Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Топчий, Время вырождения срезаемых на высоком уровне процессов Гальтона–Ватсона, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 2, 271–287

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2702>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 13:47:31

© 2009 г.

ТОПЧИЙ В. А.*

ВРЕМЯ ВЫРОЖДЕНИЯ СРЕЗАЕМЫХ НА ВЫСОКОМ
УРОВНЕ ПРОЦЕССОВ ГАЛЬТОНА–ВАТСОНА¹⁾

Изучено среднее время попадания в поглощающее состояние цепей Маркова, порождаемых надкритическими ветвящимися процессами Гальтона–Ватсона с уничтожением частиц, превышающих большое фиксированное число. Установлена взаимосвязь компонент таких процессов с докритическими процессами. Для последних, начинающихся с большого числа частиц, получена асимптотика всех моментов для времени вырождения.

Ключевые слова и фразы: надкритические и докритические процессы Гальтона–Ватсона; время вырождения; ветвящиеся процессы, начинающиеся с большого числа частиц.

1. Постановка задачи. Основные результаты. Пусть $X_n(m)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, — надкритический ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона, начинающийся с $m \in \mathbf{N}$ частиц, т.е. $X_0(m) = m$, $X_n(m) = \sum_{j=1}^{X_{n-1}(m)} \xi_{j,n}$ при $n \in \mathbf{N}$, где $\xi_{j,n}$ — независимые в совокупности, одинаково распределенные случайные величины при всех парах натуральных индексов, интерпретируемые как численность потомства частиц с производящей функцией $f(z) = \mathbf{E} z^{\xi_{1,1}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^j$, средним $\mathbf{E} \xi_{j,n} = f'(1) \stackrel{\text{def}}{=} A > 1$ и дисперсией $\sigma^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{D} \xi_{j,n} < \infty$. Всюду далее функция $f(z)$ одна и та же, символ $\stackrel{\text{def}}{=}$ означает определение для левой части, $\stackrel{\text{d}}{=}$ — совпадение распределений случайных величин, разделяемых им, а нижние подписи при сравнении выражений — смысл или условия их выполнения, $[t] \stackrel{\text{def}}{=} \max(n \in \mathbf{Z} | n \leq t)$ — целая часть числа, а $\{t\} \stackrel{\text{def}}{=} t - [t]$ — дробная часть, $\mathbb{I}_{\{A\}}$ — индикатор события A . Пусть $f(0) > 0$, а $q \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(1) = 0) \in (0, 1)$ — вероятность вырождения процесса $X_n(1)$. Из [1] (гл. I, §3) известно, что q является единственным на интервале $(0, 1)$ решением уравнения $f(q) = q$, кроме того,

* Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, ул. Певцова, 13, 644099 Омск, Россия; e-mail: topchij@iitam.omsk.net.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантами: РФФИ-NWO 047.016.013, РФФИ 06-01-00127, НШ-3695.2008.1.

верно представление $X_n \stackrel{\text{def}}{=} X_n(k) = \sum_{j=1}^k X_n^{(j)}(1)$, где ветвящиеся процессы $X_n^{(j)}(1)$ являются независимыми стохастическими копиями $X_n(1)$, а следовательно, для $\mathbf{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0) \stackrel{\text{def}}{=} q_1$ получаем

$$q_1 = \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^k \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n^{(j)}(1) = 0 \right\}\right) = \prod_{j=1}^k \mathbf{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n^{(j)}(1) = 0\right) = q^k. \quad (1)$$

Обозначим через $\underline{Z}_n^{(l)}(m)$ срезанный на уровне l надкритический ветвящийся процесс, начинающийся с $m \leq l$ частиц, с тем же распределением численности потомства, т.е.

$$\underline{Z}_0^{(l)} = m, \quad \underline{Z}_n^{(l)}(m) = \min\left(l, \sum_{j=1}^{\underline{Z}_{n-1}^{(l)}(m)} \xi_{j,n}\right).$$

$\underline{Z}_n^{(l)}(m)$ является цепью Маркова с конечным числом состояний.

Исследуем $Z_n \stackrel{\text{def}}{=} \underline{Z}_n^{(k)}(k)$. Построим Z_n и X_n на общем вероятностном пространстве. Обозначим $D_n = \{X_n = Z_n > 0\}$, а для условного процесса $\widetilde{X}_m^n \stackrel{\text{def}}{=} X_m | D_n$ при $m \geq n$ считаем, что в X_m и Z_m случайные величины $\xi_{j,m}$, $m > n$, $j > 0$, одни и те же при $j \leq Z_{m-1}$. Формально частицы в X_{m-1} нумеруются произвольным образом и мы требуем, чтобы частицы из Z_{m-1} имели меньшие номера, а срезка производится равномерно. Иначе говоря, ветвящийся процесс $\widetilde{X}_m^n$ начинается в момент n с Z_n частиц и состоит из двух частей: процесса Z_m и добавки ветвящихся процессов, порождаемых срезанными на уровне k частицами при построении Z_m в момент их срезки.

Определим случайные события $\mathcal{A}_{k,n} \stackrel{\text{def}}{=} \{X_n = k, \lim_{m \rightarrow \infty} \widetilde{X}_m^n = \infty\}$ и $\mathcal{B}_{k,n} \stackrel{\text{def}}{=} \{X_n = k, \lim_{m \rightarrow \infty} \widetilde{X}_m^n = 0\}$ и условные случайные величины:

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{A}_{l,n}}^X &\stackrel{\text{def}}{=} \min(s: \widetilde{X}_{n+j}^n < k \text{ для } 1 < j < s, \widetilde{X}_{n+s}^n \geq k | \mathcal{A}_{l,n}) \text{ при } l \leq k; \\ \tau_{\mathcal{A}_{l,n}}^Z &\stackrel{\text{def}}{=} \min(s: Z_{n+j} < k \text{ для } 1 < j < s, Z_{n+s} = k | \mathcal{A}_{l,n}) \text{ при } l \leq k; \\ \tau_{\mathcal{B}_{k,n}}^X &\stackrel{\text{def}}{=} \min(j: \widetilde{X}_{n+j}^n = 0, j > 0 | \mathcal{B}_{k,n}); \\ \tau_{\mathcal{B}_{k,n}}^Z &\stackrel{\text{def}}{=} \min(j: Z_{n+j} = 0, j > 0 | \mathcal{B}_{k,n}). \end{aligned}$$

Из этих определений и теоремы 6.2 в [2, гл. I] легко вывести, что:

- (а) $\widetilde{X}_m^n \geq Z_m$ и для этих процессов $\tau_{\mathcal{A}_{k,n}}^X \stackrel{\text{п.н.}}{=} \tau_{\mathcal{A}_{k,n}}^Z \stackrel{\text{п.н.}}{<} \infty$ и $\tau_{\mathcal{B}_{k,n}}^Z \stackrel{\text{п.н.}}{\leq} \tau_{\mathcal{B}_{k,n}}^X \stackrel{\text{п.н.}}{<} \infty$;
- (б) $\widetilde{X}_m^n = Z_m$ для $n \leq m < \tau_{\mathcal{A}_{k,n}}^X + n$ при условии $\mathcal{A}_{k,n}$;
- (с) $\mathcal{A}_{k,n} \mathcal{B}_{k,n} = \emptyset$ и $\mathbf{P}(\mathcal{A}_{k,n}) + \mathbf{P}(\mathcal{B}_{k,n}) = 1$, а в силу (1) выполнены равенства $\mathbf{P}(\mathcal{B}_{k,n}) = q_1 = q^k$.

Пусть $\bar{X}_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{l>n} X_l$, $\bar{Z}_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{l>n} Z_l$ и $\tau_k(n) \stackrel{\text{def}}{=} \min(j: Z_{n+j} = 0 \mid Z_n = k)$. Вероятности последних событий и распределения случайных величин для однородных по времени процессов не зависят от n , поэтому $\mathbf{E} \tau_k(n) \equiv \mathbf{E} \tau_k(0)$, $\mathbf{E} \tau_{\mathcal{A}_{k,n}}^Z \equiv \mathbf{E} \tau_{\mathcal{A}_{k,0}}^Z$, $\mathbf{E} \tau_{\mathcal{B}_{k,n}}^Z \equiv \mathbf{E} \tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^Z$. Эти моменты для конечной цепи Маркова ограничены, хотя и зависят от k . Опишем их равномерные по k оценки и асимптотическое поведение.

Для зависящего от времени уровня срезки критерий почти намерное вырождения процесса доказан в [3]. Траектории Z_n порождают последовательность независимых событий $\widetilde{\mathcal{A}}_{k,*} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_{k,*} \cup \{\mathcal{B}_{k,*} \cap \{\bar{Z}_* = k\}\}$ с $\mathbf{P}(\widetilde{\mathcal{A}}_{k,*}) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \tilde{q}_1$ до первого появления события $\widetilde{\mathcal{B}}_{k,*} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{B}_{k,*} \cap \{\bar{Z}_* < k\}$ с $\mathbf{P}(\mathcal{B}_{k,*}) = \tilde{q}_1$. Здесь символ $*$ нужно последовательно заменять на случайные моменты возвращений на уровень k . Событиям $\widetilde{\mathcal{A}}_{k,*}$ соответствуют интервалы $\tau_{\mathcal{A}_{k,*}}^Z = \tau_{\mathcal{A}_{k,*}}^Z \mathbb{I}_{\{\mathcal{A}_{k,*}\}} + \tau_{\mathcal{B}_{k,*}}^Z \mathbb{I}_{\{\mathcal{B}_{k,*}, \bar{Z}_* = k\}}$, где траектория Z_n начинается с уровня k , затем находится ниже и возвращается на него. Пусть $\tau_{\mathcal{B}_{k,*}}^Z = (\tau_{\mathcal{B}_{k,*}}^Z \mid \bar{Z}_* < k)$ — время попадания траектории в нуль без возвращения на уровень k , а ν — случайное число событий $\widetilde{\mathcal{A}}_{k,*}$ до первого появления $\widetilde{\mathcal{B}}_{k,*}$. Тогда $\mathbf{P}(\nu = m) = (1 - \tilde{q}_1)^m \tilde{q}_1$, $m \geq 0$, а время до появления события $\widetilde{\mathcal{B}}_{k,*}$ равно $T = \sum_{j=1}^{\nu} \eta_j$, где η_j независимы и $\eta_j \stackrel{\text{d}}{=} \tau_{\mathcal{A}_{k,0}}^Z$. Легко вычислить $\mathbf{E} \nu = (1 - \tilde{q}_1)(\tilde{q}_1)^{-1}$ и $\mathbf{D} \nu = (1 - \tilde{q}_1)(\tilde{q}_1)^{-2}$. Доказываемое далее соотношение (46) в развернутой форме имеет вид $\mathbf{E}(\mathbb{I}_{\{\bar{Z}_0 = k\}} \mid \mathcal{B}_{k,0}) \leq \sigma_q^2 / (k(1 - f'(q))^3)$, где σ_q^2 — некоторая постоянная, следовательно, $\tilde{q}_1 = q^k(1 + O(k^{-1}))$ при $k \rightarrow \infty$.

Теорема 1. Если $f(0) > 0$,

$$\tilde{b} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}(\tau_{\mathcal{B}_{k,n}}^Z \mid \bar{Z}_n < k) = \mathbf{E} \tau_{\mathcal{B}_{k,n}}^Z \quad \text{и} \quad \tilde{a} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E} \tau_{\mathcal{A}_{k,n}}^Z,$$

то

$$E_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E} \tau_k(0) = \frac{1 - \tilde{q}_1}{\tilde{q}_1} \tilde{a} + \tilde{b} \underset{k \rightarrow \infty}{=} q^{-k}(1 + O(\sqrt{k^{-1}} \ln k)), \quad (2)$$

$$\mathbf{E} \tau_{\mathcal{B}_{k,n}}^Z \underset{k \rightarrow \infty}{=} \tilde{b} + O(\sqrt{k^{-1}} \ln k) \underset{k \rightarrow \infty}{=} -\frac{\ln k}{\ln f'(q)} + O(1), \quad (3)$$

$$\tilde{a} = \mathbf{E} \tau_{\mathcal{A}_{k,n}}^Z + \mathbf{E}(\tau_{\mathcal{B}_{k,n}}^Z \mid \bar{Z}_n = k) \underset{k \rightarrow \infty}{=} 1 + O(\sqrt{k^{-1}} \ln k), \quad (4)$$

а для условных дисперсий времени вырождения верны соотношения

$$\mathbf{D} \tau_{\mathcal{B}_{k,n}}^Z \underset{k \rightarrow \infty}{=} \mathbf{D}(\tau_{\mathcal{B}_{k,n}}^Z \mid \bar{Z}_n < k) + O\left(\frac{\ln^2 k}{\sqrt{k}}\right) \underset{k \rightarrow \infty}{=} -\frac{2 \ln k}{\ln f'(q)} + O(1). \quad (5)$$

Доказательство соотношения (2) довольно просто. По определению $\tau_*(\cdot)$,

$$\tau_k(0) \stackrel{\text{d}}{=} \tau_{\mathcal{A}_{k,0}}^Z \mathbb{I}_{\{\widetilde{\mathcal{A}}_{k,0}\}} + \tau_k\left(\tau_{\mathcal{A}_{k,0}}^Z\right) \mathbb{I}_{\{\widetilde{\mathcal{A}}_{k,0}\}} + \tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^Z \mathbb{I}_{\{\widetilde{\mathcal{B}}_{k,0}\}}, \quad (6)$$

где $\tau_k(\tau_{\mathcal{A}_{k,0}}^Z) \stackrel{d}{=} \tau_k(0)$, а $\tau_k(\tau_{\mathcal{A}_{k,0}}^Z)$ и $\mathbb{I}_{\{\tilde{\mathcal{A}}_{k,0}\}}$ независимы. Из (6), вычисляя средние для условных распределений, получаем $E_k = \tilde{a}(1 - \tilde{q}_1) + E_k(1 - \tilde{q}_1) + \tilde{b}\tilde{q}_1$, что с учетом (3) и (4) влечет (2).

2. Свойства времени вырождения докритических ветвящихся процессов, начинающихся с большого числа частиц.

Процесс $\widetilde{X_{n+s}^n}$ при условии $\mathcal{B}_{k,n}$ при всех целых $n \geq 0$ совпадает по распределению с $U_s(k) \stackrel{\text{def}}{=} X_s(k) | \mathcal{B}_{k,0}$ и с вероятностью 1 вырождается за конечное время. Согласно [1, гл. I, теорема 12.3 и доказательство теоремы 8.1] процесс $U_s(k)$ будет докритическим с производящей функцией числа непосредственных потомков одной частицы $g(z) = q^{-1}f(qz) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} g_m z^m$, средним $A_q \stackrel{\text{def}}{=} g'(1) = f'(q) < 1$ и дисперсией $\sigma_q^2 \stackrel{\text{def}}{=} qf''(q) + f'(q) - (f'(q))^2 < \infty$ даже при $\sigma^2 = \infty$ (дисперсия конечна). Для $U_s(k)$ обозначим численность потомства частицы через $q\xi_{j,n}$, тогда $g(z) = \mathbf{E} z^{q\xi_{1,1}}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $U_s(k)$ — произвольный докритический процесс с конечной дисперсией. По [1, гл. I, теорема 11.1 и следствие 11.1] для определенной далее постоянной $c_0 \in (0, 1)$ в случае $\sum_{n=1}^{\infty} g_n n \ln n = \sum_{n=1}^{\infty} nq^n f_n \ln n < \infty$ (для наших процессов ряд сходится в силу того, что $q \in (0, 1)$) верно асимптотическое разложение

$$1 - g^{*(s)}(0) = c_0^{(s)}(g'(1))^s \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} c_0(g'(1))^s = c_0 A_q^s. \quad (7)$$

Изучение моментов $\tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X$ для докритических ветвящихся процессов $U_s(k)$ актуально, поскольку в [4], [5] для докритических процессов с непрерывным временем решена проблема сходимости некоторых функционалов от траекторий, но в случае дискретного времени появляются осциллирующие добавки, исключающие возможность получения аналогов. Наличие этих компонент в [6] приводит только к верхним и нижним оценкам для распределения $\tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X$. Важную роль при вычислении моментов будут играть функции вида $W_\gamma(z) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\gamma z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta^{\gamma n} \exp(-r\beta^n e^z)$, определенные В. А. Ватутиным [7]. Они являются непрерывными, периодическими с периодом $-\ln \beta$ и довольно легко разлагаются в ряды Фурье с геометрически убывающими коэффициентами при удалении от нулевого, что приводит к крайне малым колебаниям их относительно постоянной (см. [8]). Далее для компактификации записи оценка $O(\ln^{l-2} k)$ и число $\ln^{l-2} k$ при $l = 2$ интерпретируется как $O(1)$ и 1.

Теорема 2. Для постоянной $c_0 \in (0, 1)$ из (7)

$$\mathbf{E} \tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X \underset{k \rightarrow \infty}{=} -\frac{\ln k + \mathbb{C} + \ln c_0}{\ln f'(q)} + \theta(k) + o(1), \quad (8)$$

где $\theta(k) \in [0, 1]$, а $\mathbb{C}$ — постоянная Эйлера, или для $\tilde{S}(k)$ из (37) и любых

фиксированных $p_2 \in (0, 1)$

$$\mathbf{E} \tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X = -\frac{\ln k + \mathbb{C} + \ln c_0}{\ln f'(q)} - 0.5 - \tilde{S}(k) \ln^2 f'(q) + o(k^{-p_2}), \quad (9)$$

$$\mathbf{D} \tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X = -\frac{2 \ln k}{\ln f'(q)} + O(1), \quad (10)$$

$$\mathbf{E} \left(\tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X \right)^l = \frac{\ln^l k}{|\ln^l f'(q)|} + l \frac{\mathbb{C} + \ln c_0 - 0.5 \ln f'(q)}{|\ln^l f'(q)|} \ln^{l-1} k - l |\ln^{3-l} f'(q)| \tilde{S}(k) \ln^{l-1} k + O(\ln^{l-2} k) \quad \text{при } l > 1, \quad (11)$$

$$\mathbf{E} \left(\tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X - \mathbf{E} \tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X \right)^l = \frac{-l}{\ln^{l-1} f'(q)} \ln^{l-1} k + O(\ln^{l-2} k) \quad \text{при } l > 1. \quad (12)$$

Учитывая докритичность процесса и соотношения (1)–(3) из [1, гл. I, § 11], можно выписать явный вид $c_0^{(s)} = \int_0^1 \prod_{j=0}^{s-1} g'(g^{*j}(x)) / g'(1) dx$. Очевидно, что $c_0^{(1)} < 1$, $c_0^{(s)} \downarrow c_0 < 1$ при $s \in \mathbf{N}$. Оценим скорость сходимости $c_0^{(s)}$ к c_0 . Неравенство $1 - xy \leq (1 - x) + (1 - y)$ при $x, y \in [0, 1]$ влечет

$$c_0^{(s)} - c_0 \leq \int_0^1 \prod_{j=0}^{s-1} \frac{g'(g^{*j}(x))}{g'(1)} \sum_{i=s}^{\infty} \frac{g'(1) - g'(g^{*i}(x))}{g'(1)} dx.$$

Лемма 1. Для докритического процесса с производящей функцией $g(z) = q^{-1}f(qz)$ при $s \in \mathbf{N}$ верны соотношения

$$c_0^{(s)} - c_0 \leq c_0^{(s)} \sum_{j=s}^{\infty} \frac{g''(1)(1 - g^{*j}(0))}{g'(1)} \leq (c_0^{(s)})^2 \frac{q f''(q) A_q^s}{f'(q)(1 - A_q)}, \quad (13)$$

$$(g^{*(s)}(0))^k - (1 - c_0 A_q^s)^k \leq k(c_0^{(s)} - c_0) A_q^s \leq (c_0^{(s)})^2 \frac{k q f''(q) A_q^{2s}}{f'(q)(1 - A_q)}, \quad (14)$$

$$(g^{*(s)}(0))^k \leq \exp(-k c_0 A_q^s). \quad (15)$$

Доказательство. Неравенство (13) следует из предшествующей лемме оценки, теоремы Лагранжа о среднем значении [9, гл. III, п. 112], монотонности производящих функций и соотношения (7). Теорема о среднем и (13) приводят к (14). Оценка (15) верна в силу соотношений $\ln(1 - x) \leq -x$, $x \in (0, 1)$, $(g^{*(s)}(0))^k = \exp(k \ln(1 - c_0^{(s)}(g'(1))^s))$ и монотонности $c_0^{(s)}$.

Ряды $\sum_{s=0}^{\infty} s^j (1 - \mathbf{P}(U_s(k) = 0))$ сходятся при любых $j, k \in \mathbf{N}$ в силу (7) и того, что $\mathbf{P}(\tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X \leq s) = \mathbf{P}\{U_s(k) = 0\} = (g^{*(s)}(0))^k$ и $1 - (g^{*(s)}(0))^k \leq k(1 - g^{*(s)}(0))$. Это позволяет производить почленное вычитание рядов

$$\begin{aligned} \mathbf{E} (\tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X)^l &= \sum_{s=1}^{\infty} s^l \left((g^{*(s)}(0))^k - (g^{*(s-1)}(0))^k \right) \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{l-1} C_l^j s^j (1 - (g^{*(s)}(0))^k). \end{aligned} \quad (16)$$

Для $r \in \mathbf{N}$ введем обозначения

$$S^{(r)}(k) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{S}^{(r)}(m, k) + \overline{S}^{(r)}(m, k) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{s=1}^{m-1} + \sum_{s=m}^{\infty} \right\} s^{r-1} (1 - (g^{*(s)}(0))^k), \quad (17)$$

$$\tilde{S}^{(r)}(m, k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s=m}^{\infty} s^{r-1} (1 - (1 - c_0 e^{-cs})^k), \quad \text{где } c \stackrel{\text{def}}{=} -\ln A_q. \quad (18)$$

Лемма 2. При любых фиксированных $p \in (0.5, 1)$, $p_1 > 0$ и $p_0 \in (0, 2p - 1)$ для целых $m = pc^{-1} \ln k + O(1)$, $k \rightarrow \infty$, и $r \in \mathbf{N}$ верны оценки

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{s=1}^{m-1} s^{r-1} - \underline{S}^{(r)}(m, k) \underset{k \rightarrow \infty}{=} o(k^{-p_1}), \\ 0 &\leq \overline{S}^{(r)}(m, k) - \tilde{S}^{(r)}(m, k) \underset{k \rightarrow \infty}{=} o(k^{-p_0}). \end{aligned}$$

Доказательство. Для целых $m = pc^{-1} \ln k + O(1)$, $k \rightarrow \infty$, где $p \in (0, 1)$ фиксировано, в силу (15) находим, что

$$0 \leq \sum_{s=1}^{m-1} s^{r-1} - \underline{S}^{(r)}(m, k) = \sum_{s=1}^{m-1} s^{r-1} e^{-kc_0 e^{-cs}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} O(e^{-c_0 k^{1-p}} \ln^r k). \quad (19)$$

Для тех же m определения (17) и (18) совместно с оценкой (14) влекут

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{S}^{(r)}(m, k) - \tilde{S}^{(r)}(m, k) \leq (c_0^{(1)})^2 \frac{q f''(q) k}{f'(q)(1 - A_q)} \sum_{s=m}^{\infty} s^{r-1} e^{-2cs} \\ &\leq (c_0^{(1)})^2 \frac{q f''(q) k m^{r-1} e^{-2cm}}{f'(q)(1 - A_q) c^2} \underset{k \rightarrow \infty}{=} O(k^{1-2p} \ln^{r-1} k), \end{aligned}$$

где мы воспользовались оценкой $\sum_{s=m}^{\infty} s^{r-1} e^{-2cs} \leq \int_{m-1}^{\infty} x^{r-1} e^{-2cx} dx = O(m^{r-1} e^{-2cm})$, получающейся интегрированием по частям с учетом монотонности функции $x^{r-1} e^{-2cx}$ при $x \geq (r-1)/(2c)$. Лемма доказана.

У $\tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X$ вероятности значений зависят от дробной части $\{c^{-1} \ln k\}$. В самом деле, по лемме 1 для всех $m \in \mathbf{Z}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X \leq [c^{-1} \ln k] + m \right) &= \mathbf{P} \left(\sup_{1 \leq j \leq k} X_{[c^{-1} \ln k] + m}^{(j)}(1) = 0 \right) \\ &= \left(g^{*([c^{-1} \ln k] + m)}(0) \right)^k \underset{k \rightarrow \infty}{=} \left(1 - c_0 k^{-1} e^{c\{c^{-1} \ln k\} - cm} \right)^k + O(k^{-2}) \\ &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \exp\{-c_0 A_q^{m - \{c^{-1} \ln k\}}\} + O(k^{-1}). \end{aligned}$$

Разлагая логарифм по формуле Тейлора в окрестности 1 и вычисляя разности, из последнего соотношения получаем следующее обобщение результата из [6].

Теорема 3. При любых фиксированных $m \in \mathbf{Z}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_q^{\{(-\ln k)/(\ln A_q)\}} \ln \mathbf{P} \left(\tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X \leq m + \left\lceil \frac{\ln k}{\ln A_q} \right\rceil \right) = -c_0 A_q^m,$$

$$\mathbf{P} \left(\tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X = [c^{-1} \ln k] + m \right) \underset{k \rightarrow \infty}{=} \exp\{-c_0 A_q^{m - \{c^{-1} \ln k\}}\} - \exp\{-c_0 A_q^{m - \{c^{-1} \ln k\} - 1}\} + O(k^{-1}).$$

Лемма 3. Пусть функция $\psi(x) \geq 0$ на множестве $x \geq n$, $x \in \mathbf{R}^+$ имеет единственный максимум в точке $t_0 \geq n$, тогда

$$\left| \sum_{s=n}^{\infty} \psi(s) - \int_n^{\infty} \psi(x) dx \right| \leq \psi(t_0).$$

Доказательство. Оценивание функции на целочисленных интервалах единичной длины экстремальными значениями приводит к оценкам

$$\sum_{s=n}^{\infty} \psi(s) - \max(\psi([t_0]), \psi([t_0] + 1)) \leq \int_n^{\infty} \psi(x) dx \leq \sum_{s=n}^{\infty} \psi(s) - \psi(n) + \psi(t_0),$$

которые и доказывают лемму.

Перейдем к оценкам $\tilde{S}^{(r)}(m, k)$, где $r \in \mathbf{N}$. Обозначим $J^{(r)}(m^*, k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{m^*}^{\infty} x^{r-1} (1 - (1 - c_0 e^{-cx})^k) dx$, $J^{(r)}(k) \stackrel{\text{def}}{=} J^{(r)}(0, k)$. Учитывая равенство $1 - (1 - z)^k = z \sum_{j=1}^k (1 - z)^{j-1}$ и производя замену $y = c_0 e^{-cx}$, получаем

$$J^{(1)}(k) = c^{-1} \int_0^{c_0} \sum_{j=1}^k (1 - y)^{j-1} dy = c^{-1} \sum_{j=1}^k \frac{1 - (1 - c_0)^j}{j} = c^{-1} (\ln k + \mathbb{C} + \ln c_0 + \gamma_k), \quad (20)$$

где $\mathbb{C}$ — постоянная Эйлера, а частичные суммы гармонического ряда [10, гл. XI, § 2, п. 367] вычислены с погрешностью $\gamma_k'' \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} k^{-1}/2$ (что будет доказано ниже), $\ln c_0$ возникает из формулы Тейлора для $\ln(1 - x)$ при $x = 1 - c_0$ [10, гл. XI, § 7, п. 405] с погрешностью $0 < \gamma_k' \leq (1 - c_0)^{k+1}/c_0 \underset{k \rightarrow \infty}{=} o(k^{-1})$, а $\gamma_k \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} k^{-1}/2$ равно сумме предшествующих погрешностей. Оценки γ_k'' получаются модификацией метода из [10, гл. XI, § 2, п. 367]. По формуле Тейлора, $x - \ln(1 + x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2/2$, что (см. [10]) влечет $\sum_{j=1}^n (1/j - \ln((j+1)/j)) = \sum_{j=1}^n 1/j - \ln(n+1) \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} \mathbb{C}$, а значит, $\gamma_n'' \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(n+1) - \ln n - \sum_{j=n+1}^{\infty} 1/2j^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1/2n$.

По аналогии с (20), представляя логарифм через интеграл, изменяя порядок интегрирования и учитывая (20), получаем

$$J^{(2)}(k) = \sum_{j=1}^k \int_0^{c_0} \int_y^{c_0} \frac{(1 - y)^{j-1} dz dy}{c^2 z} = \sum_{j=1}^k \int_0^{c_0} \int_0^z \frac{(1 - y)^{j-1} dy dz}{c^2 z}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^k j^{-1} \sum_{s=1}^j \frac{1 - (1 - c_0)^s}{c^2 s} = \sum_{j=1}^k \frac{\ln j + \mathbb{C} + \ln c_0 + \gamma_j}{c^2 j} \\
&= \sum_{j=1}^k \frac{\ln j}{c^2 j} + \frac{(\ln k + \mathbb{C} + \gamma_k)(\mathbb{C} + \ln c_0) + \mathbb{C}_1 + \gamma_k'''}{c^2},
\end{aligned}$$

где $\mathbb{C}_1 = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1} \gamma_j < \infty$, а $\gamma_k''' \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=k+1}^{\infty} j^{-1} \gamma_j \sim k^{-1}/2$ при $k \rightarrow \infty$.

В силу того, что $x^{-1} \ln x$ убывает при $x > e$, сумма $\sum_{j=4}^k j^{-1} \ln j$ оценивается снизу и сверху интегралами $\int_4^k x^{-1} \ln x dx$ и $\int_3^k x^{-1} \ln x dx$ соответственно. Поэтому $\sum_{j=1}^k j^{-1} \ln j = 0.5 \ln^2 k + O(1)$ при $k \rightarrow \infty$.

Уточним последнюю оценку, используя тот факт, что

$$\int_0^1 \left(\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln(n+x)}{n+x} \right) dx = \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln^2(n+1)}{2} + \frac{\ln^2 n}{2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln n}{2n^2}.$$

Асимптотика слагаемых влечет существование постоянной $\mathbb{C}_2$ такой, что $\sum_{j=1}^k j^{-1} \ln j = 0.5 \ln^2(k+1) + \mathbb{C}_2 - (2k)^{-1} \ln k + o(k^{-1} \ln k)$ при $k \rightarrow \infty$, а следовательно,

$$J^{(2)}(k) \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{0.5 \ln^2 k + (\ln k + \mathbb{C})(\mathbb{C} + \ln c_0) + \mathbb{C}_2}{c^2} + \frac{\ln k(1 + o(1))}{2kc^2}. \quad (21)$$

В случае $r \geq 2$ после замены $y = c_0 e^{-cx}$ по индукции получаем

$$\begin{aligned}
J^{(r)}(k) &= c^{-r} \sum_{j=1}^k \int_0^{c_0} (\ln c_0 - \ln y)^{r-1} (1-y)^{j-1} dy \\
&= \frac{r-1}{c^r} \sum_{j=1}^k \int_0^{c_0} \int_y^{c_0} \frac{(\ln c_0 - \ln z)^{r-2} dz}{z} (1-y)^{j-1} dy \\
&= \frac{r-1}{c^r} \sum_{j=1}^k \int_0^{c_0} \frac{(\ln c_0 - \ln z)^{r-2}}{z} \int_0^z (1-y)^{j-1} dy dz \\
&= \frac{r-1}{c^r} \sum_{j=1}^k j^{-1} \sum_{j_1=1}^j \int_0^{c_0} (\ln c_0 - \ln y)^{r-2} (1-y)^{j_1-1} dy \\
&= \frac{(r-1)!}{c^r} \sum_{j=1}^k \sum_{j_1=1}^j \dots \sum_{j_{r-1}=1}^{j_{r-2}} \frac{1 - (1 - c_0)^{j_{r-1}}}{j j_1 \dots j_{r-1}}.
\end{aligned}$$

По аналогии с $r = 1$ получаем $\sum_{j=1}^k j^{-1} \ln^r j = (r+1)^{-1} \ln^{r+1} k + O(1)$ при $k \rightarrow \infty$. Нижний предел у сумм в оценках берем больше чем $e^r + 2$ (а не 4), где функция $x^{-1} \ln^r x$ убывает. Далее, метод математической индукции приводит к соотношению

$$J^{(r)}(k) \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{\ln^r k}{c^r r} + \frac{\ln^{r-1} k}{c^r} (\mathbb{C} + \ln c_0) + O(\ln^{r-2} k), \quad r \geq 2, \quad (22)$$

при этом погрешность можно уточнить по аналогии со случаями $r = 1, 2$. Это демонстрируется в (21), где точность завышена.

Пусть $\phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - (1 - c_0 e^{-cx})^k$. Моменты $\mathbf{E}(\tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X)^l$ в силу (16) и (17) выражаются через $S^{(r)}(k)$, $r \leq l$. Исследуем разности между $\tilde{S}^{(r)}(m, k)$ и $J^{(r)}(m^*, k)$ и между $\sum_{s=1}^{m-1} s^{r-1}$ и $J^{(r)}(k) - J^{(r)}(m^*, k)$ для $m^* = m - 0.5$.

Лемма 4. В условиях леммы 2 при $r > 2$

$$\sum_{s=1}^{m-1} s^{r-1} - \int_0^{m-0.5} x^{r-1} (1 - (1 - c_0 e^{-cx})^k) dx \underset{k \rightarrow \infty}{=} O(\ln^{r-2} k)$$

и, кроме того, для любого $p_1 > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{m-1} s - \int_0^{m-0.5} x (1 - (1 - c_0 e^{-cx})^k) dx &\underset{k \rightarrow \infty}{=} -0.5^3 + o(k^{-p_1}), \\ m - 1 - \int_0^{m-0.5} (1 - (1 - c_0 e^{-cx})^k) dx &\underset{k \rightarrow \infty}{=} -0.5 + o(k^{-p_1}). \end{aligned}$$

Доказательство. Как и для сумм в (19), в силу (15)

$$0 \leq \int_0^{m-0.5} x^{r-1} (1 - c_0 e^{-cx})^k dx \underset{k \rightarrow \infty}{=} O(e^{-c_0 k^{1-p}} \ln^r k) \underset{k \rightarrow \infty}{=} o(k^{-p_1}). \quad (23)$$

Очевидно, что $\sum_{s=1}^{m-1} s = 0.5m(m-1)$ и $\sum_{s=1}^{m-1} s^0 = m-1$. При $r > 2$ формула (63) из [11, гл. IV, § 3, п. 1] имеет вид

$$\sum_{s=1}^{m-1} s^{r-1} = \int_0^m x^{r-1} dx - 0.5m^{r-1} + \sum_{j=2}^r B_j C_r^j m^{r-j} r^{-1}, \quad \text{где } C_r^j = \frac{r!}{j!(r-j)!},$$

$$B_{2p} = \frac{(-1)^{p-1} (2p)!}{2^{2p-1} \pi^{2p}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}}, \quad B_{2p+1} = 0, \quad p \in \mathbf{N}, \quad B_1 = -0.5$$

— числа Бернулли (см. [11, гл. IV, § 2, п. 2, формула (37)], или

$$\sum_{s=1}^{m-1} s^{r-1} \underset{m \rightarrow \infty}{=} \int_0^m x^{r-1} dx - 0.5m^{r-1} + \frac{1}{6}(r-1)m^{r-2} + O(m^{r-4}). \quad (24)$$

Поскольку $\int_{m^*}^m x^{r-1} dx = (m^r - m^{*r})/r = (m - m^*)m^{r-1} + O(m^{r-2})$ при $m \rightarrow \infty$, то первая часть леммы доказана; оставшиеся два соотношения очевидны.

Соотношения (20)–(24) и утверждения лемм 2 и 4 позволяют получить следующий результат.

Лемма 5. При $p \in (0.5, 1)$, $m = pc^{-1} \ln k + O(1)$, $k \rightarrow \infty$, и $r \geq 2$ верны оценки

$$\begin{aligned} J^{(1)}(m - 0.5, k) &\underset{k \rightarrow \infty}{=} c^{-1}(\ln k + \mathbb{C} + \ln c_0) - \underline{S}^{(1)}(m, k) - 0.5 + o(k^{-1}), \\ J^{(r)}(m - 0.5, k) &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{\ln^r k}{c^r r} + \frac{\mathbb{C} + \ln c_0}{c^r} \ln^{r-1} k + O(\ln^{r-2} k) - \underline{S}^{(r)}(m, k). \end{aligned}$$

Оценку $J^{(2)}(m - 0.5, k)$ мы огрубили для единообразия.

Для $r \in \mathbf{N}$ оценим разности

$$\Delta_m^{(r)}(k) \stackrel{\text{def}}{=} J^{(r)}(m - 0.5, k) - \tilde{S}^{(r)}(m, k) = \sum_{s=m}^{\infty} \int_{s-0.5}^{s+0.5} (x^{r-1} \phi(x) - s^{r-1} \phi(s)) dx.$$

Если существует $u''(x)$, то, дифференцируя по частям, находим, что

$$\begin{aligned} \int_0^{0.5} (u(x) + u(-x) - 2u(0)) dx &= 0.5 \int_0^{0.5} (0.5 - t)^2 (u''(t) + u''(-t)) dt \\ &= 0.5 \int_{-0.5}^{0.5} (0.5 - |t|)^2 u''(t) dt. \end{aligned} \quad (25)$$

Легко проверить, что производные для $\phi(x)$ имеют вид

$$\phi'(x) = -ck(1 - c_0 e^{-cx})^{k-1} c_0 e^{-cx}, \quad (26)$$

$$\phi''(x) = c^2 k(1 - c_0 e^{-cx})^{k-2} c_0 e^{-cx} (1 - kc_0 e^{-cx}). \quad (27)$$

При $j = 1, 2$, $c_x \stackrel{\text{def}}{=} c_0 e^{-cx}$, $x \in [-0.5, 0.5]$, $r \geq 1$ введем обозначения:

$$\begin{aligned} \psi_{j,x}(t, k) &\stackrel{\text{def}}{=} c_x^j e^{-cjt} (1 - c_x e^{-ct})^k, \quad \psi_x(t, k) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_{1,x}(t, k) - k\psi_{2,x}(t, k), \\ S_{j,x}^{(r)}(m, k) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s=m}^{\infty} s^{r-1} c_x^j e^{-csj} (1 - c_x e^{-cs})^k = \sum_{s=m}^{\infty} s^{r-1} \psi_{j,x}(s, k), \\ S_x^{(r)}(m, k) &\stackrel{\text{def}}{=} S_{1,x}^{(r)}(m, k) - kS_{2,x}^{(r)}(m, k) = \sum_{s=m}^{\infty} s^{r-1} \psi_x(s, k). \end{aligned}$$

Очевидно, что $0 < c_0 \sqrt{A_q} \leq \inf_{x \in [-0.5, 0.5]} c_x$, $\sup_{x \in [-0.5, 0.5]} c_x \leq c_0 \sqrt{A_q^{-1}} < \infty$ и ряды $S_{j,x}^{(1)}(m, k)$ из положительных слагаемых сходятся, как мажорируемые геометрическими прогрессиями $\{c_0^j e^{-c(s-0.5)j}\}_{s=m}^{\infty}$, а при $r \geq 2$ положительные слагаемые из $S_{j,x}^{(r)}(m, k)$ мажорируются $\{s^{r-1} c_0^j e^{-c(s-0.5)j}\}_{s=m}^{\infty}$.

Докажем существование при фиксированных $r \in \mathbf{N}$, $j = 1, 2$ равномерно ограниченных по остальным переменным функций $\bar{S}_{j,x}^{(r)}(k)$, не зависящих от m , но зависящих от x , j и k , таких, что при $m = pc^{-1} \ln k + O(1)$, $k \rightarrow \infty$ и любых $p_2 \in (0, 1 - p)$

$$k^j S_{j,x}^{(1)}(m, k) - \bar{S}_{j,x}^{(1)}(k) = o(k^{-p_2}), \quad (28)$$

$$k^j (S_{j,x}^{(r)}(m, k) - c^{1-r} S_{j,x}^{(1)}(m, k) \ln^{r-1} k) - \bar{S}_{j,x}^{(r)}(k) \ln^{r-2} k = o(k^{-p_2}), \quad (29)$$

если $r > 1$.

Обозначим $\bar{S}_x^{(r)}(k) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{S}_{1,x}^{(r)}(k) - \bar{S}_{2,x}^{(r)}(k)$ и запишем соотношения (28), (29) в виде

$$kS_x^{(1)}(m, k) - \bar{S}_x^{(1)}(k) \underset{k \rightarrow \infty}{=} o(k^{-p_2}), \quad (30)$$

$$k(S_x^{(r)}(m, k) - c^{1-r} S_x^{(1)}(m, k) \ln^{r-1} k) - \bar{S}_x^{(r)}(k) \ln^{r-2} k \underset{k \rightarrow \infty}{=} o(k^{-p_2}). \quad (31)$$

Вычислим производную по t :

$$\begin{aligned} \psi'_{j,x}(t, k) &= -c_x^j c j e^{-cjt} (1 - c_x e^{-ct})^k + k c c_x^{j+1} e^{-ct} e^{-cjt} (1 - c_x e^{-ct})^{k-1} \\ &= c c_x^j e^{-cjt} (1 - c_x e^{-ct})^{k-1} ((k+j)c_x e^{-ct} - j). \end{aligned}$$

Для $m = pc^{-1} \ln k + O(1)$, $k \rightarrow \infty$, и k , больших при $t \geq m - 1$, производная $\psi'_{j,x}(t, k)$ положительна при

$$t < t_0 \stackrel{\text{def}}{=} t_0(j, k, x) \stackrel{\text{def}}{=} c^{-1} (\ln((k+j)c_x) - \ln j) = x \ln c_0 + c^{-1} (\ln(k+j) - \ln j)$$

отрицательна при $t > t_0$. При этом $m \leq t_0$. Максимум $\psi_{j,x}(t, k)$ имеет асимптотику

$$\psi_{j,x}(t_0, k) = (j(k+j)^{-1})^j (1 - j(k+j)^{-1})^k \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} j^j k^{-j} e^{-j}.$$

Следовательно,

$$k\psi_x(t_0, k) = \frac{k}{k+1} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^k - \frac{2^2 k^2}{(k+2)^2} \left(1 - \frac{2}{k+2}\right)^k \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} e^{-1} - 4e^{-2}.$$

Из явного вида t_0 следует, что функция $\{t_0\} = \{t_0(j, k, x)\}$ при любых фиксированных j и k периодична по $x \in \mathbf{R}$ с периодом $\ln^{-1} c_0^{-1} > 0$ и изменяется линейно от 0 до 1 (обозначает, что предел слева равен 1) на полуинтервалах, связанных с целыми t_0 (напомним, что $x \in [-0.5, 0.5]$). При фиксированных целых $s = [t_0] \pm n$, $s \geq 0$, близких к t_0 , справедливы представления

$$\begin{aligned} \psi_{j,x}(s, k) &= (j(k+j)^{-1})^j e^{\mp c j n} e^{c\{t_0\}j} (1 - j(k+j)^{-1} e^{\mp c n} e^{c\{t_0\}})^k \\ &\underset{k \rightarrow \infty}{\sim} j^j k^{-j} e^{\mp c j n} e^{c\{t_0\}j} \exp\{-j e^{\mp c n} e^{c\{t_0\}}\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Последние оценки и $\ln(1+y) \sim y$, $y \rightarrow 0$, означают, что (32) сохраняется и для $s = [t_0] - n$ при $n = o(\ln k)$ и для всех $s \geq t_0$. Неравенства $0 < c_x e^{-ct} = j(k+j)^{-1} e^{\mp c n} e^{c\{t_0\}} < 1$, $\ln(1-y) \leq -y$ при $y \in (0, 1)$ и $kj(k+j)^{-1} > 1$ влекут

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{j}{k+j} e^{\mp c n} e^{c\{t_0\}}\right)^k &= \exp\left\{k \ln\left(1 - \frac{j}{k+j} e^{\mp c n} e^{c\{t_0\}}\right)\right\} \\ &\leq \exp\left\{-\frac{kj}{k+j} e^{\mp c n} e^{c\{t_0\}}\right\} \leq \exp\{-e^{\mp c n}\}, \end{aligned}$$

т.е. вместо (32) при любых допустимых значениях параметров верно

$$\psi_{j,x}(s, k) \leq j^j k^{-j} e^{\mp c j n} e^{c j} e^{-e^{\mp c n}}. \quad (33)$$

При всех $s \geq 0$ справедливо представление

$$s^r \psi_{j,x}(s, k) \underset{k \rightarrow \infty}{=} c^{-r} \psi_{j,x}(s, k) (\ln^r k + O(\ln^{r-1} k)) + (s^r - [t_0]^r) \psi_{j,x}(s, k). \quad (34)$$

Из неравенства $\mp j c n - e^{\mp c n} < -c n$, где $j = 1, 2$, $n \in \mathbf{N}$, верного для знака « $-$ » и при $c n \geq \ln(3c n)$ для знака « $+$ » (исключено конечное число малых значений n , где справедливо (32)), и оценки (33) получаем

$$\psi_{j,x}(s, k) \leq n j^j k^{-j} e^{c j} e^{-c n}, \quad (35)$$

$$(s^r - [t_0]^r) \psi_{j,x}(s, k) \leq 2^r \max\{t_0^{r-1}, n^{r-1}\} n^2 j^j k^{-j} e^{c j} e^{-c n}. \quad (36)$$

Из неравенств (35) и (36) следует равномерная ограниченность по k и x и при всех k равномерная сходимость по x рядов $k^j S_{j,x}^{(1)}(1, k)$ к некоторым отделенным от нуля функциям $\bar{S}_{j,x}^{(1)}(k)$, а рядов $(S_{j,x}^{(r)}(1, k) - [t_0]^{r-1} S_{j,x}^{(1)}(1, k)) k^j \ln^{2-r} k$ к $\bar{S}_{j,x}^{(r)}(k)$ при $r \geq 2$. При этом функции $\bar{S}_{j,x}^{(r)}(k)$ при $x \in [-0.5, 0.5]$ существенно зависят от k .

Обозначим через $\bar{W}_j(z) \stackrel{\text{def}}{=} A_q^{jz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_q^{j n} e^{-j A_q^{n+x}}$ ряды $W_\gamma(z)$ из [7] при $\gamma = r = j = 1, 2$, $\beta = e^{-c}$ и $z = c\{t_0\}$. Их периодом будет c и, в силу (32) и определений, $\bar{S}_{j,x}^{(1)}(k) = j^j \bar{W}_j(t_0) = j^j \bar{W}_j(x \ln c_0 + c^{-1}(\ln(k+j) - \ln j))$. Как показано в [8], $\bar{W}_1(z) = \ln^{-1} A_q f_\eta(x)$, где последняя функция s $\lambda = A_q$ определена в [8] и имеет коэффициенты разложения в ряд Фурье

$$c_n^{(1)} = \frac{\Gamma(1 + 2\pi i n / \ln A_q)}{\ln A_q} = \frac{2\pi i n A_q \Gamma(2\pi i n / \ln A_q)}{\ln^2 A_q},$$

$$|c_n^{(1)}| = \frac{2\pi |n|^{0.5}}{(2\pi \operatorname{sh}(2\pi^2 |n| / |\ln A_q|)) |\ln^3 A_q|^{0.5}},$$

$n \in \mathbf{Z}$. Аналогично, величины $c_n^{(2)} = \ln^{-2} A_q \pi i n A_q \Gamma(\pi i n \ln^{-1} A_q)$ будут коэффициентами Фурье для $\bar{W}_2(z)$, что формально соответствует замене n на $n/2$. Учитывая то, что $\operatorname{sh}^{-1}(2\pi^2 |n|)$ имеет порядок $e^{-2\pi^2 |n|}$, а $2\pi^2 \approx 19.74$, получаем, что коэффициенты очень быстро убывают и ряды $\bar{S}_{j,x}^{(1)}(k)$ хорошо аппроксимируются отрезками рядов Фурье. Это же можно сказать и о

$$\tilde{S}_j(k) \stackrel{\text{def}}{=} 0.5 \int_{-0.5}^{0.5} (0.5 - |x|)^2 \bar{S}_{j,x}^{(1)}(k-2) dx, \quad \tilde{S}(k) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{S}_1(k) - \tilde{S}_2(k). \quad (37)$$

Используя неравенство (33), оценим $\Delta_m^{(r)}(k) \stackrel{\text{def}}{=} k^j S_{j,x}^{(r)}(1, k) - k^j S_{j,x}^{(r)}(m, k)$:

$$\Delta_m^{(r)}(k) \leq \sum_{n=[t_0]-m}^{[t_0]} [t_0]^r j^j e^{-c j n} e^{c j} e^{-e^{-c n}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} O(1) e^{-c j([t_0]-m)} \ln^r k, \quad (38)$$

что является $o(k^{-p_2})$. Это и завершает доказательство (28).

Предшествующее и (32) означают, что основной вклад в $S_{j,x}^{(1)}(m, k)$ вносят слагаемое $\psi_{j,x}([t_0], k)$ и геометрически убывающие соседние слагаемые. Доказательство (29) следует из (34), (38), определения $\bar{S}_{j,x}^{(r)}(k)$ и (28).

Пусть $I_{j,x}(y, k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_y^\infty \psi_{j,x}(t, k) dt$, тогда $(k+1)I_{2,x}(y, k) = \psi_{1,x}(y, k+1) + I_{1,x}(y, k+1)$, $(k+1)I_{1,x}(y, k) = 1 - (1 - c_x e^{-cy})^{k+1}$ и $I_{j,x}(m, k) \sim k^{-j}$, $k \rightarrow \infty$. При $l = 1$ ряды приближаются интегралами грубо. По лемме 3

$$|S_{j,x}^{(1)}(m, k) - I_{j,x}(m, k)| \leq \psi_{j,k}(t_0) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} j^j k^{-j} e^{-j},$$

т.е. погрешность имеет тот же порядок, что и значение интеграла.

В принятых обозначениях в силу (26)–(31) и бинома Ньютона

$$\sum_{s=m}^{\infty} \phi''(s+x) = c^2 k S_x^{(1)}(m, k-2), \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{s=m}^{\infty} ((s+x)^{r-1} \phi''(s+x) + (s+x)^{r-2} (l-1) \phi'(s+x)) \\ &= c^2 k \sum_{j=0}^{r-1} C_{r-1}^j x^{r-1-j} S_x^{(j+1)}(m, k-2) \\ &+ c^2 k (r-1) \sum_{j=0}^{r-2} C_{r-2}^j x^{r-2-j} S_{1,x}^{(j+1)}(m, k-1), \quad \text{где } r \geq 2. \quad (40) \end{aligned}$$

Лемма 6. Если выполнены условия леммы 2, то для любых целых $l > 2$, $1 \leq u \leq l-1$ и $2 \leq r \leq l-1$

$$\begin{aligned} k \int_{-0.5}^{0.5} \frac{(0.5 - |t|)^2}{2} t^u S_{*,t}^{(r)}(m, k) dt &= O(\ln^{r-1} k), \\ k \int_{-0.5}^{0.5} \frac{(0.5 - |t|)^2}{2} S_{*,t}^{(l)}(m, k) dt &= c^{1-l} \tilde{S}_*(k) \ln^{l-1} k + O(\ln^{l-2} k), \end{aligned}$$

где индекс $*$ следует либо опустить, либо заменить на 1 или 2.

Доказательство очевидно в силу (30), (29) и (31).

При $l \geq 2$ из (25)–(27), (40), (31), (29) и леммы 6 следует

$$\begin{aligned} \Delta_m^{(l)}(k) &= \sum_{s=m}^{\infty} \int_{-0.5}^{0.5} \frac{(0.5 - |x|)^2}{2} ((s+x)^{l-1} \phi''(s+x) \\ &\quad + (s+x)^{l-2} (l-1) \phi'(s+x)) dx \\ &\underset{k \rightarrow \infty}{=} c^{3-l} \tilde{S}(k) \ln^{l-1} k + O(\ln^{l-2} k). \quad (41) \end{aligned}$$

Эта оценка и леммы 4 и 5 позволяют записать

$$S^{(l)}(k) \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{\ln^l k}{c^l l} + \frac{\mathbb{C} + \ln c_0}{c^l} \ln^{l-1} k - c^{3-l} \tilde{S}(k) \ln^{l-1} k + O(\ln^{l-2} k), \quad (42)$$

откуда ввиду (16) и (17) следует, что $\mathbf{E}(\tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X)^l = lS^{(l)}(k) + 0.5l(l-1)S^{(l-1)}(k) + O(\ln^{l-2} k)$, $k \rightarrow \infty$; обозначая $F(k) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} + \ln c_0 + 0.5c - c^3\tilde{S}(k)$, получаем $\mathbf{E}(\tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X)^l = c^{-l} \ln^l k + lc^{-l}F(k) \ln^{l-1} k + O(\ln^{l-2} k)$, $k \rightarrow \infty$, что доказывает (11).

Для $l = 1$, в силу (25), (27), (30), (39), аналогом (41) будет соотношение

$$\Delta_m^{(1)}(k) = \sum_{s=m}^{\infty} \int_{-0.5}^{0.5} \frac{(0.5 - |x|)^2}{2} \phi''(s+x) dx = c^2 \tilde{S}(k) + o(k^{-p_2}),$$

которое вместе с леммой 5 приводит к

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X &= S^{(1)}(k) \underset{k \rightarrow \infty}{=} c^{-1}(\ln k + \mathbb{C} + \ln c_0 - c^3\tilde{S}(k)) - 0.5 + o(k^{-p_2}) \\ &= c^{-1}(\ln k + F(k)) - 1 + o(k^{-p_2}) \end{aligned} \quad (43)$$

(очевидно, что $\sup_k |F(k)| < \infty$), что совпадает с (9), а при $l = 2$ соотношение (42) имеет вид

$$S^{(2)}(k) \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{0.5 \ln^2 k + \ln k(\mathbb{C} + \ln c_0)}{c^2} - c\tilde{S}(k) \ln k + O(1). \quad (44)$$

При $l = 1$ приведем более грубую оценку. Представление (16) и леммы 2 и 4 влекут $\mathbf{E} \tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X = \tilde{S}^{(1)}(m, k) - J^{(1)}(m, k) - 1 + J^{(1)}(k) + o(k^{-p_0})$, а затем лемма 3 (с учетом того, что функция $1 - (1 - c_0 e^{-cx})^k$ монотонно убывает по x и $1 - (1 - c_0 e^{-cm})^k \sim 1$, $k \rightarrow \infty$), и оценка (20) приводят к оценке

$$|\mathbf{E} \tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X + \ln^{-1} A_q(\ln k + \mathbb{C} + \ln c_0)| \underset{k \rightarrow \infty}{\leq} 1 + o(1),$$

которая доказывает (8). При $j \geq 2$ из (43) получаем

$$(\mathbf{E} \tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X)^j = c^{-j}(\ln^j k + j \ln^{j-1} k F(k)) - c^{j-1} j \ln^{j-1} k + O(\ln^{j-2} k). \quad (45)$$

В частности,

$$(S^{(1)}(k))^2 = c^{-2}(\ln^2 k + 2 \ln k(\mathbb{C} + \ln c_0) - c \ln k) - 2c \ln k \tilde{S}(k) + O(1),$$

что вместе с (43), (44) и представлением $\mathbf{D} \tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X = 2S^{(2)}(k) + S^{(1)}(k) - (S^{(1)}(k))^2$, следующим из (16) и (17), доказывает (10).

Используя (45), (11) в приведенном выше виде с $F(k)$ и бином Ньютона, получаем доказательство (12)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X - \mathbf{E} \tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X \right)^l &= c^{-l} \sum_{j=0}^l C_l^j (\ln^l k + (lF(k) - cj) \ln^{l-1} k) (-1)^j \\ &\quad - l(-1)^{l-1} c^{-l+1} \ln^{l-1} k + O(\ln^{l-2} k) \\ &= l(-c)^{-l+1} \ln^{l-1} k + O(\ln^{l-2} k). \end{aligned}$$

3. Свойства времени вырождения срезаемых докритических ветвящихся процессов, начинающихся с большого числа частиц. Из неравенства $\tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^Z \leq \tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X$ на $\mathcal{B}_{k,0}$ и теоремы 2 следует оценка сверху для $\mathbf{E} \tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^Z$. Докажем, что их средние эквивалентны. Пусть $X_s = X_s(k) = \widehat{X}_s^0$.

Лемма 7. Для процессов из п. 2 при $j = 1, 2$ верны оценки

$$\mathbf{E} (\tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^Z)^j \mathbb{I}_{\{\bar{Z}_0 \geq k\}} \leq \mathbf{E} (\tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X)^j \mathbb{I}_{\{\bar{X}_0 \geq k\}} = O(\ln^j k \sqrt{k^{-1}}).$$

Доказательство. Применим неравенство Чебышёва с учетом явных выражений для средних и дисперсии численности потомства частиц и среднего для процесса (см. [2, гл. I, § 5]) при любых $s \in \mathbf{N}$:

$$\mathbf{P}(X_s \geq k) = \mathbf{P}(X_s - kA_q^s \geq k(1 - A_q^s)) \leq \frac{k\sigma_q^2 A_q^s (1 - A_q^s)}{k^2 (A_q - A_q^2) (1 - A_q^s)^2},$$

следовательно,

$$\mathbf{E} \mathbb{I}_{\{\bar{X}_0 \geq k\}} = \mathbf{P}(\bar{X}_0 \geq k) \leq \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_s \geq k) \leq \frac{\sigma_q^2}{k(1 - A_q)^3}. \quad (46)$$

Неравенство Коши–Буняковского [12, гл. IV, § 7, теорема 3], оценка (46) и теорема 2 дают лемму 7 с $j = 2$, а при $j = 1$ она очевидна в силу $\widehat{X}_m^n \geq Z_m$.

Используя лемму 7, теорему 2 и то, что

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^Z \mathbb{I}_{\{\bar{Z}_0 \geq k\}} &\equiv \tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X \mathbb{I}_{\{\bar{X}_0 \geq k\}}, \\ \mathbf{E} \tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^Z &= \mathbf{E} \tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X \mathbb{I}_{\{\bar{X}_0 < k\}} + \mathbf{E} \tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^Z \mathbb{I}_{\{\bar{Z}_0 \geq k\}}, \\ \mathbf{D} \tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^Z &= \mathbf{D} \tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X \mathbb{I}_{\{\bar{X}_0 < k\}} + \mathbf{D} \tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^Z \mathbb{I}_{\{\bar{Z}_0 \geq k\}} - 2\mathbf{E} \tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^X \mathbb{I}_{\{\bar{X}_0 < k\}} \mathbf{E} \tau_{\mathcal{B}_{k,0}}^Z \mathbb{I}_{\{\bar{Z}_0 \geq k\}}, \end{aligned}$$

легко доказать (3) и (5).

4. Свойства времени возвращения на уровень срезаемых надкритических ветвящихся процессов, начинающихся с большого числа частиц. Верно представление $X_n(k) = \sum_{j=1}^{X_1(k)} X_{n-1}^{(j)}(1)$, где $X_n^{(j)}(1)$ независимы и одинаково распределены с $X_n(1)$. Определим процессы $X_n^{(j)+}$ на траекториях процессов $X_n^{(j)}(1)$, исключая частицы с конечной численностью последующих поколений, т.е. из $X_n^{(j)}(1)$ выбираются только частицы с бесконечными линиями потомства. В частности, если процесс вырождается за конечное время, то $X_n^{(j)+} \equiv 0$ для всех $n > 0$, что происходит с вероятностью q . Как доказано в [1, гл. I, § 12, теорема 1], процессы $X_n^{(j)+}$ такие, что $X_0^{(j)+} = 1$, будут надкритическими с производящей функцией потомства $f(z) = (f((1-q)z + q) - q)/(1-q)$. Средние численности потомства частиц в обоих процессах совпадают:

$\hat{f}'(1) = f'(1) = A > 1$. Пусть $X_n^+(k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{X_1(k)} X_{n-1}^{(j)+}$. Верны неравенства $X_n^{(j)+} \leq X_n^{(j)}$ и $X_n^+(k) \leq X_n(k)$. Процессы $X_n^{(j)+}$ с условием $X_0^{(j)+} = 1$ обозначим $X_n^{(j)+}(1)$. Пусть $\tau_{s,k}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \min\{l: \sum_{j=1}^s X_l^{(j)+}(1) < k\}$, для $1 < i < l$, $\sum_{j=1}^s X_l^{(j)+}(1) \geq k\}$, где $0 < s < k$, $\tau_k^+ \stackrel{\text{def}}{=} \min\{l: X_l^+(k) < k\}$, для $1 < i < l$, $X_l^+(k) \geq k \mid \mathcal{A}_{k,0}\}$, $p_l^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}(X_1(k) = l \mid \mathcal{A}_{k,0}) \stackrel{\text{def}}{=} p_l(1 - q^k)$ и $D_{l,j,k} \stackrel{\text{def}}{=} \{X_1(k) = l, X_l^+(k) = j\}$. Из определения и формулы полной вероятности на $\mathcal{A}_{k,0}$ получаем

$$\begin{aligned} 1 \leq a &= \mathbf{E} \tau_{\mathcal{A}_{k,0}}^Z = \mathbf{E} \tau_{\mathcal{A}_{k,0}}^X \leq \mathbf{E} \tau_k^+ \\ &= 1 + \sum_{l=1}^{k-1} p_l^* \sum_{s=1}^l C_l^s q^{l-s} (1-q)^s \mathbf{E} \tau_{s,k}^+. \end{aligned} \quad (47)$$

Справедлива оценка сверху $\sum_{l=1}^{k-1} p_l \leq \mathbf{P}(\sum_{j=1}^k \xi_{1,j} < k)$. Не ограничивая общности, считаем, что $\mathbf{E} \xi_{1,1}^v < \infty$, $v = 2, \dots$. Формально фиксируем N и положим $\tilde{\xi}_{i,j} = \xi_{i,j}$, если $\xi_{i,j} \leq N$, а в противном случае $\tilde{\xi}_{i,j} = N$. Выбор N должен обеспечить выполнение неравенства $\mathbf{E} \tilde{\xi}_{i,j} > 1$. Очевидно, что $\mathbf{P}(\sum_{j=1}^k \xi_{1,j} < k) \leq \mathbf{P}(\sum_{j=1}^k \tilde{\xi}_{1,j} < k)$. По неравенству Чебышёва

$$\sum_{l=1}^{k-1} p_l \leq \mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^k \xi_{1,j} < k\right) \leq \frac{\mathbf{E} |\xi_{1,1} - a|^v}{(A-1)^v k^{v-1}}. \quad (48)$$

Рассмотрим субмартиггал $W_n \stackrel{\text{d}}{=} \sum_{j=1}^s X_n^{(j)+}(1)$ с $W_0 = s$. По теореме Дуба (см. [13, гл. VII, § 1, теорема 2]) он представим в виде суммы мартигалы $m_n \stackrel{\text{def}}{=} W_n - \sum_{j=0}^{n-1} W_j(A-1)$ с $m_0 = s$ и предсказуемой возрастающей последовательности $M_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{n-1} W_j(A-1)$ с $M_0 = 0$. По определению при $j < \tau_{s,k}^+$ верны оценки $s \leq W_j < k$, а при $j = \tau_{s,k}^+$ верны неравенства $k \leq \mathbf{E} W_j < Ak$. Случайная величина $\tau_{s,k}^+$ является моментом первого выхода из конечного множества для цепи Маркова, следовательно, имеет конечный первый момент, а $\mathbf{E}(|m_n - m_{n-1}| \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbf{E}(|W_n - AW_{n-1}| \mid \mathcal{F}_{n-1}) \leq 2Ak$ на множестве $\{n \leq \tau_{s,k}^+\}$, где $\mathcal{F}_{n-1}$ — σ -алгебра, порожденная m_i при $i \leq n-1$. Это условия теоремы о сохранении свойства мартигалльности при случайной замене времени [12, гл. 14, § 2, теорема 2]. Следовательно,

$$\begin{aligned} s + s(A-1)(\mathbf{E} \tau_{s,k}^+ - 1) &\leq \mathbf{E} m_{\tau_{s,k}^+} + \mathbf{E} \sum_{j=1}^{\tau_{s,k}^+ - 1} W_j(A-1) \\ &= \mathbf{E} W_{\tau_{s,k}^+} \leq Ak, \end{aligned}$$

затем получается оценка $\mathbf{E} \tau_{s,k}^{X^+} \leq (A(k+s) - 2s)/(s(A-1))$, что совместно с (47) и (48) доказывает (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Athreya K. B., Ney P. E.* Branching Processes. Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1972, 287 p.
2. *Харрис Т.* Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966, 355 с.
3. *Зубков А. М.* Условие вырождения ограниченного ветвящегося процесса. — Матем. заметки, 1970, т. 8, № 1, с. 9–18.
4. *Jagers P., Klebaner F. C., Sagitov S.* On the path to extinction. — Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 2007, v. 104, № 15, p. 6107–6111.
5. *Jagers P., Klebaner F. C., Sagitov S.* Markovian paths to extinction. — Adv. Appl. Probab., 2007, v. 39, № 2, p. 569–587.
6. *Pakes A. G.* On the asymptotic behaviour of the extinction time of the simple branching process. — Adv. Appl. Probab., 1989, v. 21, № 2, p. 470–472.
7. *Ватутин В. А.* Асимптотика вероятности попадания в нуль ветвящихся процессов с иммиграцией. — Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. 19, в. 1, с. 26–35.
8. *Ковалевский А. П., Топчий В. А., Фосс С. Г.* О стабильности системы обслуживания с континуально ветвящимися жидкостными пределами. — Проблемы передачи информации, 2005, т. 41, в. 3, с. 76–104.
9. *Физтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I. М.: Физматгиз, 1959, 607 с.
10. *Физтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. М.: Физматгиз, 1959, 807 с.
11. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967, 375 с.
12. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 1999, 470 с.
13. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989, 640 с.

Поступила в редакцию
14.I.2008