Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Вахания, Г. З. Челидзе, Кватернионные гауссовские случайные величины,
Теория вероятн. и ее примен., 2009, том 54, выпуск 2, 337–344

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2706>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 13:29:20

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2009 г.

ВАХАНИЯ Н. Н.*, ЧЕЛИДЗЕ Г. З.*

КВАТЕРНИОННЫЕ ГАУССОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Основным результатом работы является формулировка и доказательство теоремы Пойа о характеристизации гауссовских случайных величин со значениями в алгебре кватернионов. Мы начинаем с предварительных сведений по кватернионам и кватернионным случайным величинам. Более полную информацию по этим вопросам (кроме вопросов, связанных с совместно кватернионными системами) можно найти в [1]. Близкое отношение к настоящей работе имеет также статья [2], в которой доказывается теорема Пойа для комплексных случайных величин.

Ключевые слова и фразы: кватернионы, совместно кватернионные системы, R -, C - и Q -гауссовские кватернионные случайные величины, характеристизационная теорема Пойа.

Кватернионы и совместно кватернионные системы. Известно, что в евклидовых пространствах $\mathbf{R}^n$ ненулевые элементы пространства образуют группу по умножению без делителей нуля в том и только том случае, если $n = 1, 2, 4$ или 8 (теорема Фробениуса). Следовательно, для этих четырех значений n эти линейные пространства являются алгебрами (без делителей нуля) над полем вещественных чисел (R -алгебрами). В случаях $n = 1$ и $n = 2$ эти алгебры эквивалентны обычным алгебрам соответственно вещественных и комплексных чисел. Алгебра $\mathbf{R}^8$ называется алгеброй Кэли, она некоммутативна и неассоциативна. Алгебра $\mathbf{R}^4$ есть алгебра кватернионов, она ассоциативна, но некоммутативна. Алгебру кватернионов мы обозначаем буквой $\mathbf{Q}$. Любой кватернион $a \in \mathbf{Q}$ представляется в виде $a = a' + ia'' + ja''' + ka^{IV}$, где a', a'', a''', a^{IV} — вещественные числа и «основные мнимые единицы» i, j и k определяются следующими условиями (таблицей умножения): $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $ki = -ik = j$, $jk = -kj = i$. Эти условия, совместно с условиями коммутативности умножения мнимых единиц на вещественные числа и дистрибутивности умножения относительно сложения дают правило умножения кватернионов. Кватернион, сопряженный к кватерниону a , определяется равенством $\bar{a} = a' - ia'' - ja''' - ka^{IV}$. Величины a' и $ia'' + ja''' + ka^{IV}$ называются соответственно вещественной и мнимой частями кватерниона a . Модуль $|a|$ кватерниона a определяется следующим образом: $|a| = (a\bar{a})^{1/2} = (a'^2 + a''^2 + a'''^2 + a^{IV^2})^{1/2}$. Под мнимой единицей мы понимаем любой кватернион, квадрат которого есть -1 . Легко проверить, что для любой мнимой единицы $\tilde{i}$ справедливо равенство $\tilde{i} = 1/\tilde{i} = -\tilde{i}$. Отметим также легко проверяемые равенства $|a_1| = |\bar{a}_1|$, $\bar{a}_1 a_2 = \bar{a}_2 \bar{a}_1$, $|a_1 a_2| = |a_1| |a_2|$ для любых a_1, a_2 .

* Институт вычислительной математики им. Н. И. Мусхелишвили АН Грузии, ул. Акури, 8, 0193 Тбилиси, Грузия; e-mail: nvakhania@yahoo.com

Для формулировки основного результата работы введем объект, который можно назвать совместно кватернионной системой (СКС) совокупности кватернионов $A \equiv (a_1, \dots, a_n)$, $n \geq 2$, необязательно отличных друг от друга. Обозначим $A'' \equiv (a_1'', \dots, a_n'')$, $A''' \equiv (a_1''', \dots, a_n''')$, $A^{IV} \equiv (a_1^{IV}, \dots, a_n^{IV})$. Мы будем говорить, что совокупность A составляет СКС, если хотя бы одна из трех пар (A'', A''') , (A'', A^{IV}) и (A''', A^{IV}) есть пара неколлинеарных векторов в $\mathbf{R}^n$ или, другими словами, если векторы A'' , A''' и A^{IV} не лежат в одномерном подпространстве $\mathbf{R}^n$. Такое название мотивировано следующим фактом: любой (один) кватернион $a = a' + ia'' + ja''' + ka^{IV}$ можно записать как комплексное число относительно некоторой мнимой единицы $\tilde{i}$, определяемой равенством

$$\tilde{i} = \frac{ia'' + ja''' + ka^{IV}}{(a''^2 + a'''^2 + a^{IV^2})^{1/2}}. \quad (1)$$

В самом деле, имеем $\tilde{i}^2 = -1$ и $a = a' + \tilde{i} \widetilde{a''}$, где $\widetilde{a''} = (a''^2 + a'''^2 + a^{IV^2})^{1/2}$. Совокупность n кватернионов A , $n \geq 2$, уже не всегда можно представить как комплексные числа с общей мнимой единицей. Это можно сделать в том и только том случае, если A не является СКС. В одну сторону это утверждение почти очевидно: если A не является СКС, то векторы A'' , A''' и A^{IV} лежат в одномерном подпространстве пространства $\mathbf{R}^n$. В самом деле, если $A'' = A''' = A^{IV} = 0$, то доказывать нечего. Будем поэтому считать, не ограничивая общности, что $A'' \neq 0$ и $A''' = \lambda A''$, $A^{IV} = \mu A''$ для некоторых $\lambda, \mu \in \mathbf{R}^1$. Ясно, что мнимая единица (1) будет одной и той же для всех троек вещественных чисел $(a_h'', a_h''', a_h^{IV})$, $h = 1, \dots, n$. Обратно, пусть существует общая мнимая единица для всех a_h . Покажем, что совокупность кватернионов A не является СКС. Нетрудно видеть, что все возможные мнимые единицы могут быть записаны в виде линейных комбинаций i , j и k с вещественными коэффициентами, сумма квадратов которых равна единице. Поэтому в силу допущения существования общей мнимой единицы

$$ia_h'' + ja_h''' + ka_h^{IV} = \frac{i\alpha + j\beta + k\gamma}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{1/2}} \widetilde{a_h''}, \quad h = 1, \dots, n, \quad (2)$$

для некоторых α , β и γ , не зависящих от h . При этом, если $\widetilde{a_h''} = 0$ для всех h , то $a_h'' = a_h''' = a_h^{IV} = 0$, $h = 1, \dots, n$, и A не будет СКС. В противном случае допустим, не ограничивая общности, что $\widetilde{a_1''} \neq 0$, и положим $c_h = \widetilde{a_h''}/\widetilde{a_1''}$. Ясно, что $c_h \in \mathbf{R}^1$ для всех h . В силу равенства (2) получаем, что $ia_h'' + ja_h''' + ka_h^{IV} = c_h(ia_1'' + ja_1''' + ka_1^{IV})$ для всех h , а из этих равенств следует, что векторы A'' , A''' , A^{IV} лежат в одномерном подпространстве. Следовательно, совокупность кватернионов A не является СКС.

Кватернионные гауссовские случайные величины. Кватернионная случайная величина ξ определяется с помощью четырех вещественных случайных величин ξ' , ξ'' , ξ''' , ξ^{IV} следующим образом: $\xi = \xi' + i\xi'' + j\xi''' + k\xi^{IV}$. Таким образом с ξ естественно связывается вещественный четырехмерный случайный вектор $\hat{\xi} = (\xi', \xi'', \xi''', \xi^{IV})$. Соответственно ξ можно назвать гауссовской (кватернионной) случайной величиной, если случайный вектор $\hat{\xi}$ со значениями в $\mathbf{R}^4$ является гауссовским. Это — определение в широком смысле, или R -определение. Помимо этого существуют еще два понятия кватернионных гауссовских случайных величин: S -гауссовость и Q -гауссовость (или гауссовость в узком смысле), которые дают последовательные усиления свойств R -гауссовости, в частности, оба определения включают в себя требование R -гауссовости. Для того, чтобы дать более точную формулировку, используем понятие характеристической функции. Характеристическая функция кватернионной случайной величины ξ определяется равенством $\chi_\xi(q) = \mathbf{E} \exp(i \operatorname{Re}(\xi \bar{q}))$, $q \in \mathbf{Q}$, где $\mathbf{E}$ и Re обозначают математическое ожидание и вещественную часть соответственно. Очевидно, что $\operatorname{Re}(\xi \bar{q}) = (\hat{\xi} | \hat{q}) = \xi'q' + \xi''q'' + \xi'''q''' + \xi^{IV}q^{IV}$ и $\chi_\xi(q) = \chi_{\hat{\xi}}(\hat{q})$. Поэтому для всех трех определений $\chi_\xi(q) = \exp(-\frac{1}{2}(S\hat{q} | \hat{q}))$, где S — (4×4) -матрица ковариаций вещественного случайного вектора $\hat{\xi}$.

Указанные три варианта понятия гауссовости отличаются друг от друга видом соответствующих матриц ковариаций S (и это приводит к существенным отличиям их свойств). Ковариационные матрицы R -гауссовских случайных величин обладают обычными свойствами ковариационных матриц случайных векторов в $\mathbf{R}^4$ и не имеют никаких дополнительных свойств, связанных с алгебраическими свойствами кватернионов, R -гауссовость означает лишь совместную гауссовость случайных векторов ξ' , ξ'' , ξ''' и ξ^{IV} . Ковариационные матрицы Q -гауссовских случайных величин, по определению, имеют весьма специальный вид — они пропорциональны единичным матрицам в $\mathbf{R}^4$ (т.е. координаты соответствующих четырехмерных случайных векторов $\hat{\xi}$ взаимно независимы и имеют равные дисперсии). В настоящей работе мы будем иметь дело только с Q -гауссовскими случайными величинами. Формальным поводом для Q -определения можно считать форму характеристической функции вещественной гауссовской случайной величины, которая в предположении центрированности есть $\exp(-t^2 \mathbf{E} \xi^2/2)$, $t \in \mathbf{R}^1$. Если мы хотим, чтобы характеристическая функция кватернионной гауссовской случайной величины имела вид $\exp(-c|q|^2 \mathbf{E} |\xi|^2)$, $q \in \mathbf{Q}$, $c > 0$, то должно выполняться равенство: $c(q'^2 + q''^2 + q'''^2 + q^{IV^2})(\mathbf{E} \xi'^2 + \mathbf{E} \xi''^2 + \mathbf{E} \xi'''^2 + \mathbf{E} \xi^{IV^2}) = (\frac{1}{2} S \hat{q} | \hat{q})$ для всех четверок $\hat{q} = (q', q'', q''', q^{IV})$. Беря в качестве $\hat{q}$ последовательно $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ и $(0, 0, 0, 1)$, получим $c = \frac{1}{8}$. Таким образом, ввиду очевидного равенства $\|\xi\|^2 = |\xi|^2$, характеристическая функция Q -гауссовской случайной величины имеет вид:

$$\chi_{\xi}(q) = \exp \left(-\frac{1}{8} |q|^2 \mathbf{E} |\xi|^2 \right). \quad (3)$$

Имеется следующее более существенное соображение алгебраического характера в пользу Q -определения: аддитивный оператор S в $\mathbf{R}^4$, соответствующий матрице ковариаций, является, очевидно, линейным как оператор из $\mathbf{R}^4$ в $\mathbf{R}^4$. Но S естественно рассмотреть как оператор, действующий в пространстве кватернионов $\mathbf{Q}^1$, которое является одномерным линейным пространством над полем кватернионов $\mathbf{Q}$ (в этом случае кватернионы выступают как в роли элементов пространства, так и в роли скаляров). При таком подходе оператор S , очевидно, будет линейным в том и только том случае, если он коммутирует с операторами умножения на i и на j . А это условие, как нетрудно видеть, равносильно тому, что S пропорционален тождественному оператору, т.е. является Q -гауссовским ковариационным оператором. В пользу Q -определения можно привести также следующее весьма существенное соображение вероятностного характера. Хорошо известно, что из некоррелированности двух вещественных совместно гауссовских случайных величин следует их независимость. В [2] показано, что аналогичное утверждение верно также и для двух комплексных гауссовских в узком смысле случайных величин и неверно в случае определения в широком смысле. Используя аналогичные соображения, легко показать, что в кватернионном случае это утверждение также верно для Q -определения и неверно для остальных двух определений. Другое существенное соображение вероятностного характера связано с теоремой Пойа, к формулировке которой мы сейчас переходим.

Теорема. Пусть ξ — кватернионная случайная величина, $\xi_1, \dots, \xi_n$, $n \geq 2$, — взаимно независимые случайные величины, имеющие такое же распределение, как ξ , и $a_1, \dots, a_n$ — ненулевые кватернионы, образующие совместно кватернионную систему и удовлетворяющие условию

$$\sum_{h=1}^n |a_h|^2 = 1. \quad (4)$$

Тогда, если сумма $\eta = \sum_{h=1}^n a_h \xi_h$ имеет такое же распределение, какое имеет ξ , то ξ есть Q -гауссовская случайная величина, т.е. характеристическая функция случайной величины ξ имеет вид (3).

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, приведем нужные леммы. Напомним, что для любого кватерниона q , $\hat{q}$ обозначает четырехмерный вещественный вектор $\hat{q} = (q', q'', q''', q^{IV})$.

Лемма 1. Пусть ξ — кватернионная случайная величина, $\mathbf{E}|\xi|^2 < \infty$, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — взаимно независимые случайные величины, имеющие такое же распределение, какое имеет ξ . Пусть, далее, $a_1, \dots, a_n$ — ненулевые кватернионы и $\eta = a_1\xi_1 + \dots + a_n\xi_n$, $n \geq 2$. Тогда:

1) если матрицы ковариаций случайных векторов $\hat{\xi}$ и $\hat{\eta}$ совпадают, то $\sum_{h=1}^n |a_h|^2 = 1$;

2) если, кроме того, совокупность кватернионов $a_1, \dots, a_n$ образует совместно кватернионную систему, то эти матрицы пропорциональны единичной матрице в $\mathbf{R}^4$, т.е. случайные величины $\xi', \xi'', \xi''', \xi^{IV}$ попарно некоррелированы и имеют равные дисперсии.

Лемма 2. Пусть ξ — симметричная кватернионная случайная величина на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathbf{P})$ и ее характеристическая функция $\chi_\xi(q)$ неотрицательна всюду в $\mathbf{Q}$. Тогда верно следующее неравенство:

$$\int_{|\xi| < 1/|q|} [\operatorname{Re}(\xi(\omega)\bar{q})]^2 \mathbf{P}(d\omega) \leq -3 \ln \chi_\xi(q).$$

Лемма 3. Пусть f — вещественная функция, определенная и непрерывная всюду в пространстве кватернионов $\mathbf{Q}^1$, за исключением, быть может, точки $q = 0$. Предположим, что f удовлетворяет условию

$$f(q) = \lambda_1 f(a_1 q) + \lambda_2 f(a_2 q) + \dots + \lambda_n f(a_n q), \quad q \neq 0, \quad n \geq 2,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — положительные числа, сумма которых равна 1, и $a_1, \dots, a_n$ — ненулевые кватернионы, каждый из которых по модулю меньше единицы. Тогда:

1) для любого ненулевого кватерниона q существует последовательность кватернионов (q_m) такая, что $\lim_{m \rightarrow \infty} q_m = 0$ и $f(q_m) = f(q)$ для всех $m = 1, 2, \dots$;

2) если существует предел функции f в нуле, то f является константой.

Лемма 3 доказывается так же, как в [2] для комплексного случая. Лемма 2 есть непосредственное следствие из аналогичного известного «неравенства для усечений» для симметричных вещественных случайных величин $\eta(\omega)$, $\omega \in \Omega$, с неотрицательной характеристической функцией χ_η . Имеется в виду следующее неравенство [3, с. 209]:

$$\int_{|\eta| < 1/t} \eta^2(\omega) \mathbf{P}(d\omega) \leq -\frac{3 \log \chi_\eta(t)}{t^2}, \quad t > 0.$$

В самом деле, достаточно положить $\operatorname{Re}(\xi\bar{q})$, подставить в это неравенство $t = 1$, заметить, что $\chi_\eta(1) = \chi_\xi(q)$, и учесть, что $\{\omega: |\xi(\omega)| < 1/|q|\} \subset \{\omega: |\operatorname{Re}(\xi(\omega)\bar{q})| < 1\}$.

Ключевым моментом доказательства теоремы является лемма 1. Она позволяет доказать теорему (без априорного требования существования дисперсии у ξ) использованием только широко известных вероятностных понятий и утверждений и элементарных рассуждений в двух остальных леммах. Лемма с таким же назначением была применена и при доказательстве теоремы Пойа в комплексном случае. Но там задача была проще — надо было исследовать систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными: дисперсиями ξ' и ξ'' и ковариацией между ними.

Доказательство леммы 1. В кватернионном случае будет 10 неизвестных, а именно, дисперсии случайных величин $\xi', \xi'', \xi''', \xi^{IV}$ и ковариации в шести парах из них. Для удобства обозначений дисперсии запишем в форме ковариаций — например, дисперсию ξ' запишем как ковариацию $\operatorname{cov}(\xi', \xi')$, которая в свою очередь, будет обозначаться ρ_{11} . Далее, пусть $\rho_{12} = \operatorname{cov}(\xi', \xi'')$, $\dots$, $\rho_{34} = \operatorname{cov}(\xi''', \xi^{IV})$, $\rho_{44} = \operatorname{cov}(\xi^{IV}, \xi^{IV})$. Таким образом, неизвестными будут эти ковариации. Занумеруем их

в следующем порядке: $\rho_{11}, \rho_{22}, \rho_{33}, \rho_{44}, \rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{14}, \rho_{23}, \rho_{24}, \rho_{34}$. Коэффициентами при этих неизвестных будут простейшие линейные комбинации чисел $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34}$, где $a_{11} = \sum_{h=1}^n a_h'^2, \dots, a_{44} = \sum_{h=1}^n a_h^{IV^2}, a_{12} = \sum_{h=1}^n a_h' a_h'', \dots, a_{34} = \sum_{h=1}^n a_h''' a_h^{IV}$. Явные выражения этих коэффициентов через заданные в лемме кватернионы $a_1, \dots, a_n$ легко находятся из условия леммы о равенстве матриц ковариаций случайных векторов $\hat{\xi} = (\xi', \xi'', \xi''', \xi^{IV})$ и $\hat{\eta} = (\eta', \eta'', \eta''', \eta^{IV})$. Ниже приводится (10×10) -матрица соответствующей линейной однородной системы алгебраических уравнений с неизвестными ρ_{pq} и коэффициентами $a_{pq}, 1 \leq p, q \leq 4, p \leq q$, занумерованными по указанной выше нумерации неизвестных.

Матрицу коэффициентов обозначим буквой M . Той же буквой будем обозначать и саму систему уравнений. Очевидно, что эта система имеет такое решение, в котором все четыре дисперсии имеют одинаковые значения и все остальные ковариации равны нулю. Мы должны показать, что других решений нет. Выпишем матрицу M , перечислив все элементы в каждой из ее десяти строк:

$$\begin{aligned}
 &(a_{11} - 1, a_{22}, a_{33}, a_{44}, -2a_{12}, -2a_{13}, -2a_{14}, 2a_{23}, 2a_{24}, 2a_{34}), \\
 &(a_{22}, a_{11} - 1, a_{44}, a_{33}, 2a_{12}, -2a_{24}, 2a_{23}, -2a_{14}, 2a_{13}, -2a_{34}), \\
 &(a_{33}, a_{44}, a_{11} - 1, a_{22}, 2a_{34}, 2a_{13}, -2a_{23}, 2a_{14}, -2a_{24}, -2a_{12}), \\
 &(a_{44}, a_{33}, a_{22}, a_{11} - 1, -2a_{34}, 2a_{24}, 2a_{14}, -2a_{23}, -2a_{13}, 2a_{12}), \\
 &(a_{12}, -a_{12}, a_{34}, -a_{34}, a_{11} - a_{22} - 1, -a_{14} - a_{23}, a_{13}a_{24}, -a_{13} \\
 &\quad + a_{24}, -a_{14} - a_{23}, -a_{33} + a_{44}), \\
 &(a_{13}, -a_{24}, -a_{13}, a_{24}, a_{14} - a_{23}, a_{11} - a_{33} - 1, -a_{12} - a_{34}, -a_{12} \\
 &\quad - a_{34}, a_{22} - a_{44}, -a_{14} + a_{23}), \\
 &(a_{14}, a_{23}, -a_{23}, -a_{14}, -a_{13} - a_{24}, a_{12} - a_{34}, a_{11} - a_{44} - 1, -a_{22} \\
 &\quad + a_{33}, -a_{12} + a_{34}, -a_{13} - a_{24}), \\
 &(a_{23}, a_{14}, -a_{14}, -a_{23}, a_{13} + a_{24}, a_{12} - a_{34}, -a_{22} + a_{33}, a_{11} \\
 &\quad - a_{44} - 1, -a_{12} + a_{34}, a_{13} + a_{24}), \\
 &(a_{24}, -a_{13}, -a_{24}, a_{13}, a_{14} - a_{23}, a_{22} - a_{44}, a_{12} + a_{34}, a_{12} \\
 &\quad + a_{34}, a_{11} - a_{33} - 1, -a_{14} + a_{23}), \\
 &(a_{34}, -a_{34}, a_{12}, -a_{12}, -a_{33} + a_{44}, a_{14} + a_{23}, a_{13} - a_{24}, -a_{13} \\
 &\quad + a_{24}, a_{14} + a_{23}, a_{11} - a_{22} - 1).
 \end{aligned}$$

Сложив первые 4 уравнения системы M , получим утверждение 1) леммы. Теперь из системы M составим систему M_1 трех уравнений с тремя неизвестными следующим образом: в качестве уравнений системы M_1 возьмем сумму первых двух, разность 6-го и 9-го и сумму 7-го и 8-го уравнений системы M . Роль неизвестных будут играть $x_1 = \rho_{11} + \rho_{22} - \rho_{33} - \rho_{44}, y_1 = \rho_{13} - \rho_{24}$ и $z_1 = \rho_{14} + \rho_{23}$. Аналогичным образом составим две другие системы M_2 и M_3 . M_2 будет обозначать систему, которая получится из системы M суммированием первого и третьего, 5-го и 10-го уравнений и вычитанием 8-го уравнения из 7-го. Чтобы получить M_3 , надо сложить второе и третье, вычесть 10-е из 5-го и сложить 6-е и 9-е уравнения. Роль неизвестных в этих двух случаях будут играть соответственно тройки $x_2 = \rho_{11} - \rho_{22} + \rho_{33} - \rho_{44}, y_2 = \rho_{12} + \rho_{34}, z_2 = \rho_{14} - \rho_{23}$ и $x_3 = \rho_{11} - \rho_{22} - \rho_{33} + \rho_{44}, y_3 = \rho_{12} - \rho_{34}, z_3 = \rho_{13} + \rho_{24}$. Очевидно, что если все три детерминанта, определяющие системы уравнений M_1, M_2 и M_3 , отличны от нуля, то все три системы M_1, M_2 и M_3 будут иметь только нулевые решения, т.е. все три тройки неизвестных $(x_r, y_r, z_r), r = 1, 2, 3$, будут нулевыми. Отсюда будет очевидно следовать, что $\rho_{11} = \rho_{22} = \rho_{33} = \rho_{44}$ и $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{23} = \rho_{24} = \rho_{34} = 0$. Следовательно, для завершения доказательства леммы надо показать, что если заданные кватернионы $a_1, \dots, a_n$ составляют СКС, то все три детерминанта отличны

от нуля. Выпишем матрицу системы M_1 :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -(a_{33} + a_{44}) & -2(a_{13} + a_{24}) & -2(a_{14} - a_{23}) \\ a_{13} - a_{24} & -2(a_{22} + a_{33}) & -2(a_{12} + a_{34}) \\ a_{14} + a_{23} & 2(a_{12} - a_{34}) & -2(a_{22} + a_{44}) \end{pmatrix}$$

и представим ее детерминант в следующем виде:

$$\begin{aligned} & -4[(a_{33} + a_{44})(a_{22} + a_{33})(a_{22} + a_{44}) + (a_{33} + a_{44})(a_{12}^2 - a_{34}^2) \\ & + (a_{22} + a_{44})(a_{13}^2 - a_{24}^2) - (a_{13} + a_{24})(a_{12} + a_{34})(a_{14} + a_{23}) \\ & + (a_{14} - a_{23})(a_{13} - a_{24})(a_{12} - a_{34}) + (a_{22} + a_{33})(a_{14}^2 - a_{23}^2)]. \end{aligned}$$

Если записать аналогичным образом детерминанты систем M_2 и M_3 , то легко заметить, что все три детерминанта равны по абсолютной величине. Поэтому достаточно показать, что отличен от нуля один из них, например детерминант системы M_1 . Элементарными (но несколько громоздкими) преобразованиями выражение $-\frac{1}{4} \det(M_1)$ можно привести к следующему виду, более удобному для нашей цели:

$$\begin{aligned} & (a_{22} + a_{33})(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + (a_{22} + a_{44})(a_{22}a_{44} - a_{24}^2) \\ & + (a_{33} + a_{44})(a_{33}a_{44} - a_{34}^2) + (a_{33}a_{14}^2 + a_{44}a_{13}^2 - 2a_{13}a_{14}a_{34}) \\ & + (a_{22}a_{13}^2 + a_{33}a_{12}^2 - 2a_{12}a_{13}a_{23}) + (a_{22}a_{14}^2 + a_{44}a_{12}^2 - 2a_{12}a_{14}a_{24}) \\ & + 2(a_{22}a_{33}a_{44} - a_{23}a_{24}a_{34}). \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что это выражение не равно нулю (положительно). Покажем сначала, что сумма первых трех слагаемых положительна. Неотрицательность каждого из этих слагаемых непосредственно следует из неравенства Коши. Положительность хотя бы одного из них вытекает из условия леммы о том, что заданные кватернионы образуют совместно кватернионную систему, и из того, что неравенство Коши превращается в равенство только для коллинеарных векторов. Для завершения доказательства леммы достаточно показать, что каждое из оставшихся слагаемых неотрицательно. Неотрицательность четвертого слагаемого дает легко проверяемая цепочка неравенств $a_{33}a_{14}^2 + a_{44}a_{13}^2 \geq 2(a_{33}a_{44})^{1/2} |a_{14}a_{13}| \geq 2|a_{34}a_{14}a_{13}|$. Доказательство в случае двух последующих слагаемых аналогично. Наконец, неотрицательность последнего слагаемого вытекает из неравенства Коши $|a_{23}| \leq (a_{22}a_{33})^{1/2}$ и двух аналогичных неравенств для a_{24} и a_{34} .

Доказательство теоремы проходит по схеме доказательства для комплексных случайных величин. Так как $\operatorname{Re}(a\xi\bar{q}) = \operatorname{Re}(\xi\bar{q}a) = \operatorname{Re}(\xi\bar{a}\bar{q})$, то по условиям теоремы

$$\chi_\xi(q) = \chi_\xi(\bar{a}_1q) \cdots \chi_\xi(\bar{a}_nq), \quad q \in \mathbf{Q}. \quad (5)$$

Сначала предположим, что функция χ_ξ симметрична и принимает только неотрицательные значения. При этом предположении χ_ξ нигде не обращается в нуль. В самом деле, если $\chi_\xi(q) = 0$, то, согласно равенству (5), $\chi_\xi(\bar{a}_hq) = 0$ для некоторого h , $1 \leq h \leq n$. То же равенство (5) для точки $\bar{a}_hq$ показывает, что χ_ξ обращается в нуль также в точке $\bar{a}_{h_1}\bar{a}_hq$ для некоторого значения h_1 . Согласно равенству (4), из которого следует, что $|a_h| < 1$ для всех h , эта новая точка будет ближе к нулю, чем первая. Продолжая этот процесс, получаем, что χ_ξ принимает нулевые значения в точках, лежащих в сколь угодно малой окрестности нуля. Но это невозможно. Следовательно, функция χ_ξ нигде не обращается в нуль и поэтому ее можно представить в виде

$$\chi_\xi(q) = \exp(-\psi(q)), \quad q \in \mathbf{Q}, \quad (6)$$

где ψ — непрерывная симметричная функция. Ясно, что $\psi(0) = 0$ и $\psi(q) \geq 0$ для всех q . Мы должны показать, что $\psi(q) = c|q|^2$ для некоторого $c > 0$ и всех q . Обозначим $\varphi(q) = \psi(q)/|q|^2$ для $q \neq 0$. Соотношения (5) и (6) приводят к равенству

$$\varphi(q) = \sum_{h=1}^n |a_h|^2 \varphi(\bar{a}_hq), \quad q \neq 0.$$

Согласно условию (3) и лемме 3, для всех ненулевых q существует такая последовательность (q_m) , что $q_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ и $\varphi(q_m) = \varphi(q)$ для всех $m = 1, 2, \dots$. Теперь мы применим лемму 2, беря в качестве q последовательно кватернионы $q_1, q_2, \dots$, и после деления на $|q_m|^2$ соответствующего неравенства леммы 2, получим неравенство

$$\int_{\Omega} \left[\operatorname{Re}(\xi(\omega)e_m) \right]^2 I_m(\omega) \mathbf{P}(d\omega) \leq 3\varphi(q), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где $e_m = \bar{q}_m/|q_m|$ и I_m обозначает индикатор множества $\{\omega: |\xi(\omega)q_m| < 1\}$.

Очевидно, что последовательность кватернионов (e_m) компактна и из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Предел этой подпоследовательности обозначим через $e = e(\xi)$ (очевидно, что $|e| = 1$). Следовательно, последовательность подынтегральных функций в (7) сходится почти всюду к функции $[\operatorname{Re}(\xi e)]^2$, которая интегрируема в силу леммы Фату с учетом неравенства (7). Из этого факта мы хотим вывести интегрируемость квадрата модуля ξ .

Рассмотрим сумму $\eta = \xi + i\xi_1 + j\xi_2 + k\xi_3$, где ξ_1, ξ_2 и ξ_3 совместно с ξ представляют собой независимые одинаково распределенные симметричные случайные величины. Проведенные только что рассуждения показывают, что $\mathbf{E}[\operatorname{Re}(\eta e)]^2 < \infty$, где $e = e(\eta)$ теперь обозначает какую-нибудь нормированную предельную точку, соответствующую случайной величине η вместо ξ . Очевидно, что $\eta, i\eta, j\eta$ и $k\eta$ имеют одно и то же распределение в силу независимости случайных величин ξ, ξ_1, ξ_2 и ξ_3 , их одинаковой распределенности и симметричности. Поэтому вместе с $\operatorname{Re}(\eta e)$ интегрируемы в квадрате также и случайные величины $\operatorname{Re}(i\eta e)$, $\operatorname{Re}(j\eta e)$ и $\operatorname{Re}(k\eta e)$.

Элементарные вычисления показывают, что сумма квадратов интегралов всех этих четырех случайных величин совпадает с интегралом квадрата модуля ξ . Следовательно, $\mathbf{E}|\xi|^2 < \infty$. Остается показать, что φ есть константа. По нашему временному допущению симметричности функции χ_ξ , частные производные первого порядка функции ψ по q', q'', q''' и q^{IV} равны нулю при $q = 0$. Кроме того, в силу леммы 1 ковариационная матрица S пропорциональна единичной матрице. Стало быть, по формуле Тейлора в окрестности нуля имеем равенство

$$\psi(q) = \frac{1}{8}|q|^2 \mathbf{E}|\xi|^2 + o(|q|^2),$$

которое показывает существование предела функции φ в нуле и тем самым заканчивает доказательство при нашем временном допущении. Для доказательства в общем случае рассмотрим случайную величину $\xi - \tilde{\xi}$, где $\tilde{\xi}$ — независимая от ξ копия ξ . Ясно, что функция $|\chi_\xi|^2$ симметрична, неотрицательна и удовлетворяет условию (5). Поэтому $\xi - \tilde{\xi}$ является Q -гауссовской, а значит, и R -гауссовской случайной величиной. Отсюда по известной теореме Крамера легко следует R -гауссовость случайной величины ξ , а поэтому и ее Q -гауссовость согласно лемме 1 и рассуждениям при выводе формулы (3). Доказательство теоремы закончено.

З а м е ч а н и е. Теорему Пойя для кватернионных случайных величин мы доказали для случая, когда все коэффициенты a_h участвующей в теореме линейной формы η стоят слева от случайной величины ξ_h . Легко видеть, что доказательство в принципе не изменится, если все коэффициенты будут стоять справа. Однако это можно показать проще: если $\xi_1 a_1 + \dots + \xi_n a_n$ имеет такое же распределение, как ξ , то случайная величина $\xi_1 a_1 + \dots + \xi_n a_n = \bar{a}_1 \xi_1 + \dots + \bar{a}_n \xi_n$ распределена как ξ . Следовательно, $\bar{\xi}$ (а поэтому и ξ) есть Q -гауссовская случайная величина. Было бы интересно выяснить, справедлива ли теорема в случае, когда часть коэффициентов стоит слева, а часть — справа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вахания Н. Н. Случайные векторы со значениями в кватернионных гильбертовых пространствах. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 1, с. 18–40.
2. Vakhania N. N. Polya's characterization theorem for complex random variables. — J. Complexity, 1997, v. 13, № 4, p. 480–488.
3. Лозэв М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 719 с.

Поступила в редакцию
4.III.2009

© 2009 г.

ГРИНЬ А. Г.*

**О МИНИМАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ СЛАБОЙ ЗАВИСИМОСТИ
В ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ¹⁾**

Получены минимальные в некотором смысле условия слабой зависимости для стационарных последовательностей, обеспечивающие сходимость распределений нормированных сумм членов этой последовательности к устойчивым законам.

Ключевые слова и фразы: стационарные последовательности, условия слабой зависимости, предельные теоремы, устойчивые распределения.

В заметке [1] получены необходимые и достаточные условия (включающие в себя условия слабой зависимости) для стационарных последовательностей, обеспечивающие выполнение центральной предельной теоремы. В данной работе аналогичные необходимые и достаточные условия получены для теорем о сходимости к устойчивым распределениям.

Всюду в настоящей работе $\{\xi_n\} = \{\xi_n, n \in \mathbf{Z}\}$ будет обозначать стационарную в узком смысле последовательность, и пусть $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. Как и в [1], будем писать $\xi \stackrel{d}{=} \eta$, $\eta_n \xrightarrow{d} \eta$ и $\eta_n \stackrel{d}{\sim} \theta_n$ в случаях, когда соответственно распределения ξ и η совпадают, $\{\eta_n\}$ сходится к η по распределению и когда последовательности $\{\eta_n\}$ и $\{\theta_n\}$ слабо эквивалентны (см., например, [2, п. 28.1]). Слабая эквивалентность равносильна поточечной сходимости разности характеристических функций величин $\{\eta_n\}$ и $\{\theta_n\}$ к нулю при $n \rightarrow \infty$ [2, п. 28.1, с. 393]. Обозначим через $\mathcal{N}(0, 1)$ случайную величину, имеющую нормальное распределение с параметрами 0 и 1, а через $\text{St}(\alpha)$ — случайную величину, имеющую устойчивое распределение с показателем α .

Если при некотором выборе нормирующих констант A_n и $B_n \rightarrow \infty$

$$B_n^{-1} S_n - A_n \xrightarrow{d} \text{St}(\alpha), \quad n \rightarrow \infty, \quad 0 < \alpha \leq 2,$$

то будем говорить, что для последовательности $\{\xi_n\}$ справедлива теорема о сходимости к устойчивому закону с показателем α .

Следуя [3], назовем $\{b_n, n = 1, 2, \dots\}$ правильно меняющейся последовательностью порядка ρ , если $b_{[x]}, x > 0$, является правильно меняющейся функцией порядка ρ , где $[x]$ — целая часть x .

* Омский государственный университет, пр-т Мира, 55а, 644077 Омск, Россия;
e-mail: griniran@gmail.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-01-00127).