Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Сердюкова, Зависимость сложности аппроксимации случайных полей от размерности, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 2, 256–270

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2700>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 18:20:08

© 2009 г.

СЕРДЮКОВА Н. А.*

ЗАВИСИМОСТЬ СЛОЖНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ
СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ ОТ РАЗМЕРНОСТИ¹⁾

В настоящей статье рассматривается ε -аппроксимация d -параметрических случайных полей тензорного типа частичными суммами ряда, соответствующего разложению Карунена–Лоева. При $d \rightarrow \infty$ изучено поведение информационной сложности $n(\varepsilon, d)$ аппроксимации с ошибкой, не превосходящей заданный уровень ε . Недавно М. А. Лифшицем и Е. В. Туляковой было доказано, что в рассматриваемой задаче наблюдается феномен «проклятия размерности». Целью данной статьи является получение точного асимптотического выражения для информационной сложности $n(\varepsilon, d)$.

Ключевые слова и фразы: случайные поля, гауссовские процессы, ошибка линейной аппроксимации, сложность, проклятие размерности.

1. Введение. Пусть T — некоторое параметрическое множество. Предположим, что случайная функция $X(t)$, $t \in T$, допускает представление в виде ряда

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t),$$

где ξ_k — случайные величины, φ_k — детерминированные вещественные функции, а ряд сходится в среднем квадратическом при каждом $t \in T$. Более точная формулировка будет дана ниже. Для каждого конечного множества натуральных чисел $K \subset \mathbf{N}$ обозначим $X_K(t) = \sum_{k \in K} \xi_k \varphi_k(t)$. При решении многих задач бывает необходимо аппроксимировать X , например в L_2 , процессом конечного ранга X_K , в связи с чем возникают естественные вопросы: какого размера должно быть множество K , чтобы обеспечить заданную точность аппроксимации? Среди всех множеств K заданного размера, множество какого вида обеспечит наименьшую ошибку?

В настоящей статье мы ответим на первый из поставленных вопросов применительно к определенному классу случайных функций, а

* Weierstrass-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, Mohrenstr. 39, 10117 Berlin, Germany, e-mail: serdyuko@wias-berlin.de

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-01-00911) и РФФИ-ННИО (грант № 04-01-04000).

именно, применительно к случайным полям «тензорного» типа с параметрическими множествами высокой размерности. Поле типа «тензорного произведения» будем называть сепарабельное с нулевым средним случайное поле $X = \{X(t)\}_{t \in T}$, $T \subset \mathbf{R}^d$, с «прямоугольным» параметрическим множеством T и ковариационной функцией $\mathcal{K}^{(d)}$, допускающими представление в виде произведения одинаковых сомножителей. А именно, $T = [0, 1]^d$ и

$$\mathcal{K}^{(d)}(s, t) = \prod_{l=1}^d \mathcal{K}_l(s_l, t_l) \quad (1)$$

для любых $s = (s_1, \dots, s_d)$, $t = (t_1, \dots, t_d)$, где $s_l, t_l \in [0, 1]$. Очевидно, что интегральный оператор с ядром (1) является тензорным произведением интегральных операторов с ядрами $\mathcal{K}_l(s_l, t_l)$.

Пусть неотрицательная последовательность $\{\lambda(i)\}_{i \geq 1}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)^2 < \infty, \quad (2)$$

и пусть функции $\{\varphi_i\}_{i > 0}$ образуют полную ортонормированную систему в $L_2[0, 1]$. Рассмотрим семейство случайных полей типа «тензорного произведения»

$$\mathbf{X} = \{X^{(d)}(t), t \in [0, 1]^d\}, \quad d = 1, 2, \dots \quad (3)$$

В силу многопараметрического разложения Карунена–Лозва (см., например, [1]) семейство (3) может быть задано сходящимся п.н. в $L_2([0, 1]^d)$ рядом

$$\begin{aligned} X^{(d)}(t) &= \sum_{k \in \mathbf{N}^d} \xi_k \prod_{l=1}^d \lambda(k_l) \prod_{l=1}^d \varphi_{k_l}(t_l) \\ &= \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_d=1}^{\infty} \xi_{k_1, \dots, k_d} \lambda(k_1) \cdots \lambda(k_d) \varphi_{k_1}(t_1) \cdots \varphi_{k_d}(t_d), \end{aligned} \quad (4)$$

$t = (t_1, \dots, t_d) \in [0, 1]^d$, где $\{\xi_k\}$ — массив некоррелированных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией, а $\lambda(k_l)^2$ и φ_{k_l} являются собственными значениями и собственными функциями семейства интегральных уравнений

$$\lambda(k_l)^2 \varphi_{k_l}(t_l) = \int_0^1 \mathcal{K}_l(s_l, t_l) \varphi_{k_l}(s_l) ds_l, \quad t_l \in [0, 1], \quad l = 1, \dots, d,$$

соответствующих «маргинальным» ковариационным операторам. Очевидно, что если выполнено условие (2), то траектории $X^{(d)}$ принадлежат

$L_2([0, 1]^d)$ п.н. и система собственных чисел ковариационного оператора $X^{(d)}$ имеет вид

$$\lambda_k^2 = \prod_{l=1}^d \lambda(k_l)^2, \quad k \in \mathbf{N}^d. \quad (5)$$

Как было отмечено в работе [27], разложение Карунена–Лозва, или каноническое представление, случайной функции было предложено независимо Д. Д. Косамби [21], М. Лозвом [23], К. Каруненом [19], [20], А. М. Обуховым [24] и В. С. Пугачевым [25].

В дальнейшем мы опускаем индекс d и пишем $X(t)$ вместо $X^{(d)}(t)$. Для любого $n > 0$ обозначим через X_n частичные суммы ряда (4), отвечающие n максимальным собственным числам. Нас интересует асимптотическое поведение ошибки аппроксимации в среднем процесса X посредством X_n , а именно,

$$e(X, X_n; d) := \left(\mathbf{E} \|X - X_n\|_{L_2(T)}^2 \right)^{1/2}, \quad d \rightarrow \infty.$$

Далее мы будем рассматривать только $L_2(T)$ -нормы, поэтому под символом $\|\cdot\|$ всегда будем подразумевать $\|\cdot\|_{L_2(T)}$. Хорошо известно (см., например, [6], [14] или [26]), что X_n обеспечивает минимальную, среди всех линейных аппроксимаций порядка n , среднеквадратичную ошибку.

Поскольку мы собираемся исследовать *семейство* случайных функций, то более естественно изучать *относительные* ошибки, т.е. сравнивать величину ошибки с величиной самой функции.

Обозначим

$$\Lambda := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)^2,$$

тогда

$$\mathbf{E} \|X\|^2 = \sum_{k \in \mathbf{N}^d} \lambda_k^2 = \Lambda^d.$$

Определим относительную сложность среднеквадратичной аппроксимации следующим образом:

$$n(\varepsilon, d) := \min \left\{ n: \frac{e(X, X_n; d)}{(\mathbf{E} \|X\|^2)^{1/2}} \leq \varepsilon \right\} = \min \{ n: \mathbf{E} \|X - X_n\|^2 \leq \varepsilon^2 \Lambda^d \}.$$

Заметим, что интересующее нас поведение сложности аппроксимации $n(\varepsilon, d)$ принадлежит к классу проблем, связанных с изучением зависимости сложности линейных многопараметрических задач от размерности (см. работы [30]–[33] и приведенные там ссылки).

Для изучения свойств (детерминированного!) массива собственных чисел (5) в [15] было предложено использовать вспомогательную вероятностную конструкцию. Мы также будем придерживаться этого подхода.

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{U_l\}$, $l = 1, 2, \dots$, общее распределение которых задано формулой

$$\mathbf{P}(U_l = -\ln \lambda(i)) = \frac{\lambda(i)^2}{\Lambda}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Если выполнено условие

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\ln \lambda(i)|^3 \lambda(i)^2 < \infty, \quad (7)$$

то, очевидно, $\mathbf{E}|U_l|^3 < \infty$.

Обозначим через M и σ^2 математическое ожидание и дисперсию U_l соответственно. Ясно, что

$$M = -\sum_{i=1}^{\infty} \ln \lambda(i) \frac{\lambda(i)^2}{\Lambda}, \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\ln \lambda(i)|^2 \frac{\lambda(i)^2}{\Lambda} - M^2.$$

Тогда третий центральный момент U_l задается соотношением

$$\alpha^3 := \mathbf{E}(U_l - M)^3 = -\sum_{i=1}^{\infty} (\ln \lambda(i))^3 \frac{\lambda(i)^2}{\Lambda} - 3M\sigma^2 - M^3.$$

Если выполнено (7), то $|M| < \infty$, $0 \leq \sigma^2 < \infty$ и $|\alpha| < \infty$.

В дальнейшем «взрывающийся» коэффициент

$$\mathcal{E} := \Lambda e^{2M} \quad (8)$$

будет играть значительную роль. В [15] показано, что, в силу вогнутости логарифмической функции, $\mathcal{E} > 1$, за исключением вырожденного случая, когда число положительных собственных чисел равно нулю или единице. Другими словами, $\mathcal{E} = 1$ тогда и только тогда, когда $\sigma = 0$. Мы исключим этот случай из дальнейшего рассмотрения.

В [15] получен следующий результат (теорема 3.2).

Теорема 1.1. *Предположим, что последовательность $\{\lambda(i)\}$, $i = 1, 2, \dots$, удовлетворяет условию*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\ln \lambda(i)|^2 \lambda(i)^2 < \infty.$$

Тогда для каждого $\varepsilon \in (0, 1)$ выполнено

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\ln n(\varepsilon, d) - d \ln \mathcal{E}}{\sqrt{d}} = 2q,$$

где квантиль $q = q(\varepsilon)$ есть решение уравнения

$$1 - \Phi\left(\frac{q}{\sigma}\right) = \varepsilon^2. \quad (9)$$

Авторы [15] предположили, что при более сильных условиях на последовательность $\{\lambda(i)\}$ можно доказать, что

$$n(\varepsilon, d) \approx \frac{C(\varepsilon) \mathcal{E}^d e^{2q\sqrt{d}}}{\sqrt{d}}, \quad d \rightarrow \infty.$$

Мы покажем, что выполнено даже несколько более точное утверждение.

2. Основной результат. Нам придется отдельно рассматривать два случая в зависимости от природы распределения величин U_l . Доказательство и конечный результат будут зависеть от того, является это распределение *решетчатым* или нет.

Напомним, что дискретное распределение случайной величины U называется решетчатым, если существуют такие числа a и $h > 0$, что все возможные значения U могут быть представлены в виде $a + \nu h$, где ν принимает целые значения. Число h называется шагом распределения. В дальнейшем при рассмотрении решетчатого случая мы предполагаем, что h является максимальным шагом распределения, а именно что невозможно представить все значения U_l в виде $b + \nu h_1$ с некоторыми b и $h_1 > h$.

Из (6) следует, что величины U_l имеют решетчатое распределение тогда и только тогда, когда $\lambda(i) = C e^{-n_i h}$ для некоторых положительных C , h и $n_i \in \mathbf{N}$. Мы будем называть эту ситуацию *решетчатым случаем* и будем предполагать, что h выбрано максимально возможным. В противном случае мы будем говорить, что имеет место *нерешетчатый случай*.

Теорема 2.1. Пусть последовательность $\{\lambda(i)\}$, $i = 1, 2, \dots$, удовлетворяет условию (7).

Тогда для каждого $\varepsilon \in (0, 1)$ выполнено

$$n(\varepsilon, d) = K \phi\left(\frac{q}{\sigma}\right) \mathcal{E}^d e^{2q\sqrt{d}} d^{-1/2} (1 + o(1)), \quad d \rightarrow \infty,$$

где

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad K = \begin{cases} h(\sigma(1 - e^{-2h}))^{-1} & \text{в решетчатом случае,} \\ (2\sigma)^{-1} & \text{в нерешетчатом случае,} \end{cases}$$

и квантиль $q = q(\varepsilon)$ определена в (9).

З а м е ч а н и е. 1) Мы видим, что сложность аппроксимации возрастает экспоненциально, когда $d \rightarrow \infty$. Это явление обычно называют «проклятием размерности» (curse of dimensionality) или «intractability». См., например, [26] и [31]. Понятие «проклятия размерности» восходит, по крайней мере, к работам Р. Беллмана [4].

2) По правилу Лопиталя

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{1 - e^{-2h}} = \frac{1}{2},$$

так что формулы для K согласованы между собой при $h \rightarrow 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим $\zeta = \zeta(\varepsilon, d)$ как максимальное положительное число такое, что сумма собственных чисел, меньших чем ζ^2 , удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k \in \mathbf{N}^d: \lambda_k < \zeta} \lambda_k^2 \leq \varepsilon^2 \Lambda^d.$$

Определим решетчатое множество в $\mathbf{N}^d$ следующим образом:

$$A = A(\varepsilon, d) := \{k \in \mathbf{N}^d: \lambda_k \geq \zeta\} = \left\{k \in \mathbf{N}^d: \prod_{l=1}^d \lambda(k_l) \geq \zeta\right\}.$$

Поскольку $\lambda_k > 0$ для любого $k \in A$, то

$$\begin{aligned} n(\varepsilon, d) &= \text{card}(A) = \sum_{k \in A} \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2} \\ &= \sum_{k \in \mathbf{N}^d: -\sum \ln \lambda(k_l) \leq -\ln \zeta} \Lambda^d \exp \left\{ -2 \sum_{l=1}^d \ln \lambda(k_l) \right\} \prod_{l=1}^d \mathbf{P}(U_l = -\ln \lambda(k_l)) \\ &= \Lambda^d \mathbf{E} \exp \left\{ 2 \sum_{l=1}^d U_l \right\} \mathbf{I} \left\{ \sum_{l=1}^d U_l \leq -\ln \zeta \right\}. \end{aligned}$$

Для центрированных и нормированных сумм $Z_d = (\sum_{l=1}^d U_l - dM)/(\sigma\sqrt{d})$ выполнено

$$\left\{ \sum_{l=1}^d U_l \leq -\ln \zeta \right\} = \{Z_d \leq \theta\},$$

где

$$\theta = \theta(\varepsilon, d) = -\frac{\ln \zeta + dM}{\sigma\sqrt{d}}. \quad (10)$$

Покажем теперь, что θ допускает полезную вероятностную интерпретацию в терминах случайных величин U_l и их сумм. Действительно, применяя лемму 3.1 из [15], мы имеем для любых $d \in \mathbf{N}$ и $z \in \mathbf{R}^1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbf{N}^d: \lambda_k < z} \lambda_k^2 &= \Lambda^d \mathbf{P} \left(\sum_{l=1}^d U_l > -\ln z \right) \\ &= \Lambda^d \mathbf{P} \left(Z_d > -\frac{\ln z + dM}{\sigma\sqrt{d}} \right) = \Lambda^d \mathbf{P}(Z_d > \theta_z), \end{aligned}$$

где

$$\theta_z = -\frac{\ln z + dM}{\sigma\sqrt{d}}.$$

Зафиксируем $\varepsilon \in (0, 1)$. Заметим, что $\sum_{k \in \mathbf{N}^d: \lambda_k < z} \lambda_k^2 \leq \varepsilon^2 \Lambda^d$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{P}(Z_d > \theta_z) \leq \varepsilon^2$. Поэтому величина $\theta = \theta(\varepsilon, d)$, определенная равенством (10), является $(1 - \varepsilon^2)$ -квантилью распределения Z_d , а именно,

$$\theta(\varepsilon, d) = \min\{\theta: \mathbf{P}(Z_d > \theta) \leq \varepsilon^2\} = \min\{\theta: \mathbf{P}(Z_d \leq \theta) > 1 - \varepsilon^2\}.$$

Обозначим через $q = q(\varepsilon)$ квантиль функции распределения нормального закона, выбранную из уравнения (9). Тогда, в силу центральной предельной теоремы,

$$\theta(d, \varepsilon) \rightarrow \frac{q(\varepsilon)}{\sigma}, \quad d \rightarrow \infty, \quad (11)$$

для каждого фиксированного $\varepsilon \in (0, 1)$.

Теперь мы можем вернуться к изучению сложности аппроксимации. Мы получили, что

$$\begin{aligned} n(\varepsilon, d) &= \mathcal{E}^d \mathbf{E} \exp\{2\sigma\sqrt{d}Z_d\} \mathbf{I}\{Z_d \leq \theta\} \\ &= \mathcal{E}^d \exp\{2\sigma\sqrt{d}\theta\} \int_{-\infty}^{\theta} \exp\{2\sigma\sqrt{d}(z - \theta)\} dF_d(z), \end{aligned}$$

где $F_d(z) = \mathbf{P}(Z_d < z)$ и $\mathcal{E}$ определено в (8).

Обозначим

$$\Psi_d(z) := \exp\{2\sigma\sqrt{d}(z - \theta)\}.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{-\infty}^{\theta} \Psi_d(z) d[F_d(z) - F_d(\theta)] = \int_{-\infty}^{\theta} [-F_d(z) + F_d(\theta)] d\Psi_d(z).$$

Н е р е ш е т ч а т ы й с л у ч а й. В этой части доказательства мы будем предполагать, что распределение случайных величин U_l не является решетчатым. Это имеет место в наиболее интересных случаях, таких как броуновский лист (поле Винера–Ченцова), броуновская подушка, поле Хёффдинга–Блума–Кифера–Розенблатта (см. п. 3).

В силу того, что выполнено (7), мы можем применить теорему Крамера–Эссеена (см. [10, § 42, теорема 2], [17, гл. V, § 7, теорема 21] либо [16, гл. VI, § 3, теорема 4]), откуда немедленно получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\theta} [-F_d(z) + F_d(\theta)] d\Psi_d(z) &= \int_{-\infty}^{\theta} [-\Phi(z) + \Phi(\theta)] d\Psi_d(z) \\ &\quad + \frac{\alpha^3}{6\sigma^3\sqrt{2\pi d}} \int_{-\infty}^{\theta} \left[(z^2 - 1)e^{-z^2/2} - (\theta^2 - 1)e^{-\theta^2/2} \right] d\Psi_d(z) + o\left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right) \\ &= I_1 + I_2 - I_3 - I_4 + o\left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\Phi(\cdot)$ — стандартная нормальная функция распределения и

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{-\infty}^{\theta} [-\Phi(z) + \Phi(\theta)] d\Psi_d(z), \\ I_2 &:= \frac{\alpha^3}{6\sigma^3\sqrt{2\pi d}} \int_{-\infty}^{\theta} z^2 e^{-z^2/2} d\Psi_d(z), \\ I_3 &:= \frac{\alpha^3}{6\sigma^3\sqrt{2\pi d}} \int_{-\infty}^{\theta} e^{-z^2/2} d\Psi_d(z), \\ I_4 &:= \frac{\alpha^3}{6\sigma^3\sqrt{2\pi d}} (\theta^2 - 1) e^{-\theta^2/2} \sim \frac{\alpha^3}{6\sigma^3\sqrt{2\pi d}} \left(\left(\frac{q}{\sigma} \right)^2 - 1 \right) e^{-q^2/2\sigma^2}, \quad d \rightarrow \infty \end{aligned}$$

(последнее соотношение следует из (11)). Поскольку $d\Psi_d(z) = 2\sigma\sqrt{d}\Psi_d(z) dz$, то после замены переменных I_2 примет вид

$$I_2 = I_2(d, \theta) = \frac{\alpha^3}{3\sigma^2\sqrt{2\pi d}} \int_0^{\infty} \left(\theta - \frac{y}{\sqrt{d}} \right)^2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\theta - \frac{y}{\sqrt{d}} \right)^2 \right\} \exp\{-2\sigma y\} dy,$$

где $y = -\sqrt{d}(z - \theta)$.

Для любого $d = 1, 2, \dots$ верно неравенство

$$0 \leq \left(\theta - \frac{y}{\sqrt{d}} \right)^2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\theta - \frac{y}{\sqrt{d}} \right)^2 \right\} \leq (|\theta| + y)^2.$$

Эта оценка дает нам суммируемую мажоранту, необходимую для применения теоремы Лебега. Учитывая (11) и переходя к пределу под знаком интеграла, мы получаем, что при $d \rightarrow \infty$

$$I_2(d, \theta) = \frac{\alpha^3}{6\sigma^3\sqrt{2\pi d}} \left(\frac{q}{\sigma} \right)^2 e^{-q^2/(2\sigma^2)} (1 + o(1)).$$

Аналогично,

$$I_3(d, \theta) = \frac{\alpha^3}{6\sigma^3\sqrt{2\pi d}} e^{-q^2/(2\sigma^2)} (1 + o(1)).$$

Таким образом, мы получили, что $\sqrt{d}I_4 = \sqrt{d}(I_2 - I_3)(1 + o(1))$, следовательно, $I_2 - I_3 - I_4 = o(1/\sqrt{d})$.

Рассмотрим основной интеграл I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1(d, \theta) = \int_{-\infty}^{\theta} [-\Phi(z) + \Phi(\theta)] d\Psi_d(z) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\theta} \exp \left\{ 2\sigma\sqrt{d}(z - \theta) \right\} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2} \right\} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\theta - \frac{y}{\sqrt{d}} \right)^2 \right\} \exp\{-2\sigma y\} dy \\ &\sim \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi d}} e^{-q^2/(2\sigma^2)}, \quad d \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, мы получили желаемую оценку

$$n(\varepsilon, d) = \frac{e^{\varepsilon d} \exp\{2q\sqrt{d}\}}{2\sigma\sqrt{d}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{q^2}{2\sigma^2}\right\} (1 + o(1)).$$

Решетчатый случай. Теперь мы будем действовать в предположении, что последовательность $\{U_l\}$ имеет решетчатое распределение.

Пусть случайная величина U_l принимает значения вида $\tilde{a} + \nu h$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где $\tilde{a} = M + a$ — сдвиг, а h — максимальный шаг распределения. Тогда все возможные значения суммы Z_d представимы в виде

$$\frac{da + \nu h}{\sigma\sqrt{d}}, \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Введем в рассмотрение функцию

$$S(x) = [x] - x + \frac{1}{2},$$

где $[x]$ обозначает, как обычно, целую часть x , и определим

$$S_d(x) = \frac{h}{\sigma} S\left(\frac{x\sigma\sqrt{d} - da}{h}\right).$$

Пусть $F_d(z)$ определена как прежде. Тогда если выполнено (7), то результат Эссеена (см. [10, § 43, теорема 1]) влечет равенство

$$F_d(z) - \Phi(z) = \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{S_d(z)}{\sqrt{d}} - \frac{\alpha^3(z^2 - 1)}{6\sigma^3\sqrt{d}} \right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right)$$

равномерно по z .

Сравнивая с (12), мы видим, что нам нужно оценить только дополнительное слагаемое

$$\begin{aligned} J &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \int_{-\infty}^{\theta} \left[-S_d(z)e^{-z^2/2} + S_d(\theta)e^{-\theta^2/2} \right] d\Psi_d(z) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \int_{-\infty}^{\theta} \Psi_d(z) d\left(S_d(z)e^{-z^2/2}\right) = J_1 - J_2 + J_3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \int_{-\infty}^{\theta} \Psi_d(z) S'_d(z) e^{-z^2/2} dz, \\ J_2 &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \int_{-\infty}^{\theta} \Psi_d(z) S_d(z) z e^{-z^2/2} dz \end{aligned}$$

и J_3 — «дискретная часть», которая определена следующим образом. Заметим, что $S(x)$ является периодической функцией с единичным периодом, поэтому $S_d(x)$ обладает периодом $h/(\sigma\sqrt{d})$ и имеет скачки в точках вида $\{(kh + da)/(\sigma\sqrt{d}), k \in \mathbf{Z}\}$. Если θ принадлежит этой решетке, то существует целое k' такое, что $\theta = (k'h + da)/(\sigma\sqrt{d})$. Следовательно, можно интегрировать разрывную часть интеграла J по отношению к дираковской мере $(h/\sigma)\delta_{(kh+da)/(\sigma\sqrt{d})}$. Тогда

$$J_3 := \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \frac{h}{\sigma} \sum_{k=-\infty}^{k'} \Psi_d\left(\frac{kh + da}{\sigma\sqrt{d}}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{kh + da}{\sigma\sqrt{d}}\right)^2\right\}.$$

Оценим сначала интеграл J_1 . В тех точках, где производная $S'_d(z)$ имеет смысл, можно легко вычислить, что

$$S'_d(z) = \frac{h}{\sigma} S\left(\frac{z\sigma\sqrt{d} - da}{h}\right) = -\sqrt{d}.$$

Тогда, подобно нерешетчатому случаю, по теореме Лебега мы имеем

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{-\sqrt{d}}{\sqrt{2\pi d}} \int_{-\infty}^{\theta} \exp\{2\sigma\sqrt{d}(z - \theta)\} \exp\left\{\frac{-z^2}{2}\right\} dz \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi d}} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{y}{\sqrt{d}}\right)^2\right\} \exp\{-2\sigma y\} dy \\ &\sim \frac{-1}{2\sigma\sqrt{2\pi d}} e^{-q^2/(2\sigma^2)}, \quad d \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (14)$$

следовательно, $\sqrt{d}J_1 = -\sqrt{d}I_1(1 + o(1))$.

Что касается интеграла J_2 , то он при достаточно больших d становится пренебрежимо мал. Действительно,

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \int_{-\infty}^{\theta} \exp\{2\sigma\sqrt{d}(z - \theta)\} S_d(z) z \exp\left\{\frac{-z^2}{2}\right\} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \frac{1}{\sqrt{d}} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{y}{\sqrt{d}}\right)^2\right\} \left(\theta - \frac{y}{\sqrt{d}}\right) \\ &\quad \times S_d\left(\theta - \frac{y}{\sqrt{d}}\right) \exp\{-2\sigma y\} dy \\ &\leq \frac{3h}{2\sigma d\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{y}{\sqrt{d}}\right)^2\right\} \left(\theta - \frac{y}{\sqrt{d}}\right) \exp\{-2\sigma y\} dy \\ &\sim \frac{3h}{4\sigma^2 d\sqrt{2\pi}} \left(\frac{q}{\sigma}\right)^2 e^{-q^2/(2\sigma^2)}, \quad d \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

И, разумеется, $J_2 = o(1/\sqrt{d})$.

Теперь мы перейдем к рассмотрению наиболее важного слагаемого J_3 :

$$\begin{aligned}
 J_3 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \frac{h}{\sigma} \sum_{k=-\infty}^{k'} \exp \left\{ 2\sigma\sqrt{d} \left(\frac{kh + da}{\sigma\sqrt{d}} - \theta \right) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{kh + da}{\sigma\sqrt{d}} \right)^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \frac{h}{\sigma} \sum_{k=-\infty}^{k'} \exp \{ 2h(k - k') \} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{kh + da}{\sigma\sqrt{d}} \right)^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \frac{h}{\sigma} \sum_{l=0}^{\infty} \exp \{ -2hl \} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{(k' - l)h + da}{\sigma\sqrt{d}} \right)^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \frac{h}{\sigma} \sum_{l=0}^{\infty} \exp \{ -2hl \} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\theta - \frac{lh}{\sigma\sqrt{d}} \right)^2 \right\} \\
 &\sim \frac{1}{\sigma\sqrt{d}} \frac{h}{(1 - e^{-2h})} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-q^2/(2\sigma^2)}, \quad d \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом,

$$\sqrt{d}J_3 = \sqrt{d} \frac{2h}{(1 - e^{-2h})} I_1(1 + o(1)).$$

Объединяя оценки (13), (14) и (15), мы получаем

$$n(\varepsilon, d) = \frac{e^d e^{2q\sqrt{d}}}{\sigma\sqrt{d}} \frac{h}{(1 - e^{-2h})} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-q^2/(2\sigma^2)} (1 + o(1)), \quad d \rightarrow \infty.$$

Теорема 2.1 доказана.

3. Приложение. Примеры случайных полей типа «тензорного произведения». Приведем примеры полей, к которым может быть применен полученный общий результат.

Поле Винера–Ченцова. Поле Винера–Ченцова $W^{(d)}$ называется (см. [22]) гауссовская случайная функция с нулевым средним и ковариационной функцией, равной произведению ковариационных функций, соответствующих стандартному броуновскому движению W :

$$\mathcal{K}_W^{(d)}(s, t) = \prod_{l=1}^d \min\{s_l, t_l\}, \quad s = (s_1, \dots, s_d), \quad t = (t_1, \dots, t_d) \in T.$$

Поэтому «маргинальные» собственные числа имеют вид

$$\lambda_W(i)^2 = \frac{1}{(\pi(i - 1/2))^2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Броуновская подушка. Броуновской подушкой $B^{(2)}$ называется гауссовская случайная функция с нулевым средним и ковариационной функцией, равной произведению ковариационных функций двух независимых стандартных броуновских мостов $B(t) = W(t) - tW(1)$, а именно,

$$\mathcal{K}_B^{(2)}(s, t) = \prod_{l=1}^2 (\min\{s_l, t_l\} - s_l t_l), \quad s, t \in [0, 1]^2.$$

Соответственно, «маргинальные» собственные числа (см. [2]) равны

$$\lambda_B(i)^2 = (\pi i)^{-2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

В англоязычной литературе чаще чем «Brownian pillow» или «Wiener pillow» используются термины «completely tucked Brownian sheet» (см. [28]) или «tied-down Kiefer process» (см. [7]). Дж. Блум, Дж. Кифер и М. Розенблатт в работе [5] ввели броуновскую подушку (а также ее обобщение на случай $d > 2$) как предельное распределение некоторого функционала от эмпирического процесса, используемого при непараметрическом тестировании независимости, — так называемого «independence empirical process» (см. [28]). Поэтому d -параметрическое обобщение броуновской подушки часто называют процессом Хёффдинга–Блума–Кифера–Розенблатта (см., например, [13]). Упоминание имени Хёффдинга в названии процесса связано с тем, что в [5] изучался тест, эквивалентный ранее предложенному В. Хёффдингом в [12]. Однако предельное распределение, вид ковариационной функции, собственные числа и собственные функции соответствующего интегрального уравнения были получены именно в [5]. Многомерные обобщения броуновской подушки изучались в [9] и в [8].

Центрированные гауссовские процессы. В некоторых статистических задачах бывает удобно использовать центрированные эмпирические процессы и соответствующие им предельные гауссовские процессы.

Для произвольного гауссовского процесса $X = \{X(t), t \in [0, 1]\}$ определим центрированный процесс X^c как

$$X^c(t) := X(t) - \int_0^1 X(u) du.$$

Центрированный броуновский мост B^c , известный в литературе также как процесс Ватсона, был введен в [29] для непараметрической проверки гипотезы согласия на круге. Ватсон показал, что ковариационная функция центрированного броуновского моста задается формулой

$$\mathcal{K}_{B^c}(s, t) = \min\{s, t\} - st + \frac{1}{2}(s^2 + t^2 - s - t) + \frac{1}{12}, \quad s, t \in [0, 1],$$

а ковариационный оператор с таким ядром обладает «двойным спектром», т.е.

$$\lambda_{B^c}(2i)^2 = \lambda_{B^c}(2i-1)^2 = (2\pi i)^{-2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Ковариационная функция централизованного броуновского движения W^c имеет вид

$$\mathcal{K}_{W^c}(s, t) = \min\{s, t\} + \frac{1}{2}(s^2 + t^2) - s - t + \frac{1}{3}, \quad s, t \in [0, 1],$$

а его собственные числа совпадают с собственными числами стандартного броуновского моста, т.е.

$$\lambda_{W^c}(i)^2 = \lambda_B(i)^2 = (\pi i)^{-2}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

что согласуется с известным равенством по распределению L_2 -норм броуновского моста и централизованного броуновского движения (см. [3]).

Центрированный интегрированный броуновский мост

$$\check{B}(t) = \bar{B}(t) - \int_0^1 \bar{B}(u) du,$$

где $\bar{B}(t) = \int_0^t B(u) du$, $t \in [0, 1]$, изучался в контексте проверки гипотезы согласия и асимптотики малых отклонений относительно L_2 -нормы в [11] и [3], где были найдены его ковариационная функция

$$\mathcal{K}_{\check{B}}(s, t) = \frac{st \min\{s, t\}}{2} - \frac{\min\{s, t\}^3}{6} - \frac{(st)^2}{4} - \frac{s^2 + t^2}{6} - \frac{s^4 + t^4}{24} + \frac{s^3 + t^3}{6} + \frac{1}{45},$$

$s, t \in [0, 1]$, и собственные числа $\lambda_{\check{B}}(i)^2 = (\pi i)^{-4}$, $i = 1, 2, \dots$.

Многопараметрические обобщения процесса Андерсона–Дарлингга. «Тензорным произведением» процессов Андерсона–Дарлингга $A^{(d)}(t)$, $t \in [0, 1]^d$, называется гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией

$$\mathcal{K}_A^{(d)}(s, t) = \prod_{l=1}^d \frac{\min\{s_l, t_l\} - s_l t_l}{\sqrt{s_l(1-s_l)}\sqrt{t_l(1-t_l)}}, \quad s_l, t_l \in [0, 1].$$

Собственные числа его ковариационного оператора имеют вид

$$\lambda_k^2 = \prod_{l=1}^d \frac{1}{k_l(k_l + 1)}, \quad k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbf{N}^d.$$

В одномерном случае процесс Андерсона–Дарлингга совпадает по распределению с $B(t)/\sqrt{t(1-t)}$, $t \in [0, 1]$, и был определен в [2] в контексте проверки гипотезы согласия. Т. Андерсон и Д. Дарлинг нашли его ковариационную функцию и точный спектр.

В [18] введено другое многопараметрическое обобщение процесса Андерсона–Дарлинга, определенное как гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией

$$\mathcal{K}_A^\mu(s, t) = \left(\frac{\min\{s, t\} - st}{\sqrt{s(1-s)}\sqrt{t(1-t)}} \right)^\mu, \quad s, t \in [0, 1], \quad \mu > 0.$$

Собственные числа его ковариационного оператора задаются соотношением

$$\lambda_{\mu, j}^2 = \frac{\mu}{(\mu + j - 1)(\mu + j)}, \quad j = 1, 2, \dots$$

При целых положительных значениях параметра μ так определенное поле (точнее, квадрат его L_2 -нормы) оказывается предельным распределением для статистик типа Крамера–фон Мизеса.

Настоящая статья была частично написана во время пребывания автора в Институте математической стохастики Университета Георга Августа, Гёттинген. Хочется особенно поблагодарить профессора М. А. Лифшица за постановку данной задачи и постоянную поддержку, а также профессора М. Денкера за содействие и обеспечение прекрасных условий для работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Adler R. J.* An Introduction to Continuity, Extrema, and Related Topics for General Gaussian Processes. Hayward: IMS, 1990, 160 p. (IMS Lecture Notes Monogr. Ser., v. 12.)
2. *Anderson T. W., Darling D. A.* Asymptotic theory of certain «goodness of fit» criteria based on stochastic processes. — *Ann. Math. Statist.*, 1952, v. 23, p. 193–212.
3. *Beghin L., Nikitin Ya., Orsingher E.* Exact small ball constants for some Gaussian processes under L^2 -norm. — *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2003, т. 298, с. 5–21.
4. *Bellman R.* Adaptive Control Processes: a Guided Tour. Princeton: Princeton Univ. Press, 1961, 255 p.
5. *Blum J. R., Kiefer J., Rosenblatt M.* Distribution free tests of independence based on the sample distribution function. — *Ann. Math. Statist.*, 1961, v. 32, № 2, p. 485–498.
6. *Buslaev A. P., Seleznev O. V.* On certain extremal problems in the theory of approximation of random processes. — *East J. Approx.*, 1999, v. 5, № 4, p. 467–481.
7. *Csörgő M., Horváth L.* Limit Theorems in Change-point Analysis. Chichester: Wiley, 1997, 414 p.
8. *Deheuvels P.* An asymptotic decomposition for multivariate distribution-free tests of independence. — *J. Multivariate Anal.*, 1981, v. 11, p. 102–113.
9. *Dugue D.* Sur des tests d'indépendance «indépendants de la loi». — *C. R. Acad. Sci.*, 1975, v. 281, p. 1103–1104.
10. *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.–Л.: ГТТИ, 1949, 264 с.
11. *Henze N., Nikitin Ya. Yu.* A new approach to goodness-of-fit testing based on the integrated empirical process. — *J. Nonparametr. Statist.*, 2000, v. 12, p. 391–416.
12. *Hoeffding W.* A non-parametric test of independence. — *Ann. Math. Statist.*, 1948, v. 19, p. 546–557.
13. *Koning A. J., Protasov V.* Tail behaviour of Gaussian processes with applications to the Brownian pillow. — *J. Multivariate Anal.*, 2003, v. 87, № 2, p. 370–397.

14. *Kühn T., Linde W.* Optimal series representation of fractional Brownian sheets. — Bernoulli, 2002, v. 8, № 5, p. 669–696.
15. *Lifshits M. A., Tulyakova E. V.* Curse of dimensionality in approximation of random fields. — Probab. Math. Statist., 2006, v. 26, № 1, p. 97–112.
16. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
17. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 320 с.
18. *Pycke J.-R.* Multivariate extensions of the Anderson–Darling process. — Statist. Probab. Lett., 2003, v. 63, № 4, p. 387–399.
19. *Karhunen K.* Zur Spektraltheorie stochastischer Prozesse. — Ann. Acad. Sci. Fennicae, 1946, № 34, p. 1–7.
20. *Karhunen K.* Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Ann. Acad. Sci. Fennicae, 1947, № 37 p. 3–79.
21. *Kosambi D. D.* Statistics in function space. — J. Indian Math. Soc. (N.S.), 1943, v. 7, p. 76–88.
22. *Луфшиц М. А.* Гауссовские случайные функции. Киев: ТВиМС, 1995, 246 с.
23. *Loève M.* Fonctions aléatoires de second ordre. — Revue Sci., 1946, v. 84, p. 195–206.
24. *Обухов А. М.* Статистическое описание непрерывных полей. — Труды Геофиз. ин-та АН СССР, 1954, № 24 (151), p. 3–42.
25. *Пугачев В. С.* Общая теория корреляции случайных функций. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1953, т. 17, № 5, с. 401–420.
26. *Ritter K.* Average-case analysis of numerical problems. — Lecture Notes in Math., 2000, v. 1733, p. 1–254.
27. *Sabelfeld K.* Expansion of random boundary excitations for elliptic PDEs. — Monte Carlo Methods Appl., 2007, v. 13, № 5–6, p. 405–453.
28. *van der Vaart A. W., Wellner J. A.* Weak Convergence and Empirical Processes with Applications to Statistics. New York: Springer-Verlag, 1996, 508 p. (Springer Series in Statistics.)
29. *Watson G. S.* Goodness-of-fit tests on a circle. — Biometrika, 1961, v. 48, p. 109–114.
30. *Woźniakowski H.* Average case complexity of linear multivariate problems. Part I: Theory. Part II: Applications. — J. Complexity, 1992, v. 8, № 4, p. 337–372; p. 373–392.
31. *Woźniakowski H.* Tractability and strong tractability of linear multivariate problems. — J. Complexity, 1994, v. 10, № 1, p. 96–128.
32. *Woźniakowski H.* Tractability and strong tractability of multivariate tensor product problems. — J. Computing and Information, 1994, v. 4, p. 1–19.
33. *Woźniakowski H.* Tractability of multivariate problems for weighted spaces of functions. — Approximation and Probability. Warsaw: Polish Acad. Sci., 2006, p. 407–427. (Banach Center Publ., v. 72.)

Поступила в редакцию
15.I.2007

Исправленный вариант
30.VII.2008