε правая часть (2) — монотонная функция ε). Из сказанного при разборе примеров 1 и 2 следует, что величина $L = L(\Phi^\varepsilon, E_0)$ является решением уравнения

$$L = \int_L^\infty d\Phi^\varepsilon(x). \quad (18)$$

Рассматривая графики функций (переменной L), стоящих в правой и в левой частях этого равенства, легко видеть, что верхнюю оценку величины L дает решение уравнения, в котором правая часть (18) заменена любой ее верхней оценкой. Так как

$$\int_u^\infty d\Phi^\varepsilon(x) = \int_{u/\varepsilon}^\infty \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/2} dx \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}u} e^{-u^2/(2\varepsilon^2)}$$

для любого числа $u > 0$, то решение уравнения

$$L = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}L} e^{L^2/(2\varepsilon^2)} \quad (19)$$

и любая верхняя оценка этого решения дает верхнюю оценку решения уравнения (18). Легко видеть, что верхнюю оценку решения уравнения (19) дает любое число l , для которого

$$l^2 \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} e^{-l^2/(2\varepsilon^2)}, \quad (20)$$

и легко проверить, что величина $l = \varepsilon\sqrt{2\ln\varepsilon^{-1}}$ удовлетворяет неравенству (20) при $\varepsilon \leq e^{-1/(2\sqrt{2\pi})} = 0.81\dots$. Тем самым неравенство (2) при $0 < \varepsilon < 0.6$ доказано. Аналогичные рассуждения показывают, что величина $\varepsilon\sqrt{c\ln\varepsilon^{-1}}$, где c — любое положительное число, меньшее двух, дает при достаточно малых $\varepsilon > 0$ нижнюю оценку решения уравнения (18).

Покажем теперь, что в теореме 1 условие конечности абсолютного момента порядка выше первого является, в некотором смысле, необходимым. Для этого предположим, что существует функция $u(\beta_1, n)$, $\beta_1 = \beta_1(F)$, такая, что $u(\beta_1, n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, для которой при достаточно больших n

$$L(F_n, E_0) \leq u(\beta_1, n). \quad (21)$$

Очевидно, что если (21) справедливо, то его можно применять и в схеме серий. Точнее, пусть имеется схема серий $X_j^{(n)}$, $j = 1, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$, случайные величины в каждой серии независимы, имеют общую функцию распределения $F^{(n)}$ и их абсолютный первый момент не превосходит некоторого числа B_1 . Тогда из (21) будет следовать, что

$$L(F_n^{(n)}, E_0) \leq u(B_1, n) \rightarrow 0 \quad (22)$$

при $n \rightarrow \infty$, где $F_n^{(n)}$ — функции распределения средних арифметических $(X_1^{(n)} + \dots + X_n^{(n)})/n$.

Рассмотрим схему серий, для которой функции распределения $F^{(n)}$ имеют три точки роста $-n$, 0 и n , скачки в которых суть $1/(2n)$, $1 - 1/n$ и $1/(2n)$. Очевидно, что $\beta_1(F^{(n)}) = 1$ при всех n . Ясно, что характеристические функции функций распределения $F^{(n)}$ и $F_n^{(n)}$ суть

$$f^{(n)}(t) = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cos(tn)$$

и

$$\left(f^{(n)}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}(\cos t - 1)\right)^n \rightarrow e^{\cos t - 1}$$

при $n \rightarrow \infty$. Предельная функция является характеристической функцией функции распределения Π симметризованного распределения Пуассона с параметром $\frac{1}{2}$. Поэтому $L(F_n^{(n)}, \Pi) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Отсюда следует, что $L(F_n^{(n)}, E_0)$ при всех n не меньше некоторой положительной постоянной, т.е. функция $u(B_1, n)$ в правой части (22) не может стремиться к нулю при росте n . Так как $\varkappa \geq L^2$, то для средней метрики аналог (21), где $u(\beta_1, n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, также неверен.

Скажем несколько слов о ЗБЧ в пространствах случайных величин. В соотношении (1) мы подразумевали, что случайные величины $X_1, X_2, \dots$ определены на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. На множестве случайных величин, определенных на этом вероятностном пространстве, можно рассматривать свои метрики (при

этом, как всегда, случайные величины, совпадающие с вероятностью единица, отождествляются). Среди этих метрик — расстояние по вероятности $K(X, Y) = \inf\{\varepsilon: \mathbf{P}(|X - Y| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon\}$ и средняя метрика

$$\int_{\Omega} |X(\omega) - Y(\omega)| \mathbf{P}(d\omega). \quad (23)$$

Указанные вероятностные метрики являются функционалами на множестве совместных распределений случайных величин, в [1] такие функционалы называются сложными метриками. Для каждой сложной метрики можно ввести простую вероятностную метрику, которая определяется следующим образом. Пусть X и Y — случайные величины с совместным распределением $P_{X,Y}$, и пусть P_X и P_Y — маргинальные распределения этих случайных величин. Образует точную нижнюю грань значений сложной метрики по всем совместным распределениям $P_{X,Y}$ с заданными маргинальными распределениями P_X и P_Y . Эта величина называется простой вероятностной метрикой для данной сложной метрики, она является функцией на $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ — множество распределений случайных величин. Заметим теперь, что когда одна из случайных величин, X или Y , вырождена (т.е. постоянна с вероятностью единица), то множество совместных распределений $P_{X,Y}$ с заданными маргинальными P_X и P_Y состоит из единственного распределения $P_X \times P_Y$. Таким образом, в этом случае значения простой и сложной метрик совпадают.

Хорошо известно, что простой метрикой для метрики K является метрика Леви–Прохорова, а для метрики (23) — метрика $\mathfrak{K}$. Поэтому в ЗБЧ для метрики (23) справедлива та же оценка, что и в теореме 1 для метрики $\mathfrak{K}$. В случае, когда одно из распределений является вырожденным, расстояние Леви–Прохорова не превосходит удвоенного расстояния Леви. Поэтому в ЗБЧ для расстояния по вероятности справедливы удвоенные оценки для метрики Леви из теорем 1 и 2.

Заканчивая эту работу, отметим, что она является расширенным изложением части доклада, сделанного автором на Большом семинаре кафедры теории вероятностей МГУ 17 октября 2007 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Золотарев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986, 415 с.
2. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
3. *Senatov V. V.* Normal Approximation: New Results, Methods and Problems. Utrecht: VSP, 1998, 363 p.
4. *Нагаев А. В.* Предельные теоремы, учитывающие большие отклонения, при нарушении условия Крамера. — Изв. АН УзССР, 1969, № 6, с. 17–22.
5. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 414 с.

Поступила в редакцию
14.XI.2007