Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Гринь, О минимальных условиях слабой зависимости в предельных теоремах для стационарных последовательностей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 2, 344–354

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2707>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 12:43:42

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вахания Н. Н. Случайные векторы со значениями в кватернионных гильбертовых пространствах. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 1, с. 18–40.
2. Vakhania N. N. Polya's characterization theorem for complex random variables. — J. Complexity, 1997, v. 13, № 4, p. 480–488.
3. Лозэв М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 719 с.

Поступила в редакцию
4.III.2009

© 2009 г.

ГРИНЬ А. Г.*

**О МИНИМАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ СЛАБОЙ ЗАВИСИМОСТИ
В ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ¹⁾**

Получены минимальные в некотором смысле условия слабой зависимости для стационарных последовательностей, обеспечивающие сходимость распределений нормированных сумм членов этой последовательности к устойчивым законам.

Ключевые слова и фразы: стационарные последовательности, условия слабой зависимости, предельные теоремы, устойчивые распределения.

В заметке [1] получены необходимые и достаточные условия (включающие в себя условия слабой зависимости) для стационарных последовательностей, обеспечивающие выполнение центральной предельной теоремы. В данной работе аналогичные необходимые и достаточные условия получены для теорем о сходимости к устойчивым распределениям.

Всюду в настоящей работе $\{\xi_n\} = \{\xi_n, n \in \mathbf{Z}\}$ будет обозначать стационарную в узком смысле последовательность, и пусть $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. Как и в [1], будем писать $\xi \stackrel{d}{=} \eta$, $\eta_n \xrightarrow{d} \eta$ и $\eta_n \stackrel{d}{\sim} \theta_n$ в случаях, когда соответственно распределения ξ и η совпадают, $\{\eta_n\}$ сходится к η по распределению и когда последовательности $\{\eta_n\}$ и $\{\theta_n\}$ слабо эквивалентны (см., например, [2, п. 28.1]). Слабая эквивалентность равносильна поточечной сходимости разности характеристических функций величин $\{\eta_n\}$ и $\{\theta_n\}$ к нулю при $n \rightarrow \infty$ [2, п. 28.1, с. 393]. Обозначим через $\mathcal{N}(0, 1)$ случайную величину, имеющую нормальное распределение с параметрами 0 и 1, а через $\text{St}(\alpha)$ — случайную величину, имеющую устойчивое распределение с показателем α .

Если при некотором выборе нормирующих констант A_n и $B_n \rightarrow \infty$

$$B_n^{-1} S_n - A_n \xrightarrow{d} \text{St}(\alpha), \quad n \rightarrow \infty, \quad 0 < \alpha \leq 2,$$

то будем говорить, что для последовательности $\{\xi_n\}$ справедлива теорема о сходимости к устойчивому закону с показателем α .

Следуя [3], назовем $\{b_n, n = 1, 2, \dots\}$ правильно меняющейся последовательностью порядка ρ , если $b_{[x]}, x > 0$, является правильно меняющейся функцией порядка ρ , где $[x]$ — целая часть x .

* Омский государственный университет, пр-т Мира, 55а, 644077 Омск, Россия;
e-mail: griniran@gmail.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-01-00127).

Так же как и в случае центральной предельной теоремы, заметим, что теоремы о сходимости к устойчивым законам могут иметь место при сколь угодно сильно зависимых слагаемых; примеры можно строить на тех же идеях, что и в [1], скажем, $\xi_n = \text{St}(\alpha)$, $n = 1, 2, \dots$, в этих примерах $B_n \sim n$, $n \rightarrow \infty$.

Вместе с тем в предельных теоремах для последовательностей с сильным перемешиванием, равномерно сильным перемешиванием, полной регулярностью устойчивое предельное распределение с показателем α может иметь место лишь в случае, когда масштабная нормировка осуществляется правильно меняющимися последовательностями порядка $1/\alpha$ (см., например, [4, теорема 18.1.1]). При $\alpha \neq 1$ предположение о том, что B_n является правильно меняющейся последовательностью порядка $1/\alpha$, в дальнейшем понадобится нам для того, чтобы «отсеивать» последовательности, не обладающие слабой зависимостью, подобные тем, о которых говорилось выше.

Пусть $0 < p < 2$, $\|\xi\|_p = (\mathbf{E}|\xi|^p)^{1/p}$, μ_n — медиана S_n , $\tilde{S}_n = S_n - \mu_n$, $B_n(p) = \|\tilde{S}_n\|_p / \|\mathcal{N}(0, 1)\|_p$. Последовательностями типа $B_n(p)$ осуществляется масштабная нормировка в теоремах о сходимости к нормальному закону для последовательностей, удовлетворяющих условию φ -перемешивания, сильного перемешивания и пр. (см., например, [5], [6]). Будем также обозначать $\mathbf{E}\{\xi, A\} = \mathbf{E}\xi \mathbf{1}(A)$. Через $\xi_1^\sharp, \dots, \xi_n^\sharp$ обозначим независимые случайные величины такие, что $\xi_k^\sharp \stackrel{d}{=} \xi_k$, $k = 1, \dots, n$.

Теорема 1. Пусть стационарная последовательность $\{\xi_n\}$ такова, что $\mathbf{E}|\xi_n|^p < \infty$, $0 < p < 2$. Для того чтобы имела место сходимость

$$B_n^{-1}(p)\tilde{S}_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

и $\{B_n(p)\}$ являлась правильно меняющейся последовательностью порядка $1/2$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условие

$$\frac{\tilde{S}_{n+m}}{B_{n+m}(p)} \stackrel{d}{\sim} \frac{\tilde{S}_n^\sharp}{B_{n+m}(p)} + \frac{\tilde{S}_m^\sharp}{B_{n+m}(p)}, \quad n+m \rightarrow \infty, \quad (R_2)$$

и «аналог условия Линдберга» порядка p : при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} k B_{nk}^{-p}(p) \mathbf{E}\{|\tilde{S}_n|^p, |\tilde{S}_n| \geq \varepsilon B_{nk}(p)\} = 0. \quad (L_p)$$

Доказательство теоремы приводится ниже.

З а м е ч а н и е 1. Можно сформулировать следующий вариант теоремы 1, если предположить, что $\mathbf{E}|\xi_1| < \infty$. Пусть $\hat{S} = S_n - \mathbf{E}S_n$, $B_n = \mathbf{E}|\hat{S}|/\mathbf{E}|\mathcal{N}(0, 1)|$. Для того чтобы имела место сходимость

$$B_n^{-1}\hat{S} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty,$$

и $\{B_n\}$ являлась правильно меняющейся последовательностью порядка $1/2$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: последовательность $\{B_n^{-1}|\hat{S}|\}$ равномерно интегрируема,

$$\frac{S_{n+m}}{B_{n+m}} \stackrel{d}{\sim} \frac{S_n^\sharp}{B_{n+m}} + \frac{S_m^\sharp}{B_{n+m}}, \quad n+m \rightarrow \infty, \quad (R_2^*)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} k \mathbf{P}\{|\hat{S}| \geq \varepsilon B_{nk}\} = 0 \quad \text{при любом } \varepsilon > 0.$$

З а м е ч а н и е 2. Сформулированный в замечании 1 результат аналогично [1] можно интерпретировать так: условие (R_2^*) является минимальным условием слабой зависимости, при котором выполняется теорема о сходимости к нормальному закону, в которой масштабная нормировка осуществляется правильно меняющейся последовательностью порядка $1/2$. Очевидно, что приводимые условия не являются эффективно проверяемыми, но они могут являться некими ориентирами при получении, скажем, проверяемых достаточных условий сходимости к нормальному закону. Как

и в [1], можно показать, что из условий сильного перемешивания, равномерно сильного перемешивания, ρ -перемешивания следует условие (R_2^*) , но не наоборот, так как условие (R_2^*) — это слабая зависимость сумм, а не слагаемых.

З а м е ч а н и е 3. В доказательстве теоремы 1 при выводе условия (R_2) из соотношения (1) будет использован только факт правильного изменения последовательности $\{B_n(p)\}$ и не используется ее конкретный вид. Это означает, что при любой нормирующей последовательности $\{B_n\}$ в (1) условие (R_2) сохранит свой вид (с заменой $B_n(p)$ на B_n), если только $\{B_n\}$ будет правильно меняющейся последовательностью порядка $1/2$.

Ситуация принципиально меняется при рассмотрении теорем о сходимости к устойчивым распределениям с показателями $0 < \alpha < 2$. Прежде всего, предположение о том, что нормирующая последовательность $\{B_n\}$ является правильно меняющейся порядка $1/\alpha$, может и не «отсеивать» последовательности со сколь угодно сильно зависими членами. Пусть, например, $\xi_n = \xi$, $n = 1, 2, \dots$, где ξ имеет распределение Коши с характеристической функцией $e^{-|t|}$. Это устойчивое распределение с показателем $\alpha = 1$, $n^{-1}S_n \stackrel{d}{=} \xi$, $n = 1, 2, \dots$, и $B_n = n$ является правильно меняющейся последовательностью порядка 1.

Далее, из теоремы о сходимости к устойчивому распределению с показателем $0 < \alpha < 2$ следует условие типа R_2^* (условие R_α в теореме 2 далее), но этого («слабой зависимости сумм, а не слагаемых») уже недостаточно, чтобы обеспечить справедливость результатов, аналогичных предельным теоремам для независимых величин.

Рассмотрим следующий пример. Пусть $\{\eta_n\}$ и $\{\zeta_n\}$ — независимые последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин таких, что $\eta_n \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, 1)$, $\zeta_n \stackrel{d}{=} \text{St}(\alpha)$, $0 < \alpha < 2$, $n = 1, 2, \dots$. Положим $\xi_n = \eta_n + \zeta_{n+1} - \zeta_n$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда величины ξ_i и ξ_j независимы при $|i - j| > 1$ и, следовательно, последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет любому из условий слабой зависимости, упомянутых в замечании 2 (и, в частности, условию (R_α)). Далее, нетрудно показать, что распределение величины ξ_1 принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем α , т.е.

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \geq x\} = \frac{c_1 + o(1)}{x^\alpha} h(x), \quad \mathbf{P}\{\xi_1 < -x\} = \frac{c_2 + o(1)}{x^\alpha} h(x), \quad (2)$$

где $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 > 0$, $0 < \alpha < 2$, а $h(x)$ — медленно меняющаяся функция при $x \rightarrow +\infty$ (см. [4, теорема 2.6.1]). Но при этом

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \xi_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \eta_i + \frac{\zeta_{n+1} - \zeta_1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty,$$

и, следовательно, ни при какой масштабной нормировке предельным распределением сумм $\sum_{i=1}^n \xi_i$ не может быть устойчивое распределение с показателем $0 < \alpha < 2$; этот факт является следствием зависимости *соседних слагаемых* в сумме $\sum_{i=1}^n \xi_i$.

Кроме этого, в теоремах о сходимости к устойчивым распределениям с показателями $0 < \alpha < 2$ условие слабой зависимости (условие (R_α)) зависит от вида масштабной нормировки (см. замечание 5 далее).

Сформулируем результат о минимальных условиях слабой зависимости в теоремах о сходимости к устойчивым распределениям с той же нормировкой, что в предельных теоремах для последовательностей независимых одинаково распределенных величин.

Пусть $h(x)$ — медленно меняющаяся функция из соотношений (2), а последовательность $\{b_n(\alpha)\}$ такова, что $nb_n^{-\alpha}(\alpha)h(b_n(\alpha)) \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$. Такая последовательность существует, является правильно меняющейся порядка $1/\alpha$ и константами вида $b_n(\alpha)$ осуществляется масштабная нормировка в теоремах о сходимости к устойчивым распределениям с показателем α для последовательностей независимых одинаково распределенных величин [7, гл. XVII, § 5, теорема 3, с. 649]. Далее, пусть $a_n = 0$,

если $0 < \alpha < 1$, $a_n = n \mathbf{E} \xi_1$, если $1 < \alpha < 2$, и $a_n = n \mathbf{E} \sin(b_n^{-1}(\alpha) \xi_1)$ при $\alpha = 1$, и пусть $S_n^* = \sum_{i=1}^n \xi_i - a_n$. Будем обозначать $\text{St}(\alpha, c_1, c_2)$ случайную величину, характеристическая функция которой равна (см. [4, теорема 2.2.2])

$$f_\alpha(t) = \exp \left\{ it\gamma - c|t|^\alpha \left(1 - i\beta \frac{t}{|t|} \omega(t, \alpha) \right) \right\},$$

где $\beta = (c_1 - c_2)/(c_1 + c_2)$ и при $\alpha \neq 1$

$$\gamma = 0, \quad c = (c_1 + c_2)\Gamma(1 - \alpha), \quad \omega(t, \alpha) = \text{tg} \left(\frac{\pi}{2} \alpha \right),$$

а при $\alpha = 1$

$$\gamma = \int_0^\infty \left(\frac{\sin u}{u^2} - \frac{1}{u(1+u^2)} \right) du, \quad c = (c_1 + c_2) \frac{\pi}{2}, \quad \omega(t, \alpha) = \frac{2}{\pi} \ln |t|.$$

Теорема 2. Пусть у стационарной последовательности $\{\xi_n\}$ распределение величины ξ_1 удовлетворяет условию (2). Для того чтобы $b_n^{-1}(\alpha) S_n^* \xrightarrow{d} \text{St}(\alpha, c_1, c_2)$, $n \rightarrow \infty$, $0 < \alpha < 2$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

а)

$$\frac{S_{n+m}}{b_{n+m}(\alpha)} \xrightarrow{d} \frac{S_n^\#}{b_{n+m}(\alpha)} + \frac{S_m^\#}{b_{n+m}(\alpha)}, \quad n + m \rightarrow \infty; \quad (\text{R}_\alpha)$$

б) при любом $x > 0$ и при любой достаточно медленно растущей последовательности $k = k(n) \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$,

$$\mathbf{P}\{\pm S_n^* > x b_{nk}(\alpha)\} \sim n \mathbf{P}\{\pm \xi_n > x b_{nk}(\alpha)\}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{R}),$$

З а м е ч а н и е 4. 1) Пусть $\mathcal{F}_{\leq n}$ и $\mathcal{F}_{\geq n}$ — σ -алгебры, порожденные семействами $\{\xi_i: i \leq n\}$ и $\{\xi_i: i \geq n\}$. Если для некоторой функции $\lambda(x) > 0$ такой, что $\lambda(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$,

$$\sup \left\{ \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)\lambda(\mathbf{P}(B))}: A \in \mathcal{F}_{\leq 0}, B \in \mathcal{F}_{\geq 1} \text{ или } A \in \mathcal{F}_{\geq 1}, B \in \mathcal{F}_{\leq 0} \right\} < \infty$$

и выполнено условие сильного перемешивания, то имеют место (R_α) и (R) (см. [8]).

2) Если $\{\xi_n\}$ — стационарная последовательность, у которой распределение величины ξ_1 удовлетворяет условию (2),

$$\sup \left\{ \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}^r(A)\mathbf{P}^s(B)}: A \in \mathcal{F}_{\leq 0}, B \in \mathcal{F}_{\geq 1} \right\} < \infty, \quad \beta = r + s > 1,$$

и выполнено условие сильного перемешивания с коэффициентом перемешивания $\alpha(n)$ таким, что $\alpha(n) = O(n^\gamma)$, $\gamma > (\alpha\beta + 1)/(\beta - 1) - 1$, то имеют место (R_α) и (R) (см. [9]).

З а м е ч а н и е 5. Покажем, как вид масштабной нормировки влияет на вид минимальных условий слабой зависимости. Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная последовательность, распределение ξ_1 удовлетворяет условию (2), и пусть

$$B_n^{-1}(S_n - A_n) \xrightarrow{d} \text{St}(\alpha, c_1, c_2), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где $\{B_n\}$ — правильно меняющаяся последовательность порядка $1/\alpha$. Тогда если $m = m(n) \sim B_n^\alpha/h(B_n)$, то $B_n \sim b_m(\alpha)$, $n \rightarrow \infty$. В силу теоремы 2.6.1 из [4]

$$b_m^{-1}(\alpha) \left(\sum_{j=1}^m \xi_j^\# - a_m \right) \xrightarrow{d} \text{St}(\alpha, c_1, c_2), \quad n \rightarrow \infty.$$

Последовательность $b_n(\alpha)$ также является правильно меняющейся порядка $1/\alpha$, так что если $k = k(n) \rightarrow \infty$ — достаточно медленно растущая последовательность, то

$B_{nk} \sim k^{1/\alpha} B_n \sim k^{1/\alpha} b_m(\alpha) \sim b_{mk}(\alpha)$. Применив к последовательности $\{\xi_n^\# \}$ теорему 2, с помощью (3) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\pm(S_n - A_n) > xB_{nk}\} &\sim \mathbf{P}\left\{\pm\left(\sum_{j=1}^m \xi_j^\# - a_m\right) > xb_{mk}(\alpha)\right\} \\ &\sim m \mathbf{P}\{\pm\xi_n > xb_{mk}(\alpha)\} \sim m \mathbf{P}\{\pm\xi_n > xB_{nk}\}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Это соотношение может использоваться в качестве минимального условия слабой зависимости вместо условия (R).

Лемма 1. *Последовательность $\{B_n^\alpha\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка 1 (а B_n — правильно меняющейся последовательностью порядка $1/\alpha$), $0 < \alpha \leq 2$, тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$B_{n+m}^\alpha \sim B_n^\alpha + B_m^\alpha, \quad n + m \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Доказательство, по существу, повторяет доказательство леммы 1 в [1].

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть выполнено соотношение (1) и $B_n(p)$ является правильно меняющейся последовательностью порядка $1/2$. Тогда

$$B_n^{-p}(p) |\tilde{S}_n|^p \xrightarrow{d} |\mathcal{N}(0, 1)|^p, \quad n \rightarrow \infty, \quad B_n^{-p}(p) \mathbf{E} |\tilde{S}_n|^p = \mathbf{E} |\mathcal{N}(0, 1)|^p$$

и при любом натуральном k (не зависящем от n)

$$B_{nk}^p(p) \sim k^{p/2} B_n^p(p), \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} k B_{nk}^{-p}(p) \mathbf{E} \{|\tilde{S}_n|^p, |\tilde{S}_n| \geq \varepsilon B_{nk}(p)\} \\ = \limsup_{n \rightarrow \infty} k^{1-p/2} B_n^{-p}(p) \left[\mathbf{E} |\tilde{S}_n|^p - \mathbf{E} \{|\tilde{S}_n|^p, |\tilde{S}_n| < \varepsilon B_{nk}(p)\} \right] \\ = k^{1-p/2} \left[\mathbf{E} |\mathcal{N}(0, 1)|^p - \mathbf{E} \{|\mathcal{N}(0, 1)|^p, |\mathcal{N}(0, 1)| < \varepsilon \sqrt{k}\} \right] \\ = k^{1-p/2} \mathbf{E} \left\{ |\mathcal{N}(0, 1)|^p, |\mathcal{N}(0, 1)| \geq \varepsilon \sqrt{k} \right\} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

т.е. выполняется условие (L_p) .

Далее, из (1) следует, что при любом $t \in \mathbf{R}$

$$\mathbf{E} \exp\{itB_n^{-1}(p)\tilde{S}_n\} \rightarrow \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Пусть $t \in \mathbf{R}$ и $m = m(n)$. Обозначим

$$\Delta(n) = \left| \mathbf{E} \exp\left\{\frac{it\tilde{S}_{n+m}}{B_{n+m}(p)}\right\} - \mathbf{E} \exp\left\{\frac{it\tilde{S}_n}{B_{n+m}(p)}\right\} \mathbf{E} \exp\left\{\frac{it\tilde{S}_m}{B_{n+m}(p)}\right\} \right|.$$

Как указывалось выше, выполнение соотношения $\Delta(n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, при любом $t \in \mathbf{R}$ равносильно условию (R_2) .

Поскольку $B_n^2(p)$ — правильно меняющаяся последовательность порядка 1, то в силу леммы 1

$$B_{n+m}^2(p) \sim B_n^2(p) + B_m^2(p), \quad n \rightarrow \infty,$$

так что для любой последовательности натуральных чисел $\{n_1\}$ существуют константа $0 \leq c \leq 1$ и подпоследовательность $\{n_2\} \subseteq \{n_1\}$ такие, что

$$B_{n_2+m_2}^{-2}(p) B_{n_2}^2(p) \rightarrow c, \quad B_{n_2+m_2}^{-2}(p) B_{m_2}^2(p) \rightarrow 1 - c, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $m_2 = m(n_2)$. Если $c = 0$ ($c = 1$), то при $n \rightarrow \infty$

$$B_{n_2+m_2}^{-1}(p)\tilde{S}_{n_2} \rightarrow 0 \quad (B_{n_2+m_2}^{-1}(p)\tilde{S}_{m_2} \rightarrow 0)$$

по вероятности, следовательно, $\Delta(n_2) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Если же $0 < c < 1$, то в силу (5)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp\{itB_{n_2+m_2}^{-1}(p)\tilde{S}_{n_2+m_2}\} &\sim \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} = \exp\left\{-\frac{ct^2}{2}\right\} \\ &\times \exp\left\{-\frac{(1-c)t^2}{2}\right\} \sim \mathbf{E} \exp\{itB_{n_2+m_2}^{-1}(p)\tilde{S}_{n_1}\} \mathbf{E} \exp\{itB_{n_2+m_2}^{-1}(p)\tilde{S}_{m_2}\}, \end{aligned}$$

т.е. снова $\Delta(n_2) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, доказано, что из любой последовательности $\{\Delta(n_1)\}$ можно выделить сходящуюся к нулю подпоследовательность. Это означает, что $\Delta(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. выполнено условие (R_2) .

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть теперь выполнены условия (R_2) и (L_p) . Из условия (R_2) следует, что если последовательность $k = k(n)$ растет достаточно медленно, то

$$B_{nk}^{-1}(p)\tilde{S}_{nk} \stackrel{d}{\sim} \sum_{j=1}^k X_{j,n}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $X_{j,n}$, $j = 1, \dots, k$, $n = 1, 2, \dots$, — независимые случайные величины такие, что $X_{j,n} \stackrel{d}{=} B_{nk}^{-1}(p)\tilde{S}_n$, $j = 1, \dots, k$. Легко видеть, что из условия (L_p) следует равномерная интегрируемость последовательности $\{B_n^{-p}(p)|\tilde{S}_n|^p\}$. Из известной теоремы Прохорова (см., например, [10]) следует, что последовательность $\{B_n^{-1}(p)\tilde{S}_n\}$ является относительно компактной, так что из любой последовательности натуральных чисел можно выбрать подпоследовательность $\{n_1\}$, $n_1 = n_1(n)$, такую, что

$$\sum_{j=1}^{k_1} X_{j,n_1} \stackrel{d}{\sim} B_{n_1 k_1}^{-1}(p)\tilde{S}_{n_1 k_1} \xrightarrow{d} \xi, \quad (6)$$

где $k_1 = k(n_1)$, а ξ — случайная величина. При этом поскольку последовательность $\{B_n^{-p}(p)|\tilde{S}_n|^p\}$ равномерно интегрируема, то

$$\mathbf{E} \xi^p = \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \mathbf{E} B_{n_1}^{-p}(p)|\tilde{S}_{n_1}|^p = \mathbf{E} |\mathcal{N}(0, 1)|^p \quad (7)$$

[10, теорема 5.4]. Далее, в силу условия (L_p)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k_1} \mathbf{P}\{|X_{j,n}| \geq \varepsilon\} &= k_1 \mathbf{P}\{|\tilde{S}_{n_1}| \geq \varepsilon B_{n_1 k_1}(p)\} \\ &\leq k_1 \varepsilon^{-p} B_{n_1 k_1}^{-p}(p) \mathbf{E} \{|\tilde{S}_{n_1}|^p, |\tilde{S}_{n_1}| \geq \varepsilon B_{n_1 k_1}(p)\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (6) и (8) следует, что ξ имеет нормальное распределение [2, п. 22.5, с. 330], а из (7) и того, что у ξ нулевая медиана, получаем $\xi \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, 1)$. Таким образом, из любой подпоследовательности последовательности $\{B_{nk}^{-1}(p)\tilde{S}_{nk}\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся по распределению к $\mathcal{N}(0, 1)$. Это означает, что $B_{nk}^{-1}(p)\tilde{S}_{nk} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$, $n \rightarrow \infty$. В силу (8), $X_{k,n} \rightarrow 0$ по вероятности, следовательно,

$$B_{nk}^{-1}(p)(\tilde{S}_{n(k-1)} - \mu_{nk} + \mu_{n(k-1)}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Кроме того, $B_{n(k-1)}^{-1}(p)\tilde{S}_{n(k-1)} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$, $n \rightarrow \infty$, так что по теореме о сходимости типов [2, п. 13.2, с. 216]

$$B_{nk}^{-1}(p)B_{n(k-1)}(p) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Далее, пусть $n(k-1) \leq m < nk$. Из условия (R_2^*) и (9) получаем

$$B_{nk}^{-1}(p)\tilde{S}_{nk} \stackrel{d}{\sim} B_{n(k-1)}^{-1}(p)\tilde{S}_{n(k-1)} + Y_{n,1} + Y_{n,2}, \quad (10)$$

где $\tilde{S}_{n(k-1)}$, $Y_{n,1}$ и $Y_{n,2}$ — независимые случайные величины и

$$Y_{n,1} \stackrel{d}{=} B_{nk}^{-1}(p)\tilde{S}_{m-n(k-1)}, \quad Y_{n,2} \stackrel{d}{=} B_{nk}^{-1}(p)\tilde{S}_{nk-m}.$$

Вычислив характеристические функции величин в обеих частях соотношения (10), нетрудно вывести

$$\mathbf{E} \exp\{itY_{n,1}\} \mathbf{E} \exp\{itY_{n,2}\} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

так что $Y_{n,1} + Y_{n,2} \rightarrow 0$ по распределению и по вероятности. Из неравенства П. Леви [2, п. 17.1, с. 261] следует

$$\mathbf{P}\{|Y_{n,2}| \geq \varepsilon\} \leq 2\mathbf{P}\{|Y_{n,1} + Y_{n,2}| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Условие (R_2^*) вместе с (11) дают нам

$$B_{nk}^{-1}(p)\tilde{S}_{nk} \stackrel{d}{\sim} B_{nk}^{-1}(p)\tilde{S}_m + Y_{n,2} \stackrel{d}{\sim} B_{nk}^{-1}(p)\tilde{S}_m,$$

так что

$$B_{nk}^{-1}(p)\tilde{S}_m \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Так же, как и при выводе соотношения (7), из относительной компактности последовательности $\{B_n^{-1}(p)\tilde{S}_n\}$ получаем, что из любой последовательности натуральных чисел можно выбрать подпоследовательность $\{n_1\}$ такую, что при $m_1 = m(n_1)$ имеет место сходимость $B_{m_1}^{-1}(p)\tilde{S}_{m_1} \xrightarrow{d} \eta$, где η — невырожденная случайная величина. Из теоремы о сходимости типов [2, п. 13.2, с. 216] выводим $B_{n_1 k_1}^{-1}(p)B_{m_1}(p) \rightarrow C$, $k_1 = k(n_1)$, $0 < C < \infty$. Следовательно, вместе с последовательностью $\{B_m^{-p}(p)|\tilde{S}_m|^p\}$ является равномерно интегрируемой и последовательность $\{B_{n_1 k_1}^{-p}(p)|\tilde{S}_{m_1}|^p\}$. Отсюда и из соотношения (12) следует теперь, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n_1 k_1}^{-p}(p) \mathbf{E} |\tilde{S}_{m_1}|^p = \lim_{n \rightarrow \infty} B_{n_1 k_1}^{-p}(p) B_{m_1}^p \mathbf{E} |\mathcal{N}(0,1)|^p = \mathbf{E} |\mathcal{N}(0,1)|^p,$$

т.е. $C = 1$. Таким образом, из любой последовательности натуральных чисел можно выбрать подпоследовательность $\{n_1\}$ такую, что $B_{n_1 k_1}^{-1}(p)B_{m_1}(p) \rightarrow 1$, а это означает, что $B_{nk}^{-1}(p)B_m(p) \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, поэтому

$$B_m^{-1}(p)\tilde{S}_m \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \quad m \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Покажем, что $\{B_n^2(p)\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка 1, что в силу леммы 1 означает, что

$$\delta_n = B_{n+m}^{-2}(p)(B_n^2(p) + B_m^2(p)) \rightarrow 1, \quad n + m \rightarrow \infty.$$

Пусть $m = m(n)$. Если $\limsup_{n \rightarrow \infty} m(n) < \infty$, то аналогично (9) нетрудно показать, что $B_{n+m}(p) \sim B_n(p)$, откуда легко выводится $\delta_n \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим случай, когда из последовательности $m(n)$ можно выделить стремящуюся к бесконечности подпоследовательность; без ограничения общности можно считать, что $m(n) \rightarrow \infty$. Тогда в силу (13)

$$B_n^{-1}(p)\tilde{S}_n \stackrel{d}{\sim} B_m^{-1}(p)\tilde{S}_m \stackrel{d}{\sim} B_{n+m}^{-1}(p)\tilde{S}_{n+m} \stackrel{d}{\sim} \mathcal{N}(0,1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Далее, из ограниченных последовательностей

$$\alpha_n = \frac{B_n(p)}{\sqrt{B_n^2(p) + B_m^2(p)}}, \quad \beta_n = \frac{B_m(p)}{\sqrt{B_n^2(p) + B_m^2(p)}}$$

выберем подпоследовательности $\{\alpha_{n_1}\}$ и $\{\beta_{n_1}\}$ такие, что

$$\alpha_{n_1} \rightarrow \alpha, \quad \beta_{n_1} \rightarrow \beta, \quad n \rightarrow \infty, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1. \quad (15)$$

Из (14) и (15) следует

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{S}_{n_1}^\# + \tilde{S}_{m_1}^\#}{\sqrt{B_{n_1}^2(p) + B_{m_1}^2(p)}} &= \alpha_{n_1} B_{n_1}^{-1}(p) \tilde{S}_{n_1}^\# + \beta_{n_1} B_{m_1}^{-1}(p) \tilde{S}_{m_1}^\# \\ &\xrightarrow{d} \alpha \mathcal{N}(0, 1)^\# + \beta \mathcal{N}(0, 1)^\# \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (16)$$

Далее, в силу соотношений (R₂) и (14)

$$B_{n_1+m_1}^{-1}(p)(\tilde{S}_{n_1}^\# + \tilde{S}_{m_1}^\#) \stackrel{d}{\sim} B_{n_1+m_1}^{-1}(p) \tilde{S}_{n_1+m_1} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (17)$$

С помощью теоремы о сходимости типов [2, п. 13.2, с. 216] из (16) и (17) выводим

$$\delta_{n_1} = B_{n_1+m_1}^{-2}(p)(B_{n_1}^2(p) + B_{m_1}^2(p)) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, мы показали, что для всякой последовательности натуральных чисел найдется подпоследовательность $\{n_1\}$ такая, что $\delta_{n_1} \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$. Это означает, что $\delta_n \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, т.е. $\{B_n^2(p)\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка 1.

Теорема 1 доказана.

Утверждение в замечании 1 доказывается аналогично.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Н е о б х о д и м о с т ь. По условию при любом $t \in \mathbf{R}$

$$\mathbf{E} \exp\{itb_n^{-1}(\alpha)S_n^*\} \rightarrow \exp\{it \operatorname{St}(\alpha, c_1, c_2)\} = f_\alpha(t), \quad n \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Обозначим $g(t) = \mathbf{E} \exp\{it\xi_1\}$. В силу теорем 2.6.1 и 2.2.2 из [4]

$$g^n(b_n^{-1}(\alpha)t) \exp\{-itb_n^{-1}(\alpha)a_n\} \rightarrow f_\alpha(t), \quad n \rightarrow \infty \quad (19)$$

(подробности по поводу выбора постоянных a_n см., например, в [7, с. 649]).

Пусть $t \in \mathbf{R}$ и $m = m(n)$. Обозначим

$$\Delta(n) = \left| \mathbf{E} \exp \left\{ \frac{itS_{n+m}}{b_{n+m}(\alpha)} \right\} - \mathbf{E} \exp \left\{ \frac{itS_n}{b_{n+m}(\alpha)} \right\} \mathbf{E} \exp \left\{ \frac{itS_m}{b_{n+m}(\alpha)} \right\} \right|.$$

Выполнение соотношения $\Delta(n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, при любом $t \in \mathbf{R}$ равносильно условию R_α.

Поскольку $b_n^\alpha(\alpha)$ — правильно меняющаяся последовательность порядка 1, то в силу леммы 1

$$b_{n+m}^\alpha(\alpha) \sim b_n^\alpha(\alpha) + b_m^\alpha(\alpha), \quad n \rightarrow \infty,$$

так что для любой последовательности натуральных чисел $\{n_1\}$ существуют константа $0 \leq c \leq 1$ и подпоследовательность $\{n_2\} \subseteq \{n_1\}$ такие, что

$$b_{n_2+m_2}^{-\alpha}(\alpha)b_{n_2}^\alpha(\alpha) \rightarrow c, \quad b_{n_2+m_2}^{-\alpha}(\alpha)b_{m_2}^\alpha(\alpha) \rightarrow 1 - c, \quad n \rightarrow \infty, \quad (20)$$

где $m_2 = m(n_2)$. Пусть сначала $0 < c < 1$. Имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \left| g^{n_2+m_2}(b_{n_2+m_2}^{-1}(\alpha)t) - g^{n_2}(b_{n_2+m_2}^{-1}(\alpha)t)g^{m_2}(b_{n_2+m_2}^{-1}(\alpha)t) \right| \\ &= \left| g^{n_2+m_2}(b_{n_2+m_2}^{-1}(\alpha)t) \exp \left\{ -\frac{ita_{n_2+m_2}}{b_{n_2+m_2}(\alpha)} \right\} - g^{n_2}(b_{n_2+m_2}^{-1}(\alpha)t) \right. \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{ita_{n_2}}{b_{n_2+m_2}(\alpha)} \right\} g^{m_2}(b_{n_2+m_2}^{-1}(\alpha)t) \exp \left\{ -\frac{ita_{m_2}}{b_{n_2+m_2}(\alpha)} \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ it \frac{a_{n_2} + a_{m_2} - a_{n_2+m_2}}{b_{n_2+m_2}(\alpha)} \right\} \left. \right|. \end{aligned} \quad (21)$$

В силу (20) все характеристические функции в правой части последнего равенства имеют пределы, так что существует предел

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n_2+m_2}^{-1}(\alpha)(a_{n_2} + a_{m_2} - a_{n_2+m_2})$$

и из (19), (20) и (21) следует теперь, что

$$f_\alpha(t) = f_\alpha(c^{1/\alpha}t)f_\alpha((1-c)^{1/\alpha}t)\exp\{itA\}. \quad (22)$$

Ясно, что $A = 0$ при $\alpha \neq 1$. В силу (18), (20) и (22)

$$\begin{aligned} \Delta(n_2) &= \left| \mathbf{E} \exp \left\{ \frac{itS_{n_2+m_2}^*}{b_{n_2+m_2}(\alpha)} \right\} - \mathbf{E} \exp \left\{ \frac{itS_{n_2}^*}{b_{n_2+m_2}(\alpha)} \right\} \right. \\ &\quad \times \mathbf{E} \exp \left\{ \frac{itS_{m_2}^*}{b_{n_2+m_2}(\alpha)} \right\} \exp \left\{ it \frac{a_{n_2} + a_{m_2} - a_{n_2+m_2}}{b_{n_2+m_2}(\alpha)} \right\} \left. \right| \\ &\rightarrow \left| f_\alpha(t) - f_\alpha(c^{1/\alpha}t)f_\alpha((1-c)^{1/\alpha}t)\exp\{itA\} \right| = 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что из любой последовательности $\{\Delta(n_1)\}$ можно выделить сходящуюся к нулю подпоследовательность. Это означает, что $\Delta(n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Если же $c = 0$ ($c = 1$), то при $n \rightarrow \infty$

$$b_{n_2+m_2}^{-1}(\alpha)S_{n_2}^* \rightarrow 0 \quad (b_{n_2+m_2}^{-1}(\alpha)S_{m_2}^* \rightarrow 0)$$

по вероятности, а из (22) легко выводится, что $A = 0$, так что снова $\Delta(n_2) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, и, следовательно, $\Delta(n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Мы показали, что выполнено условие (R_α) . Из условия (R_α) следует, что если последовательность $k = k(n)$ растет достаточно медленно, то

$$b_{nk}^{-1}(\alpha)S_{nk} \stackrel{d}{\sim} \sum_{j=1}^k X_{j,n}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (23)$$

где $X_{j,n}$, $j = 1, \dots, k$, — независимые случайные величины такие, что $X_{j,n} \stackrel{d}{=} b_{nk}^{-1}(\alpha)S_n$, $j = 1, \dots, k$. По предположению

$$\sum_{j=1}^k \left(X_{j,n} - \frac{a_{nk}}{k} \right) \stackrel{d}{\sim} b_{nk}^{-1}(\alpha)S_{nk}^* \xrightarrow{d} \text{St}(\alpha, c_1, c_2), \quad n \rightarrow \infty.$$

В силу теоремы 1.7.3 из [4] при любом $x > 0$

$$\begin{aligned} k \mathbf{P} \left\{ S_n - \frac{a_{nk}}{k} > x b_{nk}(\alpha) \right\} &\rightarrow \frac{c_1}{x^\alpha}, \quad n \rightarrow \infty, \\ k \mathbf{P} \left\{ S_n - \frac{a_{nk}}{k} < -x b_{nk}(\alpha) \right\} &\rightarrow \frac{c_2}{x^\alpha}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (24)$$

Если $\alpha \neq 1$, то $a_{nk} = ka_n$ при любом натуральном k , а для $\alpha = 1$ аналогично (22) нетрудно получить

$$f_1(t) = f_1^k\left(\frac{t}{k}\right)\exp\{itA_k\}, \quad \text{где } A_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ka_n - a_{nk}}{b_{nk}(\alpha)}. \quad (25)$$

Легко видеть также, что

$$f_1^k\left(\frac{t}{k}\right) = f_1(t)\exp\{-it\beta(c_1 + c_2)\ln k\},$$

так что если $k = k(n) \rightarrow \infty$ достаточно медленно, то

$$b_{nk}^{-1}(\alpha)\left(\frac{a_{nk}}{k} - a_n\right) = O\left(\frac{\ln k}{k}\right) = o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (26)$$

и из (24) и (26) следует теперь, что при $n \rightarrow \infty$

$$k \mathbf{P}\{S_n^* > xb_{nk}(\alpha)\} \rightarrow \frac{c_1}{x^\alpha}, \quad k \mathbf{P}\{S_n^* < -xb_{nk}(\alpha)\} \rightarrow \frac{c_2}{x^\alpha}. \quad (27)$$

Далее, из (2) и определения $b_{nk}(\alpha)$ выводим

$$nk \mathbf{P}\{\xi_1 > xb_{nk}(\alpha)\} \rightarrow \frac{c_1}{x^\alpha}, \quad nk \mathbf{P}\{\xi_1 < -xb_{nk}(\alpha)\} \rightarrow \frac{c_2}{x^\alpha}, \quad (28)$$

что вместе с (27) дает нам условие (R).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполнены условия (R_α) и (R). Так же, как в доказательстве необходимости, из условия (R_α) выводим (23). Так как $X_{j,n} - b_{nk}^{-1}(\alpha)a_n \stackrel{d}{=} b_{nk}^{-1}(\alpha)S_n^*$, $j = 1, \dots, k$, то в силу [4, теорема 1.7.3] с учетом (25) получаем, что для того чтобы

$$b_{nk}^{-1}(\alpha)S_n^* \stackrel{d}{\sim} \sum_{j=1}^k (X_{j,n} - b_{nk}^{-1}(\alpha)a_n) - A_k \xrightarrow{d} \text{St}(\alpha, c_1, c_2), \quad n \rightarrow \infty, \quad (29)$$

достаточно, чтобы выполнялись соотношения (27) и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} k \int_{|x| < \varepsilon} x^2 d\mathbf{P}\{S_n^* \leq xb_{nk}(\alpha)\} = 0. \quad (30)$$

Соотношение (27) следует из (28) и условия (R), и в силу (27)

$$k \int_{|x| < \varepsilon} x^2 d\mathbf{P}\{S_n^* \leq xb_{nk}(\alpha)\} = O(\varepsilon^{2-\alpha}) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

и, следовательно, имеет место (29). Пусть $nk < m < n(k+1)$. Последовательность $\{b_n(\alpha)\}$ является правильно меняющейся с положительным показателем, поэтому без ограничения общности ее можно считать неубывающей [3, гл. 1, п. 1.5, с. 26], так что

$$\sup_{nk \leq m \leq n(k+1)} \left| \frac{b_m(\alpha)}{b_{nk}(\alpha)} - 1 \right| \leq \left| \frac{b_{n(k+1)}(\alpha)}{b_{nk}(\alpha)} - 1 \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (31)$$

и в силу условия (R) и (28)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\left|\sum_{j=nk+1}^m \xi_j - a_{m-nk}\right| > \varepsilon b_{nk}(\alpha)\right\} &\leq \mathbf{P}\{|S_{m-nk}^*| > \varepsilon b_{(m-nk)k}(\alpha)\} \\ &\sim (m-nk) \mathbf{P}\{|\xi_1| > \varepsilon b_{(m-nk)k}(\alpha)\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

т.е.

$$b_{nk}^{-1}(\alpha) \left(\sum_{j=nk+1}^m \xi_j - a_{m-nk} \right) \rightarrow 0 \quad (32)$$

по вероятности. Аналогично тому, как выведено (22), при $c = 0$ нетрудно получить

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m - a_{nk} - a_{m-nk}}{b_{nk}(\alpha)} = 0.$$

Вместе с (29), (31) и (32) последнее соотношение дает нам

$$b_m^{-1}(\alpha)S_m^* \xrightarrow{d} \text{St}(\alpha, c_1, c_2), \quad m \rightarrow \infty.$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринь А. Г. О минимальном условии слабой зависимости в центральной предельной теореме для стационарных последовательностей. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 3, с. 554–558.
2. Лозе М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 719 с.
3. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 141 с.
4. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
5. Гринь А. Г. Нормирующие последовательности в предельных теоремах для слабо зависимых величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 2, с. 285–300.
6. Dehling H., Denker M., Philipp W. Central limit theorems for mixing sequences of random variables under minimal conditions. — Ann. Probab., 1986, v. 14, № 4, p. 1359–1370.
7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 751 с.
8. Гринь А. Г. Области притяжения для последовательностей с перемешиванием. — Сиб. матем. журн., 1990, т. 31, № 1, с. 53–63.
9. Гринь А. Г. Об областях притяжения для сумм зависимых величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1990, т. 35, в. 2, с. 255–270.
10. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 351 с.

Поступила в редакцию
26.XII.2003

Исправленный вариант
26.II.2009

© 2009 г.

КЕЛЬБЕРТ М.*

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В настоящей статье приводится формула Фейнмана–Каца высшего порядка для решений уравнения $(\Delta + V)^m u = 0$ в области D . Вероятностное представление влечет априорные оценки на рост решений, когда область D расширяется к $\mathbf{R}^d$. Оценки моментов случайного времени достижения высокого уровня для процессов Бесселя используются для доказательства слабой зависимости полигармонических функций от некоторых граничных значений.

Ключевые слова и фразы: полигармонические функции, принцип максимума, формула Фейнмана–Каца, процессы Бесселя.

1. Введение. В этой заметке мы изучаем решения уравнения

$$(L + V)^m u = 0 \tag{1.1}$$

в открытой предкомпактной области $D \subset \mathbf{R}^d$, $d \geq 2$, с регулярной границей ∂D , где $m \geq 1$ — целое число. В большей части статьи L обозначает (плоский) лапласиан $\sum_{i=1}^d \partial^2 / \partial x_i^2$, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d$, который является генератором стандартного броуновского движения. Заметим, что многие результаты непосредственно переносятся на случай любого генератора L марковского процесса.

* Mathematics Department, University of Swansea, Singleton Park, Swansea, SA2 8PP, UK; e-mail: M.Kelbert@swansea.ac.uk